TRIGONOMETRIE

	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
$\sin x$		$\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}}$
$\cos x$	$\sqrt{1-\sin^2 x}$		$\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$	$\dfrac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}}$
$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\dfrac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$		$\dfrac{1}{\operatorname{ctg} x}$
$\operatorname{ctg} x$	$\dfrac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$	$\dfrac{\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$	

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

$\lvert u\rvert \leqslant 1$	$\operatorname{Arc\,sin} u = x \longleftrightarrow u = \sin x$	$\lvert x\rvert \leqslant \frac{\pi}{2}$
$\lvert u\rvert \leqslant 1$	$\operatorname{Arc\,cos} u = x \longleftrightarrow u = \cos x$	$0 \leqslant x \leqslant \pi$
	$\operatorname{Arc\,tg} u = x \longleftrightarrow u = \operatorname{tg} x$	$\lvert x\rvert < \frac{\pi}{2}$
	$\operatorname{Arc\,ctg} u = x \longleftrightarrow u = \operatorname{ctg} x$	$0 < x < \pi$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1-\cos\alpha$$

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1+\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$2\sin\alpha\sin\beta = -\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$$
$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$$
$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$$
$$2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$$

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

$a\cos\alpha + b\sin\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\alpha+\varphi)$ où $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{b}$ et $\operatorname{sgn}(\sin\varphi) = \operatorname{sgn} a$

FONCTIONS HYPERBOLIQUES

	$\operatorname{Arg\,sh} u = \ln\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)$
$u \geqslant 1$	$\operatorname{Arg\,ch} u = \ln\left(u+\sqrt{u^2-1}\right)$
$\lvert u\rvert < 1$	$\operatorname{Arg\,th} u = \frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u}$
$\lvert u\rvert > 1$	$\operatorname{Arg\,cth} u = \frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{u-1}$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \qquad \operatorname{th}^2 x + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1$$

	$\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
	$\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
	$\operatorname{th} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
$x \neq 0$	$\operatorname{cth} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

	$x = \operatorname{Arg\,sh} u \leftrightarrow u = \operatorname{sh} x$	
$u \geqslant 1$	$x = \operatorname{Arg\,ch} u \leftrightarrow u = \operatorname{ch} x$	$x \geqslant 0$
$\lvert u\rvert < 1$	$x = \operatorname{Arg\,th} u \leftrightarrow u = \operatorname{th} x$	
$\lvert u\rvert > 1$	$x = \operatorname{Arg\,cth} u \leftrightarrow u = \operatorname{cth} x$	$x \neq 0$

$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x\operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x\operatorname{sh} y$$
$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x\operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x\operatorname{sh} y$$
$$\operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1+\operatorname{th} x\operatorname{th} y}$$

$$\operatorname{sh}(2x) = 2\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x$$
$$\operatorname{ch}(2x) = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x$$
$$\operatorname{th}(2x) = \frac{2\operatorname{th} x}{1+\operatorname{th}^2 x}$$

$$\operatorname{sh}^2\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}$$
$$\operatorname{ch}^2\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{ch} x + 1}{2}$$
$$\operatorname{th}\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{sh} x} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x + 1}$$

Tableau 10.1 Dérivées – Primitives.

$f(x) = F'(x)$	$f'(x)$	$F(x)$	Conditions
a	0	ax	
x^{α}	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\alpha \neq -1,\ x > 0$
$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{-1}{x^2}$	$\operatorname{Log}\lvert x\rvert$	$x \neq 0$
$\dfrac{1}{a^2+x^2}$	$\dfrac{-2x}{(a^2+x^2)^2}$	$\dfrac{1}{a}\operatorname{Arctg}\dfrac{x}{a}$	$a \neq 0$
$\dfrac{1}{a^2-x^2}$	$\dfrac{2x}{(a^2-x^2)^2}$	$\dfrac{1}{2a}\operatorname{Log}\left\lvert\dfrac{a+x}{a-x}\right\rvert$	$a \neq 0,\ x \neq \pm a$
$\dfrac{1}{x^2-a^2}$	$\dfrac{-2x}{(x^2-a^2)^2}$	$\dfrac{1}{2a}\operatorname{Log}\left\lvert\dfrac{x-a}{x+a}\right\rvert$	$a \neq 0,\ x \neq \pm a$
$\sqrt{x^2+a^2}$	$\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \dfrac{a^2}{2}\operatorname{Log}(x+\sqrt{x^2+a^2})$	$a \neq 0$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$\dfrac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \dfrac{a^2}{2}\operatorname{Log}\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\rvert$	$a \neq 0,\ \lvert x\rvert > \lvert a\rvert$
$\sqrt{a^2-x^2}$	$\dfrac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \dfrac{a^2}{2}\operatorname{Arcsin}\dfrac{x}{a}$	$a > 0,\ \lvert x\rvert < a$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$\dfrac{-x}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$	$\operatorname{Log}(x+\sqrt{x^2+a^2})$	$a \neq 0$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$\dfrac{-x}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}$	$\operatorname{Log}\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\rvert$	$a \neq 0,\ \lvert x\rvert > \lvert a\rvert$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\dfrac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$	$\operatorname{Arcsin}\dfrac{x}{a}$	$a > 0,\ \lvert x\rvert < a$
e^x	e^x	e^x	
a^x	$a^x \operatorname{Log} a$	$\dfrac{a^x}{\operatorname{Log} a}$	$a > 0,\ a \neq 1$
$\operatorname{Log} x$	$\dfrac{1}{x}$	$x(\operatorname{Log} x - 1)$	$x > 0$
$\operatorname{Log}_a x$	$\dfrac{1}{x \operatorname{Log} a}$	$x(\operatorname{Log}_a x - \operatorname{Log}_a e)$	$a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0$

$f(x) = F'(x)$	$f'(x)$	$F(x)$	Conditions
$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$	
$\operatorname{tg} x$	$1+\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$-\operatorname{Log}\lvert\cos x\rvert$	$x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{cotg} x$	$-(1+\operatorname{cotg}^2 x) = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{Log}\lvert\sin x\rvert$	$x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{\sin x}$	$\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}$	$\operatorname{Log}\left\lvert\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right\rvert$	$x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{\cos x}$	$\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$	$\operatorname{Log}\left\lvert\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\rvert$	$x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{Arcsin} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \operatorname{Arcsin} x + \sqrt{1-x^2}$	$\lvert x\rvert < 1$
$\operatorname{Arccos} x$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \operatorname{Arccos} x - \sqrt{1-x^2}$	$\lvert x\rvert < 1$
$\operatorname{Arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$x \operatorname{Arctg} x - \operatorname{Log}\sqrt{1+x^2}$	
$\operatorname{Arccotg} x$	$\dfrac{-1}{1+x^2}$	$x \operatorname{Arccotg} x + \operatorname{Log}\sqrt{1+x^2}$	
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{ch} x$	
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{sh} x$	
$\operatorname{th} x$	$1-\operatorname{th}^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\operatorname{Log} \operatorname{ch} x$	
$\operatorname{coth} x$	$1-\operatorname{coth}^2 x = \dfrac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$\operatorname{Log}\lvert\operatorname{sh} x\rvert$	$x \neq 0$
$\operatorname{Argsh} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$x \operatorname{Argsh} x - \sqrt{x^2+1}$	
$\operatorname{Argch} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x \operatorname{Argch} x - \sqrt{x^2-1}$	$x > 1$
$\operatorname{Argth} x$	$\dfrac{1}{1-x^2}$	$x \operatorname{Argth} x + \operatorname{Log}\sqrt{1-x^2}$	$\lvert x\rvert < 1$
$\operatorname{Argcoth} x$	$\dfrac{1}{1-x^2}$	$x \operatorname{Argcoth} x + \operatorname{Log}\sqrt{x^2-1}$	$\lvert x\rvert > 1$

EPFL
Dépt de Mathématiques
Prof. B. ZWAHLEN

Sections : **EPFL** : Math, Phys.
UNIL : Math, Phys.
HEC : Actuaires

ANALYSE I **Feuille d'informations**

---

1. **Exercices :** Séances selon l'horaire officiel.

2. **Assistants et heures de présences :**

- Assistants :

N. Georgy	DMA	$2^{\text{ème}}$ ét.	**585**
H.-P. Grimm	DMA	$2^{\text{ème}}$ ét.	**595**
D. Groux	DMA	$2^{\text{ème}}$ ét.	**585**
C.D. Petrescu	DMA	$2^{\text{ème}}$ ét.	**593**

- Heures de présence : Les étudiants qui désirent consulter individuellement le professeur ou un assistant sont invités à fixer un rendez-vous pendant la séance d'exercices.

3. **Livres recommandés :** **J. Douchet, B. Zwahlen:** *Calcul différentiel et intégral*, Tomes 1,2,3 et 4, Editions PPUR.

4. **Répartition des salles d'exercices :**

Exercices lundi et mercredi

	Salle	Assistant
Math, EPFL,	C0 122	H.-P. Grimm
Math., Phys. UNIL	CO 21	N. Georgy
Phys. EPFL + HEC Phys. EPF	CO 123 CO 124	D. Groux C.D. Petrescu

5. **Contrôle continu:** voir feuille à part.
6. **Examen propédeutique:** voir feuille à part.
7. **Introduction à MATHEMATICA:** voir feuille à part.

Prof. B. Zwahlen

Lausanne, le octobre 1996

EPFL
Dépt de Mathématiques
Prof. B. Zwahlen

Sections: EPFL: Math., Phys.
UNIL: Math., Phys., HEC (Actuaires)

ANALYSE I **Série 1** **le 21 octobre 1996**

1. Prouver l'inégalité suivante: (récurrence)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ *avec* $x > -1$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Si de plus $x \neq 0$ *et* $n \geq 2$ *on a même*

$$(1+x)^n > 1 + nx.$$

(Inégalité de Bernoulli)

2. Prouver que (série d'équivalences)

$$\sqrt[n]{n!} < \sqrt[n+1]{(n+1)!}.$$

$n \in \mathbb{N}^*$

3. Prouver par récurrence que:

a) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n}{2}(n+1)$

b) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$

c) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (1+\ldots+n)^2$

4. Soit E un ensemble et A_i, $i = 1,\ldots,n$, des sous-ensembles de E. Prouver

a) $\complement_E \varnothing = E$

b) $\complement_E E = \varnothing$

c) $\complement_E \bigcup_i A_i = \bigcap_i \complement_E A_i$

d) $\complement_E \bigcap_i A_i = \bigcup_i \complement_E A_i$

$\complement_E A_i$ étant le complément de A_i dans E *(Lois de Morgan).*

5. Déterminer tous les $x \in \mathbb{R}$ qui satisfont les inégalités suivantes:

a) $(x+1)^2 \leq |x+2|$

b) $\dfrac{x^2+1}{x^2+x-1} \leq \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$

6. Soient A et B deux ensembles. Combien de fonctions

$$f\colon\ A \to B$$

existent si A contient m éléments et B contient n éléments?

Combien de ces fonctions sont injectives? Pas 2 éléments qui ont la même image.

EPFL
Dépt de Mathématiques
Prof. B. Zwahlen

Sections: **EPFL :** Math, Phys.
UNIL: Math, Phys, HEC (Actuaires)

ANALYSE I **Série 2** **le 28 octobre 1996**

☐ : à domicile, rendre dans 1 semaine, seront corrigés

1. a) Soit f,g : IR -> IR deux fonctions croissantes. Montrer que la fonction fog est également croissante.

b) Soit f,g : IR -> IR deux fonctions où g est croissante et f décroissante. Montrer que la fonction fog est décroissante.

c) Soit f : IR -> IR une fonction strictement croissante. Montrer que sa fonction inverse f^{-1} est également strictement croissante dans son domaine d'existence. Raisonner par l'absurde.

2. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos x + 1.$ indication: $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$

Montrer qu'il existe une constante k telle que pour tous les couples (x, y), $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ on ait

$$|f(x) - f(y)| \le k|x - y|.$$

$\boxed{3}$. Soit (4.42)

$$f\colon \mathbb{R}\setminus\{\pm1\} \to \mathbb{R},\quad f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - 1}.$$

Déterminer Im*f*.
= ensemble d'arrivée $\underset{=y}{f(x)}$ qui est image des x par la fonction f:

x	f(x)
	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
⋮	6

alors: $\mathrm{Im}f = [1, 4]$

4. Soit indication: $\sin\alpha + \sin\beta = 2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$$f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R},\quad f(x) = \sin\frac{1}{x} + \cos x.$$

Trouver l'image réciproque de 0. Trouver Sup(Im*f*).

5. Démontrer, en utilisant la définition (p. 15), la convergence de la suite (x_n).

a) $x_n = \dfrac{\cos n}{\sqrt{n}}$ b) $x_n = \dfrac{3n^3 + 8}{3n^3 + 7}$ $\boxed{c)}$ $x_n = a^n$ $|a| < 1$

$|x_n - \ell| \le \varepsilon \Rightarrow$ on met en évidence n pour avoir la fonction $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$
puis on effectue l'inégalité, avec le $n(\varepsilon)$ trouvé qui remplace n, une fois que l'on a simplifié avec n:
$|x_{n(\varepsilon)} - \ell| \le \varepsilon$

6. Montrer que la suite (x_n) converge et calculer sa limite:

a) $x_{n+1} = \sqrt{3x_n}$, $x_0 = 1$ $\boxed{b)}$ $x_{n+1} = \dfrac{1}{1 + x_n}$, $x_0 = 0$

LUNDI LE 4 NOVEMBRE ET MERCREDI LE 6 NOVEMBRE LES EXERCICES AURONT LIEU DANS LA SALLE CE/3

EPFL
Dépt de Mathématiques
Prof. B. Zwahlen

Sections: **EPFL** : Math, Phys.
UNIL: Math, Phys, HEC (Actuaires)

ANALYSE I **Série 3** **le 4 novembre 1996**

---

1 . Calculer la limite de la suite (x_n), si elle existe:

utiliser: $z_n = x_n + y_n$ $\lim(z_n) = x+y$
$u_n = x_n \cdot y_n$ $\lim(u_n) = x \cdot y$
$v_n = \frac{x_n}{y_n}$ $\lim(v_n) = \frac{x}{y}$

a) $x_n = n - \sqrt{n^2+4n}$ b) $x_n = \dfrac{n^2 - 2\sqrt{n+1}}{1-n-3n^2}$ c) $x_n = \dfrac{(n+2)n}{n+1} - \dfrac{n^3}{n^2+1}$

d) $x_n = \sqrt{n}\sin\dfrac{1}{n}$ e) $x_n = \sin(n\pi/2)\left(n - \sqrt{n^2+n}\right)$

2 . Montrer que la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \quad x_0 > 0, a > 0$$

converge. Calculer sa limite.

(bornée inf, décroissante $\Longrightarrow$ converge)
Montrer: $\cdot\, x_n \geq \sqrt{a}$, pour $n \geq 1$
$\cdot\, \underbrace{x_n \geq x_{n+1}}_{\text{pas par récurrence}}$ à démontrer
pas par récurrence mais: $x_n \geq \underbrace{\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)}_{x_{n+1}}$
⋮
$x_n \geq \sqrt{a}$

3 . Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ et (x_n) telle que $x_n \neq -a$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - a}{x_n + a} = b.$$

Discuter la convergence de (x_n) en fonction de b.

4 . Soit une suite (x_n) telle que $|x_{n+1} - x_n| < 1/2^n$. Démontrer que (x_n) est une suite de Cauchy.

La même conclusion, est-elle encore vraie si $|x_{n+1} - x_n| < 1/n$?

5 . Montrer que la suite (x_n) définie par $x_{n+1} = (\sin x_n + 1)/2$ est une suite de Cauchy.

Montrer: suite par itérations est une suite de Cauchy. $|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{2}|x_n - x_{n-1}|$ (à montrer)

6 . a) Montrer que si les sous-suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) convergent vers la même limite l, alors la suite (x_n) converge aussi vers l.

~~b)~~ Etudier la convergence de la suite définie par $x_{n+1} = \sqrt{2 - x_n}$, $x_0 = \dfrac{2}{3}$

→ trop compliqué

7 . Montrer que de toute suite bornée (x_n) on peut extraire une sous-suite (x_{n_k}) telle que

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

EPFL
Dépt de Mathématiques
Prof. B. Zwahlen

Sections: **EPFL :** Math, Phys.
UNIL: Math, Phys, HEC (Actuaires)

ANALYSE I **Série 4** **le 11 novembre 1996**

$x_{2n} = \frac{1}{2} \cdot x_{2n-1}$
$x_{2n+1} = \frac{1}{2} + x_{2n}$

1. Soit (x_n) la suite définie par

$$x_0 = 0, \quad x_{2n} = \frac{x_{2n-1}}{2}, \quad x_{2n+1} = \frac{1}{2} + x_{2n}.$$

$\forall n$ on a : $\left.\begin{array}{l} x_{2n-1} \geqslant x_{2n} \\ x_{2n+1} \geqslant x_{2n} \end{array}\right\}$

Déterminer $\limsup_{n\to\infty} x_n$ et $\liminf_{n\to\infty} x_n$.

2. Soient (a_n) et (b_n) des suites bornées. Montrer que

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \le \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

$\cup$ (x,y)

3. a) Démontrer qu'une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables disjoints deux à deux est un ensemble dénombrable.

↳ $\exists$ bij. de cet ens. sur ens. entier $\mathbb{N}$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable

(cardinalité)

b) Soit E un ensemble de puissance (cardinalité) n. Calculer la puissance de $\mathcal{P}$(E).

↳ ensemble des parties de E = sous-ensembles de E

c) Soit A un ensemble non vide. Montrer qu'il n'y a pas de surjection de A sur $\mathcal{P}$(A).

En déduire que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

4. Soit $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{n_i}{10^i}$ où n_i est une suite composée d'éléments de $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Montrer que si n_i est périodique à partir de i_0, c.à.d. $n_{i+p} = n_i$ (période) pour tout $i \ge i_0$, alors $x \in \mathbb{Q}$.

$x = S + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n_i}{10^i}$ $\qquad n_1 = n_1 + p$ $\qquad \forall i \geqslant i_0$

$\boxed{5}$. Etudier la convergence et la convergence absolue des séries suivantes:

série conv. abs. converge. limit sup, d'Alembert,

$\boxed{a)}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(5^{n+1})}$ $\boxed{c)}$ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctan n}{n^2}$ d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$

$\boxed{e)}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+n^2}{n^3+1}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{2^n}$ $\boxed{g)}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2n+1}}$ h) $\sum_{n=1}^{\infty} \tan\frac{1}{n}$

6. Discuter, en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{N}$, la convergence de la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+\sin(1/k))^{\alpha}}$.

$\boxed{7}$. Calculer a) $\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k(k+1)}$ $\boxed{b)}$ $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k}$

EPFL
Dépt de Mathématiques
Prof. B. Zwahlen

Sections: **EPFL :** Math, Phys.
UNIL: Math, Phys, HEC (Actuaires)

ANALYSE I **Série 5** **le 18 novembre 1996**

propé septembre → **1.** Soit (x_n) une suite. Des six implications possibles entre

$$(i)\ \sum_{n=0}^{\infty} x_n \text{ converge} \quad \overset{\Rightarrow}{\Leftarrow} \quad (ii)\ \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| \text{ converge}$$

$$\Downarrow \ \Uparrow \qquad \swarrow \ \nearrow$$

$$(iii)\ \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 \text{ converge}$$

lesquelles sont vraies?

vrai : prouver
faux : contre-exemple

2. Soit $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ une série convergente mais non absolument convergente et $S \in \mathbb{R}$ arbitraire.

Montrer qu'il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de sorte que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = S$ avec $b_n = a_{\varphi(n)}$.

$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$n \mapsto \varphi(n)$

3. On sait que la série harmonique $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge. Soit à présent (n_k) la suite des nombres naturels (dans l'ordre croissant) qui sont représentés en écriture décimale sans utiliser le chiffre 0. Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k}$ converge.

4. Discuter la convergence des séries en fonction du paramètre α:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^3 \alpha^n$ $\quad$ $\boxed{\text{b)}}$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\alpha + \frac{1}{n}\right)^n$ $\quad$ c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left| \frac{3\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1} + \alpha \right|$

5. Soit (x_n) la suite définie par $x_{n+1} = x_n f(x_n)$, $x_0 = 1$ où f est la fonction $f : [0, \infty[\to [0,1[$ donnée par $f(x) = \frac{x}{1+x}$.

(i) Montrer que (x_n) converge.

(ii) Calculer la limite.

(iii) Calculer $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k (1 - f(x_k))$.

6. Calculer

$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2(kx)}{x^2}$ $\quad$ b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$ $\quad$ c) $\lim\limits_{x \to 0^{\pm}} \frac{x}{\sqrt{1 - \cos x}}$

$\boxed{\text{d)}}$ $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$ $\quad$ $\boxed{\text{e)}}$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x(\tan 4x - \tan 2x)}{x^2}$ $\quad$ $\boxed{\text{f)}}$ $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{(x - \pi/2)^3}{\cos x(1 - \sin x)}$

4.10

EPFL
Dépt de Mathématiques
Prof. B. Zwahlen

Sections: **EPFL** : Math, Phys.
UNIL: Math, Phys, HEC (Actuaires)

ANALYSE I **Série 6** **le 25 novembre 1996**

1. Pour $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, calculer

a) $\lim_{x\to 0} x^{-n}(\cos ax - \cos x)$ b) $\lim_{x\to a} \frac{x^{2/n} - a^{2/n}}{x-a}$ $\boxed{\text{c)}}$ $\lim_{x\to 0} \frac{(x+a)^{-n} - a^{-n}}{x}$

2. Soit $f: \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $\varepsilon>0$ donné et pour tout $a>0$, calculer un $\delta=\delta(\varepsilon,a)>0$ tel que $|x-a|\le\delta$ implique $|f(x)-f(a)|\le\varepsilon$. Faire le calcul pour les fonctions suivantes: continuité uniforme p. 66

a) $f(x) = 1/x$

b) $f(x) = x\cos x$

$\boxed{\text{c)}}$ $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

Pour les tois cas, est-il possible de trouver un δ indépendant de a?

3. Soit $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

a) $f(x) = E(x)$

$\boxed{\text{b)}}$ $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$

c) $f(x) = \cos\frac{1}{x}$

Peut-on prolonger par continuité au point $x = 0$?

essayer chez moi pour assimilation du cours.

4. Soit $P_n(x)$ un polynôme réel en x. Montrer:

a) Si n est impair, l'équation $P_n(x) = 0$ possède au moins une solution réelle.

b) Si n est pair, il existe un $\bar{x}$ tel que $P_n(\bar{x})$ est égal à $\max \mathrm{Im}(f)$ ou $\min \mathrm{Im}(f)$.

5. Soit (x_n) la suite définie par $x_{n+1} = 1/2 - a\sin(2\pi x_n)$ et $x_0 \in [0,1]$ quelconque. Discuter la convergence de (x_n) pour $a = 0$, $a = 1/2\pi$ et $a = 1/4$. Que peut-on dire pour des valeurs de a intermédiaires?

EPFL
Dépt de Mathématiques
Prof. B. Zwahlen

Sections: **EPFL :** Math, Phys.
UNIL: Math, Phys, HEC (Actuaires)

ANALYSE I **Série 7** **le 4 décembre 1995**

1. Déterminer pour quel $\alpha \in IN^*$ la série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ est convergente, avec

$$\begin{cases} x_{2k} = \dfrac{1}{(2k)^\alpha} \\ x_{2k+1} = \dfrac{-1}{2k+1} \end{cases} \quad \text{pour } k \in IN^*$$

2. Pour quelles valeurs des nombres réels α et β la fonction $f: \mathrm{IR} \to \mathrm{IR}$ définie par $f(x) = \alpha^2 x^3 + x + \beta$ s'annule-t-elle une seule fois dans l'intervalle [0,1] ?

$\boxed{3}$ partie numérique

Soit $f: \mathrm{I} \subset \mathrm{IR} \to \mathrm{IR}$ continue; l'exercice a pour but de localiser une solution $\bar{x} \in \mathrm{I}$ de l'équation $f(x) = 0$.

1ère étape: Trouver un intervalle $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ tel que l'équation $f(x) = 0$ ait une solution unique $\bar{x} \in \mathrm{J}$.

2ème étape: Définir une fonction auxiliaire $g: [a,b] \to [a,b]$ de telle sorte que $\bar{x} \in [a,b]$ et que la suite (x_n) définie par $x_{n+1} = g(x_n)$, $x_0 \in [a,b]$, converge vers $\bar{x}$.

3ème étape: Faire les calculs numériques.

Les équations proposées sont:

$f(x) = x^3 + x - 1 = 0$

$f(x) = x - \cos x = 0$
tout ce qui concerne cette fonction

$\boxed{4.}$ Pour les exemples donnés dans l'exercice 3, trouver un intervalle [a,b] de telle sorte que $f(a) \cdot f(b) < 0$ et appliquer la méthode de bissection pour approcher les solutions. Comparer ces résultats avec ceux de l'exercice 3.

5. Soit la fonction $f: \mathrm{IR} \to \mathrm{IR}$ définie par $f(x) = 1 + x - \dfrac{x}{1+|x|}$.

a) Montrer que $|f(x) - f(y)| \le |x - y|$, $\forall x, y \in \mathrm{IR}$.

b) Montrer que f n'est pas contractante.

EPFL
Dépt de Mathématiques
Prof. B. Zwahlen

Sections: **EPFL :** Math, Phys.
UNIL: Math, Phys., HEC (Actuaires)

ANALYSE I **Série 8** **le 9 décembre 1995**

1. Soit f: IR $\rightarrow$ IR une fonction différentiable et périodique.

a) Montrer que f' est périodique.
b) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = l$, montrer que f est constante.

2. Soit la fonction f: IR $\rightarrow$ IR définie par

ex. 5.27

indication : - pour $|x| < 1$, poser $|x| = \sin\theta$ et calculer $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} Arc\cos(1-2x^2) - 2Arc\sin|x| & |x| \leq 1 \\ Arc\cos(\dfrac{1}{1-2x^2}) - 2Arc\sin\dfrac{1}{|x|} & |x| > 1 \end{cases}$$

$\left(\frac{d}{dx}\right) \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\left(\frac{d}{dx}\right) \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

a) Calculer f' et donner son domaine de définition.
b) Représenter graphiquement la fonction f.

3. Soit la fonction f: IR $\rightarrow$ IR définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2 + \sin^2 x} & x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que f est continûment différentiable. i) d'abord voir $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$
b) Calculer $\max\limits_{x\in\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]} f(x)$ et $\min\limits_{x\in\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]} f(x)$. ↳ donc sur $\mathbb{R}$ $f \in C^1(I, \mathbb{R})$, $I = \mathbb{R}$
c) Calculer $\max\limits_{x\in IR} f(x)$ et $\min\limits_{x\in IR} f(x)$, s'ils existent.
d) Calculer les points stationnaires de f
$f'(x) = 0$

4. Soit la fonction f: IR $\rightarrow$ IR définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

a) Déterminer pour quel $\alpha \in IN^*$ la dérivée de f existe, notamment en $x = 0$.
b) Pour $\alpha = 2$, f' est-elle une fonction continue ?

5. Soit $\bar{I}$ un intervalle fermé borné et $f: \bar{I} \rightarrow$ IR une fonction continûment différentiable. Montrer que f est lipschitzienne sur $\bar{I}$ de rapport $L = \sup\limits_{x\in\bar{I}} |f'(x)|$.

EPFL
Dépt de Mathématiques
Prof. B. Zwahlen

Sections: **EPFL :** Math, Phys.
UNIL: Math, Phys., HEC (Actuaires)

ANALYSE I **Série 9** **le 16 décembre 1995**

th. acc. finis **1.** Montrer que si f: IR → IR est une fonction différentiable et si sa dérivée f' est strictement croissante alors

$$f'(x) < f(x+1) - f(x) < f'(x+1)$$

th. acc. finis. **2.** Soit $f: [a,b] \to$ IR une fonction deux fois continûment différentiable. On suppose que

$f'(a) = f'(b) = 0$. Montrer que $|f(a) - f(b)| \leq \frac{(b-a)^2}{2} M$ où $M = \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|$

$\boxed{3.}$ Calculer

1. B.-H.
2. chang. de variable.
3. termes hybrides
4. dév. limit.

a) $\lim_{x\to 0} \frac{1+\sin x - \cos x}{\tan x}$

$\boxed{\text{b)}}$ $\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2-x+1} + \sqrt[3]{x^3+2x^2+1})$ $= \frac{7}{6}$

c) $\lim_{x\to 1} \frac{Arctg(\frac{1-x}{1+x})}{x-1}$

$\boxed{\text{d)}}$ $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos^2 x} \frac{(1-\cos^3 x)^2}{x\cos x - \sin x}$ $= 0$

essayer la méthode des développements limités.

e) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}$

4. a) Soit f: I → IR une fonction convexe et soit $x, y, z \in I$ tels que $x < z < y$, montrer que

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$$

b) Soit $a \in I$ et une fonction g: I - {a} → IR définie par $g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, montrer que g est une fonction croissante.

$\boxed{5.}$ a) Trouver la solution des équations suivantes en utilisant la méthode de Newton

i) $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$

ii) $f(x) = x - \cos x = 0$

b) Comparer cette méthode avec celle utilisée à l'exercice 4 de la série 7.

EPFL
Dépt de Mathématiques
Prof. B. Zwahlen

Sections: **EPFL :** Math, Phys.
UNIL: Math, Phys, HEC (Actuaires)

ANALYSE I | **Série 10** | **le 6 Janvier 1997**

---

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Étudier et représenter ses développements limités d'ordre 2, 4 et 6 autour de $\bar{x} = 0$. Donner une expression pour le reste du développement limité d'ordre 2.

2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = \dfrac{\cos(x)}{1+x^4+x^6}$.

Calculer le développement limité d'ordre 6 autour de $\bar{x} = 0$.

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \left[1 + \mathrm{Arctg}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)\cos x\right]^{1/3}$.

Calculer $f'''(0)$.

4. a) Montrer l'égalité suivante :

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\ tg\,\beta}$$

b) Choisir deux valeurs pour $u = tg\,\alpha$ et $v = tg\,\beta$ afin de calculer une approximation du nombre π à l'aide du developpement limité de la fonction $Arctg(x)$ autour de $\bar{x} = 0$.

$\boxed{5}$ On considère une courbe Γ dans IR^2 donnée sous forme paramétrique:
$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$.

valable uniquement pour la cycloïde.

a) Déterminer la courbe $\gamma(t) = (\xi(t), \eta(t))$ des centres des cercles osculateurs associés à $\Gamma(t)$. Pour les courbes i) et ii), montrer de plus que γ et Γ sont de même nature.

b) Représenter graphiquement γ et Γ sur un même dessin

$\boxed{\text{i)}}$ cycloïde
$\varphi(t) = a(t - \sin t)$
$\psi(t) = a(1 - \cos t)$

ii) spirale
$\varphi(t) = t \cos t$
$\psi(t) = t \sin t$

EPFL
Dépt de Mathématiques
Prof. B. Zwahlen

Sections: **EPFL :** Math, Phys.
UNIL: Math, Phys, HEC (Actuaires)

ANALYSE I **Série 11** **le 13 janvier 1997**

1 . Calculer les développements limités d'odre 4 autour de zéro des fonctions suivantes

a) $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$

b) $f(x) = Arc\sin(x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}})$

2. Calculer les limites suivantes

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x^2-4)^3(\cos^2 x - 1)}{x^5 - 6x^4 + 12x^3 - 8x^2}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$

3 . Soit $P_n(x)$ le polynôme de Taylor de degré n de la fonction $f(x) = \sin x$ autour de $\bar{x} = 0$.

a) Trouver n minimum de telle sorte que $|P_n(1) - \sin 1| < \dfrac{1}{100}$

b) Faire de même avec $Q_m(x)$ le polynôme de Taylor de degré m de la fonction $f(x) = \cos x$ autour de $\bar{x} = 0$.

c) Calculer $P_n^2(1) + Q_m^2(1)$. Que peut-on dire de l'erreur commise ?

4. Dire pour quelles valeurs de x les séries entières suivantes convergent:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^2+n+5}{5^n} x^n$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1^2+2^2+\ldots+n^2} x^n$

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^{n^b} x^n,\ a>0,\ b \in Q_+^*$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\dfrac{x}{n}\right)^n$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$

5 . Soit la fonction $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, où $x \in (-R,R)$. R étant le rayon de convergence de la série entière, que l'on supposera strictement positif. Supposons en outre que $g(0) = 0$ et qu'il existe une suite $(x_n) \downarrow 0$ telle que $g(x_n) = 0$. Montrer que g est identiquement nulle.

tend vers 0 de manière décroissante

RAPPEL : N'oubliez pas le TEST du 20 janvier de 10h15 à 12h00

Sujet: : Toute la matière contenue dans les séries 1 à 10 (y compris)

EPFL
Dépt. de Mathématiques
Prof. B. Zwahlen

Sections :**EPFL** : Math,Phys.
UNIL : Math,Phys.
HEC(Actuaires)

ANALYSE I	**Série 12**	**le 20 janvier 1997**

1. Déterminer le développement en série entière de $f(x) = \ln(1+x)$ et calculer son rayon de convergence.

2. Soit $f: IR \to IR$ définie par $f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$.

a) Calculer $f^{(n)}(x)$ et notamment $f^{(n)}(0)$ et montrer que $f \in C^\infty(IR)$.
b) Peut-on développer $f(x)$ en une série entière?

3. Trouver la série entière $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ telle que les trois conditions suivantes soient satisfaites:
i) $y(0) = 2$; ii) $y'(0) = 0$; iii) $y''(x) = y(x)$.

4. Vérifier l'égalité $th(x+y) = \dfrac{thx + thy}{1 + thx \cdot thy}$.

5. a) Donner une expression explicite pour la fonction hyperbolique réciproque Argth(x).
b) A partir du résultat trouvé au point a), développer Argth(x) en série entière.

6. Calculer les limites suivantes:

a) $\lim_{x\to 0_+} x^{\sin x}$; b) $\lim_{x\to\infty} (Logx)^{\frac{1}{x}}$;

c) $\lim_{x\to 0_\pm} f(x)$ et $\lim_{x\to\infty} f(x)$ avec $f(x) = (e^{3x} - 5x)^{\frac{1}{x}}$.

$e^0 = 1$ $\quad e^{\frac{1}{x}\cdot \ln(e^{3x}-5)} \Rightarrow \ln(e^{3x}-5)' = \dfrac{3\cdot e^{3x}-5}{e^{3x}-5} \xrightarrow{x\to\infty} 3 \xrightarrow{\lim} e^3$

7. Pour les fonctions $f:]0,\infty[\to IR$ données ci-dessous, calculer la dérivée de f et $\lim_{x\to 0_+} f(x)$:

a) $f(x) = x^x$; b) $f(x) = (x^x)^x$; c) $f(x) = x^{(x^x)}$.

$= x^{x^2}$

RAPPEL Introduction à l'utilisation du logiciel *Mathematica*
(du 6 janvier au 5 février, le lundi et le mercredi entre 10^{00} - 13^{00} dans la salle **CO5**)

EPFL
Dépt. de Mathématiques
Prof. B. Zwahlen

Sections : **EPFL** : Math,Phys.
UNIL : Math,Phys.
HEC(Actuaires)

ANALYSE I	**Série 13**	**le 3 février 1997**

1. Calculer, à l'aide de la définition, les intégrales définies suivantes:

a) $\int_a^b dx$, b) $\int_a^b x^2\, dx$

pour $a,b \in IR$ et $a<b$.

2. Calculer les intégrales indéfinies suivantes:

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$ $(a>0)$; b) $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+1}}$;

$\varphi(t)=x=a\cdot sh(t)$

$\varphi^{-1}(t)=t=\sqrt{x+1}$
$\varphi(t)=t^2-1=x$
$\varphi'(t)=2t$

c) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx$.

$t=\sqrt{e^x+1}=\varphi^{-1}(t)$
$\varphi(t)=x=\ln(t^2-1)$
$\varphi'(t)=$

3. Calculer les intégrales indéfinies suivantes:

a) $\int x^2 2^x dx$; b) $\int (4x^3+2x)\ln x\, dx$;

$\rightarrow$ polynôme $\Rightarrow$ int. par parties

c) $\int (x^2+2x)e^x dx$.

int. par parties

(intégration par parties)

4. a) Estimer l'intégrale $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{10+6\sin x}}$.

b) Trouver la valeur moyenne de la fonction $f(x)=\sin x$ *sur* $[0,2\pi]$. $\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,dx$

5. Calculer les intégrales définies suivantes:

a) $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx$ $(a>0)$; b) $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}dx$;

$x=a\cdot\sin t$

$\varphi^{-1}(t)=t=\ln(x)$, $\varphi(t)=x=e^t$

c) $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$. par parties

6. Soit la suite (x_n) définie par $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ *et* $x_0=0$.

Montrer que la suite (x_n) est convergente et calculer sa limite.

7. Soit $f: IR \rightarrow IR$ une fonction continue et périodique. Montrer que pour tout $a\in IR$:

$\int_0^T f(t)\,dt=\int_a^{a+T} f(t)\,dt$, où T est la période de la fonction f.

EPFL
Dépt. de Mathématiques
Prof. B. Zwahlen

Sections :**EPFL** : Math,Phys.
UNIL : Math,Phys.
HEC(Actuaires)

ANALYSE I	**Série 14**	**le 10 mars 1997**

1. Calculer les intégrales indéfinies suivantes:

✓ a) $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x-1)(x^2-4)}\,dx$; $\approx x - \frac{1}{3}\ln|x-1| + 2\ln|x-2| - \frac{2}{3}\ln|x+2| + c$ b) ✓ $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^4-x^3}\,dx$;

× c) $\displaystyle\int \frac{x^3-x}{(x^2+1)^2}\,dx$.

2. Calculer les intégrales indéfinies suivantes:

✓ a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}\right)}$; b) ✓ $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$; idée : avec ch.var : $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$

× c) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{6x-x^2}}\,dx$.

3. Calculer les intégrales indéfinies suivantes:

a) ✓ $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$; b) ✓ $\displaystyle\int \frac{\cos x}{4+\sin^2 x}\,dx$; $\varphi(t) = \arcsin(t) = x$; $\varphi^{-1}(x) = \sin(x) = t$

c.f. degrés

c) ✓ $\displaystyle\int \sin^2 x \cdot \cos^5 x\,dx$; × d) ✓ $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$; $= \displaystyle\int \frac{(1-\sin^2 x)\cdot\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$

c.f. degrés

× e) $\displaystyle\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x\,dx$.

$\frac{dt}{dx} \longrightarrow \varphi^{-1}(x) = t = \sin(x)$
$\varphi(t) = x = \arcsin(t)$
$\frac{dx}{dt}$

4. Calculer les intégrales définies suivantes:

a) ✓ $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{tgx}{1+tg^2x}\,dx$; $1+tg^2x = \frac{1}{\cos^2(x)}$ b) ✓ $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx$; $\left(\mathrm{cosec}(x) - \frac{1}{3}\mathrm{cosec}^3(x) + c\right)\Big|_{\pi/6}^{\pi/2}$

c) ✓ $\displaystyle\int_1^e x^3 Log\left(x^2\right)dx$.

5. Calculer $\displaystyle I_n = \int_0^{\pi/4} tg^n x\,dx$ pour $n \in IN$.

En déduire que $\displaystyle\frac{\pi}{4} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{2k+1}$ et que $\displaystyle\ln 2 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$.

EPFL
Dépt. de Mathématiques
Prof. B. Zwahlen

Sections : **EPFL** : Math,Phys.
UNIL : Math,Phys.
HEC(Actuaires)

ANALYSE I **Série 15** **le 17 mars 1997**

1. a) Calculer l'aire du domaine commun à l'intérieur de la parabole d'équation $y^2 = 2x$ et du cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$.

b) Calculer l'aire du domaine limité par l'ellipse d'équation paramétrique:

$$x = a\cos t; \quad y = b\sin t; \quad 0 \le t \le 2\pi, \quad a,b > 0.$$

c) Calculer l'aire du domaine limité par la cardioïde d'équation polaire:

$$\rho = a(1+\cos\varphi), \quad a > 0.$$

2. a) Calculer la longueur de l'arc de la chaînette d'équation $y = chx$ compris entre les points d'abscisses $x = 0$ et $x = 1$.

b) Calculer la longueur d'une arche de cycloïde d'équation paramétrique:

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \le t \le 2\pi, \quad a > 0.$$

c) Calculer la longueur d'arc de la cardioïde d'équation polaire:

$$\rho = a(1 - \cos\varphi), \quad a > 0.$$

3. Soit Ω un cône circulaire droit de révolution.

a) Calculer la surface latérale de Ω.

b) Calculer le volume de Ω.

$\boxed{\textbf{4.}}$ On considère l'astroïde d'équation paramétrique:

$$x(t) = a\cos^3 t, \quad y(t) = a\sin^3 t, \quad 0 \le t \le 2\pi, \quad a > 0.$$

a) Calculer sa longueur d'arc.

b) Calculer l'aire enfermée.

xx c) Calculer la surface latérale ainsi que le volume du corps engendré par la rotation de
éq. paramètre? l'arc d'astroïde décrit lorsque t varie de 0 à π, autour de l'axe Ox.

5. Calculer la longueur d'arc de l'ellipse d'équation paramétrique:

$$x = a\cos t; \quad y = b\sin t; \quad 0 \le t \le 2\pi, \quad 0 < b < a.$$

RAPPEL: N'oubliez pas le Travail écrit du 07.04.1997 de 10h15 à 12h00
dans la salle CO1
Sujet: Toute la matière contenue dans les séries 11 à 15 (y compris)

EPFL
Dépt de Mathématiques
Prof. B. Zwahlen

Sections: **EPFL** : Math, Phys.
UNIL: Math, Phys, HEC (Actuaires)

ANALYSE II **Série 16** **le 2 avril 1997**

1. Etudier la convergence des intégrales généralisées.

i) $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{dx}{\operatorname{Log} x}$ ii) $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2}$

iii) $\displaystyle\int_{1+}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4-1}}$ iv) $\displaystyle\int_{0+}^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}dx$

2. Soient les deux intégrales généralisées

$\boxed{\text{i)}}$ $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ $<\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x\sqrt{x^2}}$ ii) $\displaystyle\int_{0}^{1-} \frac{x\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}$.

a) Etudier la convergence à l'aide du critère de comparaison.

b) Le cas échéant, calculer leurs valeurs.

3. Discuter la convergence de la fonction (fonction gamma)

$$x \mapsto \Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt \ , \ x \geq 0.$$

Etablir une relation de récurrence entre $\Gamma(x)$ et $\Gamma(x+1)$.

4. a) Soit $f \in C^1([a,\infty], I\!R)$ telle que $\displaystyle\int_a^{\infty} |f'(x)|dx$ existe et que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\sin x \ dx$ converge.

b) En déduire que $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ converge.

c) Montrer que $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}dx$ diverge.

5. Discuter la convergence des séries suivantes.

i) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(Log\ n)^{1+\alpha}}$, $\alpha \geq 0$

8.40 $\boxed{\text{ii)}}$ $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n\ Log\ n\ (Log(Log\ n))^{1+\alpha}}$, $\alpha \geq 0$

EPFL
Dépt de Mathématiques
Prof. B. Zwahlen

Sections: **EPFL :** Math, Phys.
UNIL: Math, Phys, HEC (Actuaires)

ANALYSE II **Série 17** **le 14 avril 1997**

1. Déterminer la solution des équations différentielles suivantes et préciser leur intervalle de validité. (éq. à variables séparées)

i) $u^2(t)\ u'(t) - sh(t) = 0$ $\qquad u(0) = \sqrt[3]{2}$

$\boxed{\text{ii)}}$ $u(t)\ u'(t) + (1+u^2(t))\ \sin t = 0$ $\qquad u(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{e-1}$

iii) $t\ u'(t) = t\ \exp\left(-\frac{u(t)}{t}\right) + u(t)$ $\qquad u(1) = 0$

éq. homogène. $u(t) = t \cdot v(t)$

2. Etablir la solution générale des équations différentielles linéaires suivantes.

i) $t\ u'(t) - 2u(t) = t^5 \quad , \quad t > 0$

$\boxed{\text{ii)}}$ $u'(t) + \tan t\ u(t) = \dfrac{1}{\cos t} \quad , \quad t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

iii) $u'(t) + u(t) = \dfrac{e^{-t}}{1+t^2} + t$

3. Déterminer les solutions de l'équation différentielle.

$$t(1+t^2)\ u'(t) - (t^2-1)\ u(t) + 2t = 0$$

Existe-t-il des solutions qui sont définies sur tout $I\!R$?

4. Soit l'équation différentielle:

$$u'(t) = (u(t))^{\frac{2}{3}}$$

Montrer qu'il existe une infinité de solutions pour $t \in [0,a]$, $a > 0$, qui satisfont la condition $u(0) = 0$.

EPFL
Dépt de Mathématiques
Prof. B. Zwahlen

Sections: **EPFL :** Math, Phys.
UNIL: Math, Phys, HEC (Actuaires)

ANALYSE II | **Série 18** | **le 21 avril 1997**

---

1. Déterminer la solution générale des équations différentielles linéaires suivantes sans employer la méthode de variation des constantes.

i) $u''(t) + u'(t) + u(t) = t^3 + 3t^2 + 6t + 1$

ii) $u''(t) + 2u'(t) + 3u(t) = (t+1)e^t$

iii) $u''(t) + 2u'(t) + u(t) = e^{-t}$

iv) $u''(t) - 2u'(t) + u(t) = 2sht$

2. Trouver la solution générale des équations différentielles linéaires suivantes.

$v(t) = u'(t)$

i) $t^2u''(t) + tu'(t) - u(t) = t^2 Log\ t \quad , t > 0$

9.52 ii) $t^2u''(t) + tu'(t) = Log^2 t \quad , t > 0$

iii) $t^2u''(t) + 4tu'(t) + (2-t^2)u(t) = t+1 \quad , t > 0$ indic : substitution :

9.45 iv) $(t^2+1)u''(t) - 2tu'(t) + 2u(t) = 6(t^2+1)^2$ indication : $v_1(t) = t$ est une solution de l'éq. sans second membre.

3. Trouver en fonction du paramètre réel a la solution générale de l'équation différentielle.

$$u''(t) + 2u'(t) + a\ u(t) = e^t$$

4. Soient $c, \omega > 0$, $b \geq 0$ et $A_0 \in IR$. On considère l'équation différentielle

$$u''(t) + 2b\ u'(t) + c\ u(t) = A_0 \cos(\omega t)$$

ainsi qu'une solution de la forme: $A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$.

a) Déterminer la phase et l'amplitude de la solution et discuter l'amplitude comme fonction de ω. On distinguera les cas où $b > 0$ et $b = 0$.

b) Dans ce second cas, établir la solution à la résonance.

5. Soit I un intervalle ouvert non vide de IR, $p, q \in C(I, IR)$ et $v_1, v_2 : I \to IR$ deux solutions de l'équation différentielle

$$u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) = 0$$

Montrer que pour tout $t \in I$:

$$W[v_1, v_2](t) = W[v_1, v_2](t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} p(s)ds\right)$$

où t_0 est un élément quelconque de I.

EPFL
Dépt de Mathématiques
Prof. B. Zwahlen

Sections: **EPFL :** Math, Phys.
UNIL: Math, Phys, HEC (Actuaires)

ANALYSE II — **Série 19** — **le 28 avril 1997**

$\|u - u_k\| = \sqrt{(u_1 - x_k)^2 + (u_2 - y_k)^2 + (u_3 - z_k)^2}$

1. Soit la suite $\left(u_k = (x_k, y_k, z_k)\right)_{k\geq 1}$ dans IR^3 définie par

$$x_k = \sin\left(\frac{1}{k}\right) \quad , \quad y_k = \cos\left(\frac{1}{k}\right) \quad , \quad z_k = (-1)^k Arctgk$$

a) Montrer qu'il existe une sous-suite convergente.
b) Caractériser les sous-suites qui convergent.

2. Déterminer si les ensembles suivants sont ouverts, fermés ou s'ils n'admettent aucune de ces deux propriétés.

a) dans IR.
- i) $E = \left]-\infty, 1\right[$
- ii) $E = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in IN^*\right\}$
- iii) $E = \bigcup_{n\in IN^*} \left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[$

b) dans IR^2.
- i) $E = \left]-\infty, 1\right[\times \{0\}$
- ii) $E = \left\{(x_1, x_2) \in IR^2 \mid x_1 \in [-1;1] \;,\; x_2 \leq x_1 \right\}$
- iii) $E = \bigcap_{n\in IN^*} B\left(0\;; 1 + \frac{1}{n}\right)$

3. Soit l'ensemble $E = \left\{(x_1, x_2) \in IR^2 \;\middle|\; x_2 \neq 0 \;,\; x_1 = \sin\left(\frac{1}{x_2}\right)\right\}$.
Trouver son intérieur, son adhérence et son bord. Ces ensembles sont-ils connexes par arcs?

4. Soit un ensemble. Déterminer $\mathring{E}$, ∂E et $\overline{E}$ dans les deux cas suivants.
- i) $E = Q \times Q \times IR$
- ii) $E = \left\{\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right) \mid m,\; n \;\in\; IN^*\right\}$

5. Soit (x_k) une suite dans IR^n. On lui associe l'ensemble $E = \{x_k\}$. Déterminer l'intérieur, le bord et l'adhérence de E.

→ fermé et borné. → le plus petit ensemble qui contient E

1116 **6.** Soit E un sous-ensemble compact de IR^n. Montrer que l'adhérence de tout sous-ensemble non vide de E est compacte.

A un ss-ens., alors : adhérence de A est $\bar{A}$. ⇒ on montre que $\bar{A}$ fermé et borné

EPFL
Dépt de Mathématiques
Prof. B. Zwahlen

Sections: **EPFL :** Math, Phys.
UNIL: Math, Phys, HEC (Actuaires)

ANALYSE II **Série 20** **le 5 mai 1997**

1. Pour chacune des fonctions suivantes définies sur $IR^2 - \{(0;0)\}$, déterminer si $\lim_{(x,y)\to(0;0)} f(x,y)$ existe ou non. Le cas échéant, calculer cette limite.

i) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ ii) $f(x,y) = \dfrac{(y^2-x)^2}{x^2+y^4}$ iii) $f(x,y) = \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$

12.2 **2.** Soit $f : IR^2 \to IR$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^2\cos(\frac{1}{x})\cos(\frac{1}{y}) & si \quad xy \neq 0 \\ 0 & si \quad xy = 0 \end{cases}$$

Montrer que $\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y))$ et $\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y))$ n'existent pas, mais que $\lim_{(x,y)\to(0;0)} f(x,y) = 0$.

3. Etudier la continuité des fonctions $f : IR^2 \to IR$ définies par:

méthodes : — chemins
— ε, δ

i) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(3x-y^2)^2} & si \quad (x,y) \neq (0;0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0;0) \end{cases}$$

ii) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0;0) \\ 1/2 & si \quad (x,y) = (0;0) \end{cases}$$

(utiliser le D.L. de cos x)

$\boxed{4.}$ Soit $f : IR^2 \to IR$ la fonction définie par:

$$f(x,y) = \begin{cases} \left|Arctg\dfrac{1}{xy}\right| & si \quad xy \neq 0 \\ \pi/2 & si \quad xy = 0 \end{cases}$$

Représenter quelques courbes de niveau. Etudier la continuité de f et calculer ses dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

fermé et borné

5. Soit E un sous-ensemble compact de IR^n et $f : E \to IR$ une fonction continue. Montrer que $Im f$ est un sous-ensemble compact de IR.

indication : E compact ⟺ de toute suite dans E on peut extraire une sous-suite qui converge

EPFL
Dépt de Mathématiques
Prof. B. Zwahlen

Sections: **EPFL :** Math, Phys.
UNIL: Math, Phys, HEC (Actuaires)

ANALYSE II **Série 21** **le 12 mai 1997**

1. Soit $f : IR^2 \to IR$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & si \ (x,y) \neq (0;0) \\ 0 & si \ (x,y) = (0;0) \end{cases}$$

Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0;0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0;0)$.

$\Rightarrow$ les dérivées secondes ne commutent pas
$\Rightarrow$ les dérivées secondes ne sont pas continues

2. Soit $f : IR^2 \to IR$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|^\alpha}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & si \ (x,y) \neq (0;0) \\ 0 & si \ (x,y) = (0;0) \end{cases}$$

continue (les dérivées),
$\Rightarrow$ $\lim_{(x,y)\to 0} f(x,y) = 0$

Déterminer α de telle sorte que f soit de classe $C^1(IR^2, IR)$.

3. Déterminer les points stationnaires et leurs natures pour les fonctions de deux variables suivantes.

i)	$f(x,y) = 7xy - 2x^2y - 3xy^2$	$D(f) = IR^2$
ii)	$f(x,y) = \cos y - x^2 + 2x\sin y + 3$	$D(f) = IR^2$
iii)	$f(x,y) = y\sin(e^x)$	$D(f) = \overline{B((0;0),2)}$

4. Soit $(x,y) \mapsto f(x,y)$. Etablir le développement limité d'ordre 3 autour de (a,b).

5. Soit $f : IR^2 \to IR$ la fonction définie par $f(x,y) = \sin x \sin y$.

Montrer que $f(x,y) = P(x,y) + r_6(x,y)$ au voisinage de $(0;0)$, où P est un polynôme de degré ~~6~~ 4 et $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{r_{\cancel{6}\,4}(x,y)}{(x^2+y^2)^{\cancel{3}\,2}} = 0$.

6. Trouver l'équation du plan tangent au graphe de f en $(a,b,c{=}f(a,b))$.

EPFL
Dépt. de Mathématiques
Prof. B. Zwahlen

Sections : **EPFL :** Math, Phys.
UNIL : Math, Phys.
HEC (Actuaires)

ANALYSE II	**Série 22**	**le 21 mai 1997**

1. Déterminer les points stationnaires et les extrema des fonctions de trois variables:

3 variables

a) $$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z \; ;$$

b) $$f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}, \qquad (x>0,\ y>0,\ z>0).$$

indication: ne pas calculer les v.p. de la Hessienne, mais déterminer leur signe.

2. a) Trouver les extrema de la fonction $f : IR^2 \to IR$, définie par

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

sous la condition $x + y = 1$.

b) Donner deux interprétations géométriques pour ce problème (dans IR^2 et dans IR^3).

$\boxed{3}$. Trouver les extrema de la fonction: $f : IR^2 \to IR$,

$$f(x,y) = \sin x + \sin y$$

sous la condition $x + y = \dfrac{\pi}{2}$.

4. Trouver les extrema de la fonction: $f : IR^3 \to IR$,

$$f(x,y,z) = x - 2y + 2z$$

sous la condition $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

EPFL
Dépt. de Mathématiques
Prof. B. Zwahlen

Sections : **EPFL :** Math, Phys.
UNIL : Math, Phys.
HEC (Actuaires)

ANALYSE II	**Série 23**	**le 26 mai 1997**

1. Trouver les extrema de la fonction $f: IR^3 \to IR$ définie par
$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \ ,$$
sous les deux conditions $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$ et $xyz = 1$.

2. Trouver les extrema de la fonction $f: IR^3 \to IR$ définie par
$$f(x,y,z) = x + y + z \ ,$$
sous les deux conditions: $(x-4) + 2(y-2) + 3(z-3) = 0$,
et $(x-4)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1$.

3. Soit $(x,y) \to f(x,y)$ la fonction
$$f(x,y) = x^5 - 5xy + y^5 \ ,$$
et E l'ensemble $E = \{(x,y) \in IR^2 \mid f(x,y) = 0\}$.
Pour quels points $(x,y) \in E$ peut-on appliquer le théorème de la fonction implicite?

4. Calculer la dérivée $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ de la fonction $x \to y = \varphi(x)$ implicitement définie par l'équation:

a) $x^2 y + 3y^3 x^4 = 4$, au point $x = 1$;
b) $x^2 + y^2 = R^2$;
c) $e^x \sin y + e^y \sin x = 1$;
d) $e^{xy} + \alpha x^2 + y^2 = 2$, au point $x = 0$.

5. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ de la fonction $(x,y) \to z = \varphi(x,y)$ implicitement définie par l'équation:

a) $x^2 - xz + z^2 + yz = 4$, au point $x = 1, \ y = 3$;
b) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;
c) $x^2 + 3xy - 2y^2 + 3xz + z^2 = 0$;
d) $x\cos y + y\cos z + z\cos x = 1$.

6. Montrer que si le théorème des fonctions implicites peut être appliqué à l'équation $f(x,y,z) = 0$ pour n'importe quelle variable x, y, z, alors
$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) = -1 \ ,$$
où $x = u(y,z), \ y = v(x,z), \ z = w(x,y)$.

Rappel: N'oubliez pas le Travail écrit du 2 juin 1997 de 10h15 à 12h00.
Sujet : Fonctions de plusieurs variables : continuité, dérivées partielles, points stationnaires et leurs natures, extrema liés.

EPFL
Dépt. de Mathématiques
Prof. B. Zwahlen

Sections : **EPFL :** Math, Phys.
UNIL : Math, Phys.
HEC (Actuaires)

ANALYSE II	Série 24	le 4 juin 1997

1. Pour $(x,y) \in IR^2$, résoudre la forme différentielle exacte

$$y^2\cos(xy)dx + (\sin(xy) + xy\cos(xy))dy = 0 \ .$$

$\boxed{2}$. a) Trouver toutes les fonctions $f : IR \to IR$ de classe C^1 de sorte que la forme différentielle

$$(y^2+1)\sin x dx + f(x)ydy = 0$$

soit exacte.

b) Parmi ces fonctions, déterminer celle qui satisfait $f(0) = -1$.

c) Pour cette fonction particulière, trouver la solution qui vérifie la condition initiale $y(0) = -1$.

3. Résoudre la forme différentielle:

$$xy(x+2)dx + x^2dy = 0 \ .$$

$Y = \dfrac{\alpha}{x^2 \cdot e^x}$

4. Pour $(x,y) \in]-\infty,+\infty[\times]0,+\infty[$, résoudre la forme différentielle

$$x\left(2\sqrt{x^2+y^2}+1\right)dx + ydy = 0$$

au moyen d'un facteur intégrant fonction de x^2+y^2. On pose $z = f(x^2+y^2)$

EPFL
Dépt. de Mathématiques
Prof. B. Zwahlen

Sections : **EPFL :** Math, Phys.
UNIL : Math, Phys.
HEC (Actuaires)

ANALYSE II	**Série 25**	**le 9 juin 1997**

1. Résoudre les formes différentielles suivantes :

a) $\left(-y^3+xy^2+x^2y\right)dx+x\left(y^2+xy-x^2\right)dy=0$

au moyen d'un facteur intégrant fonction de xy;

$\boxed{\text{b)}}$ $(x+y)dx+(y-x)dy=0$, où $x>0$ et $y>0$,

au moyen d'un facteur intégrant fonction de x^2+y^2.

2. Soit $F(x)=\int_{x^2}^{\sin x}\frac{Log(1+xy)}{1+y^2}dy$. Calculer $\frac{dF(x)}{dx}$.

$\boxed{\text{3.}}$ Soit $F(x)=\int_0^{\pi}x^n\cos(x\cos y)\sin^{2n}y\,dy$. Montrer que F satisfait l'équation différentielle

$$x^2u''(x)+xu'(x)+\left(x^2-n^2\right)u(x)=0.$$

4. Calculer les intégrales doubles suivantes :

a) $\iint_D\left(5x^2-2xy\right)dxdy$ où $D=\left\{(x,y)\in IR^2:\ 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1-\frac{x}{2}\right\}$;

b) $\iint_D xydxdy$ où $D=\left\{(x,y)\in IR^2:\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ x^2+y^2\le 1\right\}$;

c) $\iint_D\frac{x}{y}dxdy$ où $D=\left\{(x,y)\in IR^2:\ 2\le x\le 4,\ 1\le y\le x^2\right\}$; $28\cdot\ln(2)-6$

d) $\iint_D(4-x-y)dxdy$ où D est l'intérieur du triangle de sommets $(0,0)$, $(2,2)$, $(1,3)$.

$\frac{8}{3}$

EPFL
Dépt. de Mathématiques
Prof. B. Zwahlen

Sections : **EPFL** : Math, Phys.
UNIL : Math, Phys.
HEC (Actuaires)

ANALYSE II	**Série 26**	**le 16 juin 1997**

1. Calculer les intégrales doubles suivantes :

a) $\iint_\Omega \cos(x^2+y^2)dxdy$ où $\overline{\Omega}=\{(x,y)\in IR^2 : y\geq 0,\ x^2+y^2\leq 1\}$;

b) $\iint_\Omega \frac{\sin(x^2+y^2)}{2+\cos(x^2+y^2)}dxdy$ où $\overline{\Omega}=\{(x,y)\in IR^2 : 1\leq x^2+y^2\leq 4\}$;

c) $\iint_\Omega ydxdy$ où $\overline{\Omega}=\left\{(x,y)\in IR^2 : y\geq 0,\ \left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2\leq\left(\frac{a}{2}\right)^2\right\}$;

d) $\iint_\Omega \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy$ où $\overline{\Omega}=\left\{(x,y)\in IR^2 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1\right\}$.

2. Soit $\overline{\Omega}=\left\{(x,y)\in IR^2 : x\geq 0,\ y\geq 0,\ \frac{1}{2}\leq x+y\leq 1\right\}$. En effectuant le changement de variables

$$x=\frac{1}{2}(u+v) \quad \text{et} \quad y=\frac{1}{2}(u-v)\ , \qquad \text{calculer} \qquad \iint_\Omega e^{\left(\frac{x-y}{x+y}\right)}dxdy\ .$$

Jacobien : dérivées.

3. Calculer les intégrales triples suivantes :

a) $\iiint_\Omega \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^2}$ où $\overline{\Omega}=\{(x,y,z)\in IR^3 : x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0, x+y+z\leq 1\}$;

b) $\iiint_\Omega zdxdydz$ où $\overline{\Omega}=\{(x,y,z)\in IR^3 : 0\leq z,\ x^2+y^2\leq 1,\ x^2+y^2+z^2\leq 4\}$;

c) $\iiint_\Omega \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ où $\overline{\Omega}=\{(x,y,z)\in IR^3 : 1\leq x^2+y^2+z^2\leq 4\}$.

Heures de présence : 19-20 juin et 23-27 juin, 10h15-12h00, DMA 2-ème étage.

Nicolas Georgy	bureau 585	tél. 4986
Denis Groux	bureau 585	tél. 4986
Jerzy Michalski	bureau 604	tél. 4984
Camil Petrescu	bureau 594	tél. 4989

François

JUILLET 1990

~~1.~~ a) Etudier la convergence des suites (x_n) et (y_n) définies par:

$$x_0 = y_0 = 1,$$

$$x_{n+1} = \operatorname{ch}(x_n\, y_n) - \operatorname{sh}(x_n\, y_n)\,, \quad n \geq 0,$$

$$\frac{y_{n+1}}{\operatorname{ch}(x_n\, y_n)} = 1 + \operatorname{th}(x_n\, y_n)\,, \quad n \geq 0.$$

~~b)~~ Etudier en fonction des nombres entiers p, q ≥ 1 la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p + 1}{n^q + 1}\,.$$

2 points $\boxed{}$

~~2.~~ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \int_0^x t\, e^{xt^2}\, dt\,.$$

~~a)~~ Calculer le développement limité d'ordre 6 de f autour de a=0.

b) Montrer que f n'admet que deux points stationnaires.

c) La fonction f admet-elle des extréma globaux ?

2 points $\boxed{}$

JUILLET 1990

~~3.~~ Pour l'équation différentielle suivante

$$u'(t) + u(t) \sin t + [u(t)]^3 \sin t = 0 ,$$

Bernoulli :
$u'(t) + \sin(t) \cdot u(t) = -\sin t \cdot u^3(t)$

trouver la solution vérifiant $u(0) = (e-1)^{-1/2}$ et déterminer son domaine maximal de définition.

2 points

~~4.~~ Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = x^2 + 3\,y^2 .$$

Déterminer les extréma de f dans l'ensemble $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{(x-1)^2}{9} + y^2 \leq 1 \}$.

2 points

5. Etudier en fonction du nombre réel α la convergence de l'intégrale généralisée

pas certain que ce soit juste

$$\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{Arctg}\,(x-1)}{(x^2-1)^{\alpha}}\, dx$$

2 points

SEPTEMBRE 1994

~~1a.~~ Déterminer les nombres réels α, β, γ tels que

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 0$$

$$x_n = \sqrt{n^4 - 2n^2 + 7n + 1} - (\alpha n^2 + \beta n + \gamma).$$

~~1b.~~ Soit la suite $(a_k)_{k \geq 0}$,

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1$$
$$a_k = a_{k-1} + a_{k-2}, \quad k \geq 2$$
$$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

- Montrer que $a_{k+1} > a_k, \quad k = 2,3,4,\ldots$ par récurrence.
- Montrer que la série $s(x)$ converge pour $|x| < \frac{1}{2}$.
- Déterminer α de sorte que $s(x) = \frac{\alpha x}{1 - x - x^2}$, $|x| < \frac{1}{2}$.

~~2.~~ Soit la fonction

$$f : D = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \geq \frac{1}{2} \right\} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \int_1^x \frac{(xt^2 - 1)^{1/3}}{t}\, dt.$$

$\hookrightarrow f(x) \neq f(x,y)$

il suffit de calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\Rightarrow$ une dimension.

Etudier la fonction f, en particulier :

a) Calculer la dérivée de f et trouver les points stationnaires.

b) Trouver les asymptotes.

c) Esquisser la fonction.

SEPTEMBRE 1994

~~3.~~ Soit la forme différentielle

$$\left(\sin x - x\cos x - 3x^2(y-x)^2\right)dx + 3x^2(y-x)^2\,dy = 0..$$

~~a)~~ Trouver un facteur intégrant.

b) Trouver les solutions.

comment intégrer

$\frac{\sin t}{t^2}$, $\frac{\cos t}{t}$: on ne peut pas.

~~4.~~ Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^{xy}, & x^2+y^2>0 \\ 1 \quad , & x=y=0. \end{cases}$$

~~a)~~ Etudier la continuité de f.

b) Trouver les extrema de f dans $\overline{B((0,0),1)} = \left\{(x,y) \middle| x^2+y^2 \leq 1\right\}$. $= \epsilon$

~~5.~~ Soient $0<\alpha<1$ et $f(x,y) = 1+\cos(x-\alpha y)\sin y$.

Calculer $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy$. $A = b \cdot h = 1 \cdot 1 = 1 \;\forall \alpha.$

$\overline{\Omega}$ est l'intérieur et le bord du parallélogramme de sommets $(0,0),(\alpha,1)(1+\alpha,1),(1,0)$.

~~1~~. Soit $g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-\sin(\frac{\pi}{2}x))^k$.

~~a)~~ déterminer le domaine de définition de g (domaine de convergence de la série).

~~b)~~ calculer g explicitement.

c) donner un intervalle $[\alpha,\beta]$ contenu dans $[0,1]$ tel que

$$g([\alpha,\beta])\subset[\alpha,\beta]$$

g est une contraction sur $[\alpha,\beta]$

$$\beta-\alpha>\frac{1}{2}.$$

~~2~~. a) Trouver le développement limité d'ordre 4 de $f(u)=\dfrac{2}{1+e^u}$ autour de 0.

b) Trouver le développement limité d'ordre 5 de $F(x)$ autour de 0

$$F(x)=\int_0^{\sin x}\frac{2}{1+e^{t\cdot x}}dt.$$

intègre ⇒ degré + 1 ⇒ ordre 5

$$F(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + f''(0)\cdot\frac{x^2}{2} + f'''(0)\frac{x^3}{6} + f^{(4)}(0)\frac{x^4}{24} + f^{(5)}(0)\frac{x^5}{120}$$

~~3~~. Soit l'équation différentielle

$$u''(t)+\gamma u'(t)-\frac{u(t)}{f(t)}=0 \qquad \text{où } \gamma\in IR^*$$

a) Trouver toutes les fonctions $f(t)$ telles que $v(t)=e^{\gamma t}\cdot f(t)$ soit une solution de l'équation différentielle.

insère ds l'équadiff et résoud par rapport à f.

b) En particulier, poser $\underbrace{f(t)=\frac{1}{2\gamma^2}(e^{-2\gamma t}+1)}_{\text{immédiat}}$ et résoudre l'équation différentielle.

JUILLET '95

~~5~~. Calculer $\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dxdy$ dans les cas suivants:

a) $\overline{D} = \overline{D}_1$

déjà calculé

b) $\overline{D} = \overline{D}_1 \cup \overline{D}_2 \quad = \iint_{D_1} + \iint_{D_2}$

$\overline{D}_1 = \{(x,y) \mid x^2+y^2-2x \leq 0,\ 1 \leq x\}$ $\quad x = 1 + r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$\Rightarrow (x-1)^2 + y^2 - 1 = 0$

$\overline{D}_2 = \{(x,y) \mid x^2+y^2-2y \leq 0,\ 0 \leq x,\ 1 \leq y\}.$

l'intersection est vide

$\overline{D}_1 = \{(x,y) \mid (x-1)^2 + y^2 - 1 = 0\}$

$\overline{D}_2 = \{(x,y) \mid (y-1)^2 + x^2 - 1 = 0\}$

4. Soit $f: \mathrm{IR}^2 \to \mathrm{IR},\ f(x,y) = e^{xy} + x^2 + \lambda y^2,\ \lambda > 0,\ \lambda \neq \frac{1}{4}.$

~~a)~~ Montrer que (0,0) est un point stationnaire et étudier sa nature en fonction de λ.

comment les trouver ?

b) Trouver tous les autres points stationnaires et étudier leur nature en fonction de λ.

c) Les extrema locaux trouvés sont-ils des extrema globaux si $\lambda > \frac{1}{4}$?

SEPTEMBRE 1995

1 . ~~a)~~ Soit la fonction

$$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \left(1 + \alpha x^2 \sin \beta x\right)^{1/x^3},$$
$$\alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ donnés.}$$

Peut-on prolonger la fonction f par continuité sur tout $\mathbb{R}$?

Justifier la réponse.

b) Soit la fonction

3-ème cas:
$\beta \neq 0$, $\alpha = 0$.

$$g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto g(x) = \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} + \alpha |x|}{\sqrt{x^2 + \beta \left|\cos \frac{1}{x}\right|}}.$$

Pour quelles valeurs réelles α et β peut-on prolonger la fonction g par continuité en $x = 0$?

$g(0) = ?$

Justifier la réponse.

~~2.~~ Soit l'équation différentielle

$$u''(t) - 2tu'(t) + u(t) = 0.$$

a) Trouver les relations que doivent satisfaire les coefficients de la série entière

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$$

de sorte que $u(t)$ soit une solution de cette équation différentielle.

b) Déterminer les coefficients a_k pour la condition initiale $u(0) = 1, u'(0) = 0$.

Trouver le rayon de convergence de cette série.

$u(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$
$u'(0) = 0 \Rightarrow a_1 = 0$

SEPTEMBRE 1995

~~2~~. a) Résoudre la forme différentielle

$$\left(3x^2+y\right)dx+\left(2x^2y+2y^2+1\right)xdy=0.$$

$\mu(x,y) = e^{y^2-y_0^2}$

b) Même problème pour

$$ydx = x(1+xy)dy.$$

~~4~~. Soit la fonction

$$f: \mathrm{IR}^3 \to \mathrm{IR}$$
$$(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = \alpha x + 2y + z - 1$$
$$\alpha \in \mathrm{IR} \text{ donné.}$$

$\nabla f = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Déterminer le gradient de f et trouver les points stationnaires de f.

il n'y en a pas! degré 1. (?)

b) L'ensemble $E \subset \mathrm{IR}^3$ est défini par

$$x^2+y^2-1=0$$
$$y+z-1=0.$$

E fermé comme intersection d'un fermé et d'un ouvert, borné comme sous-ensemble d'un cercle.

Montrer que f atteint son maximum et son minimum dans E.

c) Trouver les extremas de f dans E.

d) Donner une interprétation géométrique de l'ensemble E.

~~5~~. Calculer les intégrales doubles

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy.$$

$$\overline{\Omega}: x \geq 0, y \geq 0$$
$$tg\frac{y}{x} \leq 1$$
$$x^2+y^2 \leq 1.$$

~~a~~) $f(x,y) = (x^2+y^2)Arctg\dfrac{y}{x}.$

~~b~~) $f(x,y) = \left(x^2+\dfrac{y^2}{9}\right)\sin\left(2Arctg\dfrac{y}{3x}\right).$

JUILLET 1996

? { 1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.

$$f(x) = \alpha \frac{1+\beta x}{1+\alpha\beta+\beta x}, \alpha > 0, \beta > 0.$$

a) f est-elle Lipschitzienne ?
Le cas échéant calculer la plus petite constante de Lipschitz.

b) Soit $\bar{I} = \left[\frac{\alpha}{1+\alpha\beta}, \alpha\right]$. Montrer que $f(\bar{I}) \subset \bar{I}$.

c) Calculer le point fixe $\bar{x} = f(\bar{x})$ et montrer que $\bar{x} \in \bar{I}$.

d) Que peut-on dire de la convergence de la suite (x_n), $x_{n+1} = f(x_n)$,

a) si $x_o \in \bar{I}$
b) si $x_o \in \mathbb{R}_+$.

e) La suite ainsi définie est-elle croissante ou décroissante ?

2. a) Soit la fonction $f :]-\infty, -1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = Log|x+1| + (1-a)\, x^2$, $a > 1$.
Discuter f.
Montrer : Si a est proche de 1 (toujours $a > 1$), alors f admet deux zéros distincts dans $]-\infty, -1[$.

b) Montrer que l'intégrale suivante ne dépend pas de x.

$$\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1-t^2}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}}\, dt, \quad x > 0.$$

Trouver sa valeur.

JUILLET 1996

~~3~~. Soit l'équation différentielle

$$u''(t)+2(\gamma+1)u'(t)+u(t)=f(t).$$

1) Donner la solution générale de l'équation sans second membre $(f(t)=0)$ en fonction de $\gamma \in \mathrm{IR}$.
2) Trouver la solution générale de l'équation avec le second membre $f(t)=\cos t$ pour $\gamma=0$ et pour $\gamma=-1$.

~~4~~. Soit $f:\mathrm{IR}^2 \to \mathrm{IR}$ définie par

$$f(x,y)=x^2+y^2-2x-2y-9. \quad = (x-1)^2+(y-1)^2-11$$

$$\overline{E}=\left\{(x,y)\in \mathrm{IR}^2 \;/\; 9x^2+16y^2-18x-32y-119 \leq 0\right\}. \quad = 9(x-1)^2+16(y-1)^2-144$$

a) Trouver les points stationnaires de f et étudier leur nature.
b) Etudier si les extrema $\max\limits_{(x,y)\in\mathrm{IR}^2} f(x,y)$ et $\min\limits_{(x,y)\in\mathrm{IR}^2} f(x,y)$ existent. Le cas échéant calculer leurs valeurs.
c) Trouver les extrema de f sous condition $(x,y)\in\partial\overline{E}$.
d) Etudier si les extrema $\max\limits_{(x,y)\in\overline{E}} f(x,y)$ et $\min\limits_{(x,y)\in\overline{E}} f(x,y)$ existent. Le cas échéant calculer leur valeur.
e) Représenter graphiquement les lignes de niveau de f. Esquisser les ensembles $\overline{E}$ et $\partial\overline{E}$ ainsi que les points extremaux.

j'arrive à un volume nul $\forall\alpha$. (?)

5. Trouver le volume du domaine $\overline{\Omega}(\alpha)\subset\mathrm{IR}^3, \alpha>0$:

$$\overline{\Omega}=\left\{(x,y,z)\in\mathrm{IR}^3 \;/\; y\geq 0, z\geq 0, x^2+y^2\leq R^2 \text{ et } z^2(x-\alpha)^2+y^2(z^2-1)\leq 0\right\}$$

dans les deux cas $\alpha=2R$ et $\alpha=\dfrac{R}{2}$.

SEPTEMBRE 1996

1. Soit $(x_n)_{n\in IN^*}$ une suite de nombres réels.

a) $x_n = \dfrac{|\cos n|}{n}$, $n = 1,2,3,\ldots$

b) $x_n = \dfrac{(2n)!}{n!n!}$, $n = 1,2,3,\ldots$

c) $x_n = \dfrac{1+2+\ldots+n}{n}$, $n = 1,2,3,\ldots$

d) $x_n = \dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}\right)$, $n = 1,2,3,\ldots$

e) $x_n = \sqrt[n]{\dfrac{1}{a^n}+\dfrac{1}{b^n}}$, a,b nombres réels positifs.

Décider si la suite converge ou diverge. Dans le cas de convergence trouver la limite. Justifier toutes les réponses.

2. Soit $(x_n)_{n\in IN}$ une suite de nombres réels.
Des six implications possibles, lesquelles sont vraies ?

$$\begin{tikzcd}
\sum_{n=0}^{\infty} x_n \text{ convergente} \arrow[rr, shift left, "1)"] \arrow[dr, shift left, "5)"] & & \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| \text{ convergente} \arrow[ll, shift left, "2)"] \arrow[dl, shift left, "3)"] \\
& \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 \text{ convergente} \arrow[ul, shift left, "6)"] \arrow[ur, shift left, "4)"] &
\end{tikzcd}$$

Justifier les résultats et dans le cas d'une réponse négative donner un exemple concret qui invalide l'implication en question.

SEPTEMBRE 1996

3. Soit la fonction $x \to f(x) = \dfrac{1}{\sin x + a}$, $a \in \mathrm{IR}$.

a) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x + a}$. $\varphi(t) = x = 2\mathrm{Arctg}(x)\ldots$

b) Pour quelle valeur de a l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x + a}$ converge-t-elle ?

4. Soit $(x, y) \to f(x, y) = (1 + \sqrt{x^2 + 2y^2})\, e^{-(x^2+2y^2)}$.

Déterminer le domaine de définition et de continuité de f et de ses dérivées.

- Calculer les points stationnaires et donner leur nature (sans utiliser les deuxièmes dérivées).
- Trouver le maximum et le minimum de f dans l'ensemble

$$E = \left\{(x, y) \in IR^2 \;/\; x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}\right\}.$$

- Déterminer l'ensemble $\mathrm{Im}\, f$

5. Soit la forme différentielle

$$2x(y-1)dx - (x^2 - 1)dy = 0.$$

$M = 2x(y-1)$
$N = -(x^2-1)$

Trouver les solutions sous forme explicite $x \mapsto y = u(x)$.

Esquisser la famille des solutions.