Examen : interroge sur les exercices

EPFL
Département de mathématiques

Physique, 2ème année

MÉTHODES MATHÉMATIQUES DE LA PHYSIQUE

SÉRIE 1

Exercice 1 : Soit un espace métrique (E, d). Vérifier les affirmations suivantes.

a) La limite d'une suite convergente est unique.

b) Toute suite convergente a la propriété suivante, dite *propriété de Cauchy* :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon, \text{ tel que } \forall n, m \geq N_\varepsilon,\ d(x_n, x_m) \leq \varepsilon\,.$$

c) Si une suite a la propriété de Cauchy et qu'elle possède une sous-suite convergente, alors elle converge.

Remarque: Lorsqu'une suite a la propriété de Cauchy elle est appelée *suite de Cauchy*. **Une suite de Cauchy n'est pas nécessairement convergente.** Soit $E := \mathrm{Q}$, $d(x, y) := |x - y|$; vérifier que la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$x_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\,,$$

sur $\mathbb{R}$: cauchy $\Longleftrightarrow$ convergente.

est une suite de Cauchy, qui n'est pas convergente dans E.

Exercice 2 : *Propriétés des ensembles ouverts et fermés.*
Dans un espace métrique (E, d) vérifier les affirmations suivantes:

a) E est un ensemble ouvert et fermé.

b) $\emptyset$ est un ensemble ouvert et fermé

c) La réunion d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert. $\bigcup_{i>0} O_i \in O$

d) L'intersection d'une famille *finie* d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert. $\bigcap_{i=0}^{n} F_i \in F$

e) Comment doit-on modifier c) et d) si l'on remplace "ouvert" par "fermé"?

Passage au complémentaire : le complémentaire d'un ouvert est fermé et vice-versa

Exercice 3 : On note $d(x, y)$ la distance euclidienne entre deux points x et y de R^2. Considérons les trois espaces métriques (E_1, d), (E_2, d) et (E_3, d), lorsque

$$E_1 := \mathrm{R}^2$$

$$E_2 := \{x = (x(1), x(2)) \in \mathrm{R}^2 \ :\ \cancel{|}\overset{\in \mathbb{R}}{x(1)}\cancel{|}^2 + |x(2)|^2 < 1\}$$

$$E_3 := \{x = (x(1), x(2)) \in \mathrm{R}^2 \ :\ x(2) = 0\}$$

L'ensemble

$$P = \{x = (x(1), x(2)) \in \mathrm{R}^2 \ :\ x(2) = 0,\ |x(1)| < 1\}$$

est un sous-ensemble de E_1, de E_2 et de E_3. Indiquer si P est ouvert, respectivement fermé, dans chacun de ces espaces métriques.

Daniel Ueltschi
Institut de Phys. théorique 693 4482

Lucia Marcello DMA
693 2167

BIBLIOGRAPHIE

Les références bibliographiques ci-dessous peuvent être consultées pour des compléments au cours. Les ouvrages sont beaucoup plus complets que le cours. La liste est très sommaire.

⊗ (1) Smirnov V.: Cours de mathématiques supérieures, vol II et IV (Mir).

(2) Courant-Hilbert: Methoden der mathematischen Physik I, Springer (1968). Le livre est un classique. Il existe aussi une traduction en anglais chez Wiley: Methods of mathematical physics, Wiley Classics (1989).

× (3) Kreyszig E.: Introductory functional analysis with applications, Wiley (1978).

⊗ (4) Reinhard H.: Equations différentielles, Gauthier–Villars (1982).

· (5) Waltman P.: A second course in elementary differential equations, Academic Press (1986).

(6) Rudin W.: Principles of mathematical analysis, Mc Graw-Hill (1964).

☒ (7) Dieudonné J.: Calcul infinitésimal, Hermann (1968).

$$\int dx \int dy \int dz\, 4z^2 + x$$

$$\int\left(\int\left(\int 4z^2+x\, dz\right) dy\right) dx$$

$$\int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi} f(r,\theta,\varphi)\, \underline{d\varphi\, d\theta\, dr}$$

$$\int_0^1 dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, f \ldots$$

EPFL
Département de mathématiques

Physique, 2ème année

MÉTHODES MATHÉMATIQUES DE LA PHYSIQUE

SÉRIE 2

Exercice 1 : Soient u et h deux fonctions continues non négatives définies sur $[0,1]$. Soit $c > 0$ et supposons que $\forall x \in [0,1]$

résultat pas d'une grande utilité par la suite

$$u(x) \le c + \int_0^x h(t)u(t)dt\,.$$

Montrer, par itération de cette inégalité, l'inégalité suivante,

$$u(x) \le c\exp(\int_0^x h(t)dt)\,.$$

pb. sqlt. 1-er ordre:

$$u' = h \cdot u \implies u = u_0 + \int_0^x h(t) \cdot u(t)\, dt$$

Solution:

$$u = u(x_0, x) \cdot a_0$$

si $h(t) \cdot u(t) = u(t \cdot) \cdot h(t)$, alors:

$$u = a_0 \cdot \exp\left(\int_0^x h(t)dt\right)$$

Exercice 2 : Si $a \in \mathrm{R}$ on sait que $e^a = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{a}{n})^n$. Soit $\mathrm{M}_k(\mathrm{C})$ l'espace vectoriel des matrices $k \times k$ sur le corps des nombres complexes. On munit $\mathrm{M}_k(\mathrm{C})$ de la norme

$$\|A\| := \sup_{\substack{x\in \mathrm{C}^k:\\ \|x\|=1}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}\,,$$

où $\|Ax\|$ et $\|x\|$ sont les normes euclidiennes des vecteurs Ax et $x \in \mathrm{C}^k$. Montrer que si $A \in \mathrm{M}_k(\mathrm{C})$, l'égalité

$$\boxed{\exp A = \lim_{n\to\infty}(\mathrm{I} + \frac{A}{n})^n}$$

est toujours vraie, lorsque l'on définit $\exp A$ par (I est la matrice identité)

$$\boxed{\exp A := \mathrm{I} + \sum_{n\ge 1} \frac{1}{n!}A^n\,.}$$

$$\frac{1-(m-1)(m-2)(m-3)}{(m+1)}$$

Indication : Ecrire $\exp A - (\mathrm{I} + \frac{A}{m})^m = \sum_{k\ge 0} \frac{C_k}{k!}A^k$ et observer que $C_k \ge 0$.

et $C_k = 0 \iff m \longrightarrow \infty$

Exercice 3 : Convergence uniforme (cf Douchet Zwahlen I pp. 75-77).
Soit I un intervalle quelconque de R. Soit $E := C(I)$ l'espace des fonctions définies sur I, réelles, bornées et continues. On munit E de la norme

$$\|f\|_\infty := \sup_{t\in I} |f(t)|\,.$$

Vérifier que c'est une norme. Vérifier l'affirmation suivante: *une suite de fonctions $f_n \in E$ converge uniformément sur l'intervalle I vers une fonction $f \in E$ si et seulement si* $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

il faut vérifier ici que notre norme marche

Calculer les limites des suites de fonctions données ci-dessous. Indiquer si la convergence est uniforme.

(1) $$(\pi n)^{-1/2}\exp(-\frac{x^2}{n})\,,\ x \in I := \mathrm{R}$$

(2) $$\frac{x^2}{x^2 + (1-nx)^2}\,,\ x \in I := [0,1]$$

(3) $$n^2x(1-x^2)^n\,,\ x \in I := [0,1]$$

CORRIGÉ DE LA SÉRIE 1

Exercice 1 : a) Supposons que $\lim_{n\to\infty} x_n = y$ et $\lim_{n\to\infty} x_n = z$. Nous avons $0 \leq d(y,z) \leq d(y,x_n) + d(x_n,z)$. Il suffit de prendre la limite $n \to \infty$ pour vérifier $d(y,z) = 0$, ce qui implique $y = z$.

b) Soit une suite convergente telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = y$. Soit $\varepsilon/2 > 0$; $\exists N_\varepsilon$ tel que $d(x_n, y) \leq \varepsilon/2$ si $n \leq N_\varepsilon$. Par conséquent, $\forall n, m \geq N_\varepsilon$, $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, y) + d(y, x_m) \leq \varepsilon$.

car converge vers y

c) Supposons que la sous-suite x_{n_k} converge vers $\overset{\lim_{k\to\infty} x_{n_k} \to y}{y}$ lorsque k tend vers l'infini. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse il existe N_ε tel que $d(x_n, \overset{\text{cauchy}}{x_m}) \leq \varepsilon/2\, \forall m, n \geq N_\varepsilon$. D'autre part il existe M_ε tel que $d(x_{n_k}, y) \leq \varepsilon/2$ si $n_k \geq M_\varepsilon$. Par conséquent, si $n_k \geq \max(M_\varepsilon, N_\varepsilon)$, alors $d(x_n, y) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, y) \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N_\varepsilon$. , et donc x_n converge vers y.

d) La suite est une suite de Cauchy puisque x_n est la somme partielle de la série convergente dans R, qui définit le nombre irrationnel e. La suite ne converge donc pas dans Q (voir point a)).

on admet implicitement que $\emptyset$ est ouvert

Exercice 2 : E est ouvert, car $\forall x \in E$ et $\forall r > 0$, la boule $B_\mathrm{o}(x,r) \subset E$. E est fermé, car c'est l'ensemble complémentaire de l'ensemble vide $\emptyset$. L'ensemble vide $\emptyset$ est fermé, car c'est l'ensemble complémentaire de E. Soient O_α, $\alpha \in I$, des ensembles ouverts. I est un ensemble quelconque. Soit $O = \cup_{\alpha\in I} O_\alpha$ et soit $x \in O$. Alors $x \in O_{\alpha'}$ pour un $\alpha' \in I$. Il existe donc un $r' > 0$ tel que $B_\mathrm{o}(x, r') \subset O_{\alpha'} \subset O$. Finalement montrons que $O = \cap_{n=1}^{k} O_n$ est un ensemble ouvert si chaque ensemble O_n est un ensemble ouvert. Soit $x \in O$. $\forall n$, $n = 1, \ldots, k$, il existe $r_n > 0$, tel que $B_\mathrm{o}(x, r_n) \subset O_n$. Si $r := \min_n r_n$, alors $B_\mathrm{o}(x,r) \subset O_n$ pour tout n, et donc $B_\mathrm{o}(x,r) \subset O$.

Pour toute famille d'ensembles F_α, $\alpha \in I$, on a $E\backslash(\cup_{\alpha\in I} F_\alpha) = \cap_{\alpha\in I}(E\backslash F_\alpha)$. De cette identité on obtient que la réunion d'une famille *finie* d'ensembles fermés est un ensemble fermé et l'intersection d'une famille *quelconque* d'ensembles fermés est un ensemble fermé.

Exercice 3 : L'ensemble P est ouvert dans (E_3, d). En effet si $x = (t, 0) \in P$ on a $|t| < 1$. Soit $\varepsilon = 1/2 \min(|t-1|, |t+1|)$. La boule (intervale fermé) (attention : boule ≡ intervale dans $\mathbb{R}^1$)

$$B_\mathrm{o}(x, \varepsilon) = \{y \in E_3 \;:\; d(x,y) < \varepsilon\} = \{(s,0) \;:\; s \in \mathrm{R},\ |s-t| < \varepsilon\}$$

est un ensemble de P.

E^c ouvert

L'ensemble P est fermé dans (E_2, d) car $E\backslash P$ est ouvert. En effet soit $y = (y(1), y(2)) \in E_2\backslash P$, i.e $y(2) > 0$ ou $y(2) < 0$ et $y \in E_2$. Alors la boule $B_\mathrm{o}(y, \varepsilon) \subset E_2\backslash P$ si ε est assez petit.

L'ensemble P n'est ni ouvert ni fermé dans (E_1, d). Si $x \in P$, alors la boule $B_\mathrm{o}(x, \varepsilon)$ n'est jamais contenue dans P, quelle que soit la valeur de $\varepsilon > 0$. Donc P n'est pas ouvert. D'autre part les points $(-1, 0)$ et $(1, 0)$ ne sont pas dans P, et chaque boule autour d'un de ces points rencontre P. Donc le complémentaire de P n'est pas ouvert.

P^c pas ouvert

EPFL Physique, 2ème année
Département de mathématiques

MÉTHODES MATHÉMATIQUES DE LA PHYSIQUE

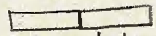
SÉRIE 3

Exercice 1 : On considère deux opérateurs différentiels

$$L_k := a_{k,0}(x)\frac{d^2}{dx^2} + a_{k,1}(x)\frac{d}{dx} + a_{k,2}(x) \quad , \quad x \in I_k ,$$

où I_k, $k = 1, 2$, sont deux intervalles de R ayant un seul point commun t. Les fonctions $a_{k,j} : I_k \to \mathrm{R}$, $j = 0, 1, 2$, sont continues et bornées sur I_k; $a_{k,0}(x) \neq 0$ $\forall x \in I_k$, $k = 1, 2$. Soit $I := I_1 \cup I_2$ et posons pour $j = 0, 1, 2$,

théorème général. Cas où on peut vouloir un saut de non continuité des dérivées :



pb de la chaleur avec 2 coeff. de conduct. différents

$$a_j(x) := \begin{cases} a_{1,j}(x) & \text{si } x \in I_1,\ x \neq t, \\ a_{2,j}(x) & \text{si } x \in I_2,\ x \neq t, \\ a_j(t) & \text{si } x = t, \text{ avec } a_j(t) = a_{1,j}(t) \text{ ou } a_{2,j}(t) \text{ (au choix).} \end{cases}$$

et

$$L := a_0(x)\frac{d^2}{dx^2} + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_2(x) \quad , \quad x \in I .$$

Au point t de raccordement des intervalles I_1 et I_2 on a en général une discontinuité des fonctions a_j, $\lim_{x\uparrow t} a_j(x) \neq \lim_{x\downarrow t} a_j(x)$. Soit $f : I \to \mathrm{R}$ une fonction continue sur chacun des intervalles I_k, $k = 1, 2$, mais pas nécessairement continue en t. Indiquer pourquoi, sous les hypothèses ci-dessus, il n'existe pas en général une fonction $\varphi : I \to \mathrm{R}$ de classe ~~$\mathcal{C}^2$~~ vérifiant l'équation différentielle $(L\varphi)(x) = f(x)$ $\forall x \in I$. Pour remédier à cette situation on recolle deux solutions φ_k, $k = 1, 2$, des équations $(L_k\varphi_k)(x) = f(x)$ $\forall x \in I_k$, de la façon suivante. On choisit une matrice inversible $T \in \mathrm{M}_2(\mathrm{R})$. *Une solution de l'équation $L\varphi = f$ avec recollement T est une fonction $\varphi : I \to \mathrm{R}$ telle que sa restriction ~~φ_k sur~~ I_k est une solution de l'équation $(L_k\varphi_k)(x) = f(x)$ et en $x = t$ on a $(\frac{d}{dx}\varphi_k(x) = \varphi_k'(x))$*

det T≠0

$$\begin{pmatrix} \varphi_2(t) \\ \varphi_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_1'(t) \end{pmatrix} .$$

$\varphi_2 = t_{11}\cdot\varphi_1 + t_{12}\cdot\varphi_1'$
$\varphi_2' = t_{21}\cdot\varphi_1 + t_{22}\cdot\varphi_1'$

Le recollement est dit C^1 si $T = \mathrm{I}$. Dans ce cadre général énoncer et démontrer un théorème d'existence et d'unicité pour le problème de Cauchy de l'équation $L\varphi = f$.

→ C'est le genre de recollement qu'on connait, si $T=I$, on aura que la continuité de φ_2 et φ_1 et de leurs dérivées sont imposées au point $x=t$: on a : $\varphi_2(t) = \varphi_1(t)$ et $\varphi_2'(t) = \varphi_1'(t)$.

Exercice 2 : On considère sur R l'équation $-y''(x) + V_\omega(x)y(x) = 0$ avec

$$V_\omega(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > \delta \\ \omega^2 & \text{si } |x| < \delta \end{cases}$$

On suppose $\delta < 1$ et $\omega > 0$. Trouver la solution qui satisfait les conditions $y(-1) = b - a$ et $y'(-1) = a$ en faisant des recollements C^1 en $x = \pm\delta$.

On choisit ensuite $\omega^2 = \frac{\varepsilon}{\delta}$, $\varepsilon > 0$, ε fixé. La solution est alors une fonction de x et de δ. Calculer $\lim_{\delta\to 0} y(x;\delta) \equiv y^*(x)$ et examiner le comportement de y^* au voisinage 0. (Remarque: si $\omega^2 = \frac{\varepsilon}{\delta}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} V_\omega(x)dx = 2\varepsilon\ \forall\delta$ et $\lim_{\delta\to 0} V_\omega(x) = 0\ \forall x \neq 0$.)

car ∃ discontinuité

On se rappelle du pb. de Cauchy : $Y(x) = Y^* + \int_{x_0}^{x} A(s)\cdot Y(s)\,ds$
Si on pose $(TZ)(x) = Y^* + \int_{x_0}^{x} A(\tilde{x})\cdot Z(\tilde{x})\,d\tilde{x}$, alors il faut que on ait un point fixe : $(T)(y) = y$

CORRIGÉ DE LA SÉRIE 2

même démarche que la dém. du cours.

Exercice 1 : On a $u(x) \leq c + \int_0^x h(t)u(t)\,dt$. Toutes les quantités étant *positives* on peut itérer cette inégalité.

$$u(x) \leq c + \int_0^x h(t)(c + \int_0^t h(s)u(s)\,ds)\,dt \tag{1}$$

$$= c + c\int_0^x h(t)\,dt + \int_0^x h(t)(\int_0^t h(s)u(s)\,ds)\,dt \tag{2}$$

Après $n-1$ itérations on obtient

$$u(x) \leq c\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^x h(t_1) \int_0^{t_1} h(t_2) \cdots \int_0^{t_{k-1}} h(t_k)\,dt_k \cdots dt_1 + \tag{3}$$

$$\int_0^x h(t_1) \int_0^{t_1} h(t_2) \cdots \int_0^{t_{n-1}} h(t_n)u(t_n)\,dt_n \cdots dt_1 \tag{4}$$

$$\leq c\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\left(\int_0^x h(t)\,dt\right)^k + \|u\|_\infty \frac{1}{n!}\left(\int_0^x h(t)\,dt\right)^n \tag{5}$$

Le résultat final s'obtient en prenant la limite $n \to \infty$.

Exercice 2 : Écrivons

$$\exp A - \left(\mathrm{I} + \frac{A}{m}\right)^m = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} - \sum_{k=0}^{m} \frac{m!A^k}{(m-k)!k!m^k} = \sum_{k\geq 0} \frac{C_k(m)}{k!}A^k$$

On note que $C_k(m) = 1$ si $k > m$, et sinon $C_k(m) = 1 - \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{m^k} > 0$. Donc

$$\|\exp A - \left(\mathrm{I} + \frac{A}{m}\right)^m \| \leq \sum_{k=0}^{\infty} C_k(m)\frac{\|A\|^k}{k!} = \exp\|A\| - \left(1 + \frac{\|A\|}{m}\right)^m \to 0$$

Exercice 3 : La suite de fonctions f_n converge uniformément sur l'intervalle I vers f si et seulement si $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon$ tel que $\forall n \geq N_\varepsilon$ on a

$$|f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon \quad , \quad \forall t \in I.$$

Par conséquent $\overset{N(f_n-f)=}{\sup_{t\in I}} |f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon$ si $n \geq N_\varepsilon$, i.e. $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.
⊗ Inversément, si $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$, alors $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon$ tel que $\forall n \geq N_\varepsilon$ on a

$$\sup_{t\in I} |f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon\,;$$

i.e. une estimation uniforme en $t \in I$.

$\lim_{n\to\infty} |f_n(t) - f(t)| = 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon$ t.q. $\forall n \geqslant N_\varepsilon\ |f_n(t) - f(t)| \leqslant \varepsilon\ \forall t \in I$

1) On a l'estimation $(\pi n)^{-1/2}\exp(-x^2/n) \leq \overset{\nearrow 0}{(\pi n)^{-1/2}}$ qui est uniforme en $x \in \mathrm{R}$. La suite de fonctions $(\pi n)^{-1/2}\exp(-x^2/n)$ converge donc uniformément sur R vers 0 lorsque $n \to \infty$.

2) La suite de fonctions $f_n(x) = \frac{x^2}{x^2+(1-nx)^2}$ converge *non* uniformément vers 0. En effet si $x = 1/n$, $f_n(1/n) = 1$.

3) La suite de fonctions $f_n(x) = n^2x(1-x^2)^n$ converge *non* uniformément vers 0. En effet si $x = 1/\sqrt{n}$, $f_n(1/\sqrt{n}) \to \infty$ lorsque $n \to \infty$.

Série 3, Exercice 1, MMP

Théorème : - soit $T \in Gl_2(\mathbb{R})$, $x_0 \in I \setminus \{t\}$, $Y_0, Y_1 \in \mathbb{R}$. Alors $\exists!\, \varphi : I \to \mathbb{R}$ t.q.

i) $\varphi(x_0) = Y_0$; $\varphi'(x_0) = Y_1$

ii) $\varphi_k = \varphi|_{I_k}$, $k = 1,2$ solution de $L_k \varphi_k = f(x)$ $\forall x \in I_k$

iii) Recollement donné par : $\begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_2' \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_1' \end{pmatrix}$

Preuve : - le théorème montre que les hypothèses d'existance et d'unicité pour le problème de Cauchy des éqn. $(L_k \varphi_k) = f(x)$, $x \in I_k$, $k = 1,2$, sont satisfaites. On a :

- si $x_0 \in I_1$ $\exists!\, \varphi_1$ t.q. $L_1 \varphi_1 = f$ sur I_1, t.q. $\varphi_1(x_0) = Y_0$, $\varphi_1'(x_0) = Y_1$ ↙ i.e. on détermine les C.I. du 2nd pb. par les conditions de raccordement.
  $\exists!\, \varphi_2$ t.q. $L_1 \varphi_2 = f$ sur I_2, t.q. $\varphi_2 = t_{11} \cdot \varphi_1 + t_{12} \cdot \varphi_1'$ et t.q. $\varphi_2' = t_{21} \cdot \varphi_1 + t_{22} \cdot \varphi_1'|_t$
- si $x_0 \in I_2$, on cherche d'abord φ_2 t.q. $L_2 \varphi_2 = f$ sur I_2 t.q. $\varphi_2(x_0) = Y_0$ et $\varphi_2'(x_0) = Y_1$, puis :
  $\exists!\, \varphi_1$ t.q. $L_1 \varphi_1 = f$ sur I_1, t.q. $\varphi_1 = t_{11}^{-1} \varphi_2 + t_{12}^{-1} \varphi_2'$ et t.q. $\varphi_1' = t_{21}^{-1} \varphi_2 + t_{22}^{-1} \varphi_2'|_t$

Remarque : - si $T = I_2$ alors on impose la continuité des solutions et de leurs dérivées, en effet on a : $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ et $\varphi_1'(t) = \varphi_2'(t)$. Il faut bien voir que ici t est le point commun de l'intervale des 2 opérateurs, et non la variable. On détermine donc les 2 solutions φ_1 et φ_2, On détermine une des fonctions entièrement par les C.I., et on recolle, ce qui permet de déterminer uniquement l'autre solution.

- ce problème n'est pas plus compliqué que le recollement connu C^1, seulement parfois il est utile que les dérivées ne soient pas continues (ex : pb. de la chaleur avec 2 barres)

MÉTHODES MATHÉMATIQUES DE LA PHYSIQUE

SÉRIE 4

Exercice 1 : Résoudre le problème

$$y''(x) + y(x) = x^2 \quad 0 \le x \le \pi/2$$
$$y(0) = y(\pi/2) = 0$$

par la méthode de la fonction de Green.

<u>A voir</u> : $f, g \in L^2 \Rightarrow f+g \in L^2$

$$\left(\int (f+g)^2\right)^2 = |\langle f+g | f+g \rangle|^2 \underset{\text{c.s.}}{\le} \langle f|f\rangle \langle g|g\rangle = \underbrace{\int f^2}_{<\infty} \cdot \underbrace{\int g^2}_{<\infty} < \infty$$

Exercice 2 : Soit une fonction f réelle définie sur $\{x \in \mathrm{R} : x \ge 0\}$. La condition *$f$ est de carré-intégrable à $+\infty$*, est définie par :

c.s.

$$\exists\, a \ge 0 \text{ tel que } \int_a^\infty |f(x)|^2\, dx < \infty\,.$$

Montrer que cette condition correspond à une condition homogène dans le sens suivant: si f et g vérifient la condition, alors $f + g$ vérifie la condition, ainsi que $\lambda \cdot f$, $\lambda \in \mathrm{R}$.

Déterminer la fonction de Green associée à l'équation définie sur $(0, \infty)$

$$Ly(x) = y''(x) - k^2 y(x) \quad k > 0$$

et aux conditions de bord $y(0) = 0$, y de carré-intégrable à $+\infty$.

Exercice 3 : Trouver la fonction de Green, si elle existe, pour l'équation

$$Ly = y'' - y$$

et les conditions

$$y(0) = y'(0), \quad y(1) + \lambda y'(1) = 0.$$

<u>idée</u> : 1) sol. existe? On veut résoudre $Ly = f$, donc il faut voir que la sol. de $Ly = 0$ admet que la sol. triviale → exclut tous les λ t.q. $\exists$ sol. non triviale

2) Calculer la fct. de Green.

CORRIGÉ DE LA SÉRIE 3

Exercice 1 : Soit $\varphi : I \to \mathrm{R}$ une fonction de classe C^2, solution de l'équation $L\varphi = f$. On peut alors écrire pour tout $x \in I$

$$\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x) = \frac{1}{a_0(x)}\left(f(x) - a_1(x)\frac{d}{dx}\varphi(x) - a_2(x)\varphi(x)\right). \tag{1}$$

Le membre de droite de (1) n'est pas en général une fonction continue en $x = t$; par conséquent φ ne peut pas être en général de classe C^2. Car f et a_j ne sont pas forcément continues en t

Théorème. *Les hypothèses de l'exercice sont satisfaites, en particulier T est une matrice inversible. Soient $x_0 \in I\backslash\{t\}$, $y_0 \in \mathrm{R}$ et $y_1 \in \mathrm{R}$. Alors $\exists!$ fonction $\varphi : I \to \mathrm{R}$ telle que ① $\varphi(x_0) = y_0$ et $\varphi'(x_0) = y_1$; ② pour $k = 1, 2$ la restriction φ_k de φ à I_k est une solution de l'équation $L_k\varphi_k(x) = f(x)$, $\forall x \in I_k$; ③ la condition de recollement est satisfaite,*

$$\begin{pmatrix}\varphi_2(t)\\ \varphi_2'(t)\end{pmatrix} \overset{\text{recollement}}{=} \begin{pmatrix}T_{11} & T_{12}\\ T_{21} & T_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1(t)\\ \varphi_1'(t)\end{pmatrix}.$$

ce serait pas plutôt L_2

Preuve. Les hypothèses du théorème d'existence et d'unicité pour le problème de Cauchy des équations différentielles $(L_k\varphi_k)(x) = f(x)$, $x \in I_k$, sont satisfaites. Si $x_0 \in I_1$ $\exists!$ solution φ_1 de $L_1\varphi_1 = f$ sur I_1, telle que $\varphi_1(x_0) = y_0$ et $\varphi_1'(x_0) = y_1$; de même $\exists!$ solution φ_2 de $L_1\varphi_2 = f$ sur I_2, telle que $\varphi_2(t) = T_{11}\varphi_1(t) + T_{12}\varphi_1'(t)$ et $\varphi_2'(t) = T_{21}\varphi_1(t) + T_{22}\varphi_1'(t)$. Si $x_0 \in I_2$ on détermine d'abord φ_2, solution de $L_2\varphi_2 = f$ sur I_2, telle que $\varphi_2(x_0) = y_0$ et $\varphi_2'(x_0) = y_1$, (x_0)!!! ensuite $\exists!$ solution φ_1 de $L_1\varphi_1 = f$ sur I_1, telle que $\varphi_1(t) = T_{11}^{-1}\varphi_2(t) + T_{12}^{-1}\varphi_2'(t)$ et $\varphi_1'(t) = T_{21}^{-1}\varphi_2(t) + T_{22}^{-1}\varphi_2'(t)$, où T^{-1} est la matrice inverse de T. □

le pb. de Cauchy a 1 seule solution donnée par les C.I.

?

Remarque : Lorsque $T = \mathrm{I}$, i.e. le recollement est C^1, le théorème est encore vrai si $x_0 = t$.

Exercice 2 : La solution à gauche de $-\delta$ est $y(x) = ax + b.$ Entre $-\delta$ et $+\delta$ elle est $y(x) = A\cosh\omega x + B\sinh\omega x$. Le recollement en $-\delta$ donne

$$\overset{Y(-\delta)\ =\ Y(-\delta)}{-a\delta + b = A\cosh\omega\delta - B\sinh\omega\delta} \qquad \overset{Y'(-\delta)\ =\ Y(-\delta)}{a = -A\omega\sinh\omega\delta + B\omega\cosh\omega\delta}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{\omega}\mathrm{Det}\begin{pmatrix}-a\delta + b & -\sinh\omega\delta\\ a & \omega\cosh\omega\delta\end{pmatrix} \quad B = \frac{1}{\omega}\mathrm{Det}\begin{pmatrix}\cosh\omega\delta & -a\delta + b\\ -\omega\sinh\omega\delta & a\end{pmatrix}$$

A droite de δ la solution est $Cx + D$, et le recollement donne

$$C\delta + D = A\cosh\omega\delta + B\sinh\omega\delta \qquad C = A\omega\sinh\omega\delta + B\omega\cosh\omega\delta$$

$$\Rightarrow D = -\mathrm{Det}\begin{pmatrix}\delta & A\cosh\omega\delta + B\sinh\omega\delta\\ 1 & A\omega\sinh\omega\delta + B\omega\cosh\omega\delta\end{pmatrix}$$

Posons $\omega = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\delta}}$. On note que $\boxed{\omega\delta = \sqrt{\varepsilon\cdot\delta} \to 0}$ si $\delta \to 0$. Donc $\boxed{\cosh\omega\delta \to 1,}$ $\boxed{\sinh\omega\delta \to 0,}$ $\boxed{\omega\sinh\omega\delta \to \varepsilon,}$ $\boxed{\omega^{-1}\cosh\omega\delta \to 0}$ et $\boxed{\delta/\omega\cosh\omega\delta \to 0}$ si $\delta \to 0$. Par conséquent $A \to b$, $C \to \varepsilon b + a + \varepsilon b$, $D \to b$ et B se comporte comme $a/\omega + b\sqrt{\varepsilon\cdot\delta}$ si $\delta \to 0$. On obtient

$$y^*(x) = \begin{cases} ax + b & x < 0\\ (2\varepsilon b + a)x + b & x > 0\end{cases} \quad , Y^*(0) = b$$

i.e y^* est continue en 0 et $\frac{d}{dx}y^*(0+) - \frac{d}{dx}y^*(0-) = 2\varepsilon y^*(0). \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$ (donc la proba. tombe à 0 si le potentiel tend à l'∞ pour x = 0)

⚠ lorsque on résoud qqch. de type $L\varphi = 0$, le recollement consiste simplement à imposer la continuité des dérivées et des dérivées secondes aux points de discontinuité.

EPFL
Département de mathématiques

Physique, 2ème année

MÉTHODES MATHÉMATIQUES DE LA PHYSIQUE

SÉRIE 5

Exercice 1 : Trouver toutes les constantes (valeurs propres) λ_n, ($n \in \mathrm{N}$ et $n \geq 0$), pour lesquelles le problème avec conditions de frontière

$$-y''(x) = \lambda y(x)\,, \quad 0 \leq x \leq L\,,$$
$$y(0) = 0 \quad y(L)\cos\beta = y'(L)\sin\beta\,,$$

a des solutions non triviales. Le paramètre $\beta \in (O, \pi)$.

Les valeurs propres sont des fonctions du paramètre β. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la première valeur propre soit négative.

Quelle est la valeur de β qui donne la plus petite première valeur propre ?

Esquisser le graphe des deux premières valeurs propres $\lambda_0(\beta)$ et $\lambda_1(\beta)$ comme fonctions de $\beta \in (0, \pi)$.

i) Ecrire : $Y'' + \lambda \cdot Y = 0$

ii) distinguer les cas : 1. $\lambda = 0$
2. $\lambda > 0$
3. $\lambda < 0$

et résoudre l'équation dans les 3 cas

iii) Résolution graphique pour λ : intersections donnent les valeurs propres. Attention aux valeurs des variables des graphes

CORRIGÉ DE LA SÉRIE 4

Exercice 1 : La fonction de Green est

$$g(x,y) = \begin{cases} -\sin x \cos y & x < y \\ -\cos x \sin y & x > y \end{cases}$$

La solution du problème s'écrit

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^{\pi/2} g(x,y) y^2 \, dy = -\int_0^x y^2 \cos x \sin y \, dy - \int_x^{\pi/2} y^2 \cos y \sin x \, dy \\ &= x^2 + 2(\cos x - 1) + (2 - (\pi/2)^2) \sin x \end{aligned}$$

Exercice 2 : Soient f et g deux fonctions de carré-intégrables à $+\infty$. Alors il existe $a \geq 0$ suffisament grand tel que

$$\int_a^\infty |f(x)|^2 \, dx < \infty \quad , \quad \int_a^\infty |g(x)|^2 \, dx < \infty .$$

Par l'inégalité de Schwarz nous avons

$$\begin{aligned} \int_a^\infty |f(x) + g(x)|^2 \, dx &\leq \int_a^\infty |f(x)|^2 \, dx + 2 \int_a^\infty |f(x) g(x)| \, dx + \int_a^\infty |g(x)|^2 \, dx \\ &\leq \int_a^\infty |f(x)|^2 \, dx + 2 \left(\int_a^\infty |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_a^\infty |g(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \\ &\quad + \int_a^\infty |g(x)|^2 \, dx . \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation $y'' - k^2 y = 0$ s'écrivent $C_1 \mathrm{e}^{-kx} + C_2 \mathrm{e}^{kx}$. La fonction de Green est donnée par

car $\varphi_1(0) = 0$

$$g(x,y) = \begin{cases} A(y) \sinh \overset{\varphi_1}{kx} & 0 < x < y \\ B(y) \underset{\varphi_2}{\mathrm{e}^{-kx}} & y < x < \infty \end{cases}$$

car φ_2 est de carré intégrable à l'∞.

Les conditions de raccordement sur la diagonale permettent de déterminer les fonctions $A(y)$ et $B(y)$. Ces conditions sont

condition de continuité: $A(y) \sinh ky = B(y) \mathrm{e}^{-ky}$;
condition de saut: $-kB(y) \mathrm{e}^{-ky} - kA(y) \cosh ky = 1$.

Par conséquent nous obtenons pour la fonction de Green

$$\boxed{g(x,y) = \begin{cases} -1/k \mathrm{e}^{-ky} \sinh kx & 0 < x < y \\ -1/k \mathrm{e}^{-kx} \sinh ky & y < x < \infty \end{cases}}$$

la fonction de Green va permettre de résoudre ici les éqn. du type $LY = f$. C'est innutile pour le pb. $LY = 0$ (dans ce cas le recollement est bien plus simple : continuité + des dérivées)

Exercice 3 : Le problème homogène $Ly = 0$, $y(0) = y'(0)$ et $y(1) + \lambda y'(1) = 0$ a une solution $\boxed{\text{non}}$ triviale si et seulement si $\lambda = -1$. Nous devons exclure ce cas. Si $\lambda \neq -1$

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+\lambda)\mathrm{e}} \mathrm{e}^x \phi(y) & 0 < x < y \\ \dfrac{1}{(1+\lambda)\mathrm{e}} \mathrm{e}^y \phi(x) & y < x < 1 \end{cases}$$

avec

$$\phi(y) = \frac{1-\lambda}{2\mathrm{e}} \mathrm{e}^y - \frac{(1+\lambda)\mathrm{e}}{2} \mathrm{e}^{-y}$$

EPFL
Département de mathématiques

Physique, 2ème année

MÉTHODES MATHÉMATIQUES DE LA PHYSIQUE

SÉRIE 6

~~Exercice~~ 1 : On considère l'opérateur différentiel $L := \frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx} + q(x)$ et l'équation

$$\boxed{Ly(x) = f(x)}\ , \quad x \in [a,b]\,,$$

avec les hypothèses usuelles de continuité pour les fonctions réelles p et q définies sur $[a,b]$; p t.q. $p(x) > 0$, $\forall x \in [a,b]$.

(1) Si $Lu = 0$ et $Lv = 0$ montrer que l'expression $\boxed{p \cdot W = \text{cte}_t}$

$$p(t)(u(t)v'(t) - u'(t)v(t)) \quad = p \cdot W$$

$\Rightarrow p \cdot W' + p' \cdot W = 0 \quad \Rightarrow p' \cdot W = -p \cdot W'$

est indépendante de $t \in [a,b]$.

(2) Soit $t_0 \in [a,b]$ et $f \in C([a,b])$. Montrer que la fonction

$$t \mapsto w(t) := c\int_{t_0}^{t} \cancel{p(s)}(u(s)v(t) - u(t)v(s))f(s)\,ds$$

est solution de l'équation $\boxed{Ly = f}$, $y(t_0) = 0$ et $y'(t_0) = 0$ si l'on choisit convenablement la constante c.

extension à $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0$

(3) Soit Λ_1 et Λ_2 deux opérateurs associés à des conditions de frontière séparées pour l'intervalle $[a,b]$. On suppose que le problème homogène $Ly = 0$, $\Lambda_1 y = 0$ et $\Lambda_2 y = 0$ possède une solution non triviale. A l'aide de la solution de (2) déterminer la solution (si elle existe) de l'équation $\boxed{Ly = f}$, $\Lambda_1 y = 0$, $\Lambda_2 y = 0$.

sol. existe ssi $\int_a^b \varphi(x) \cdot f(x)\,dx = 0$, $L\varphi = 0$ $\quad \varphi = u - v$, alors

Exercice 2 : On considère sur $C^2([a,b])$ deux opérateurs différentiels L_k, $k = 1, 2$,

$$L_k := \frac{d}{dx}p_k(x)\frac{d}{dx} + q_k(x)\,,$$

satisfaisant chacun les hypothèses de l'exercice 1.

Montrer que pour une solution non triviale de $L_1 y = 0$ il n'existe pas de t t.q. $u_1(t) = 0$ et $u_1'(t) = 0$. Montrer que deux solutions non triviales linéairement indépendantes u et v de $L_1 y = 0$ ne peuvent pas s'annuler au même point t.

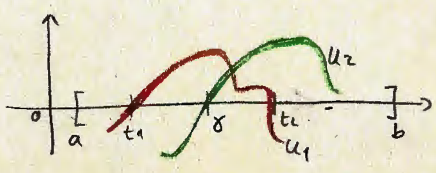
avec ça on conclut que $\Theta_1(\alpha) \neq \Theta_2(\alpha)$ et c'est ce qu'il faut pour conclure l'exercice

unicité ?

Soit u_1 une solution non triviale de l'équation $L_1 u_1 = 0$, t.q. $t_1, t_2 \in [a,b]$ sont deux zéros consécutifs de u_1. Montrer que sous les hypothèses $p_1(x) \geq p_2(x)$, $\forall x \in [a,b]$ et $q_1(x) \leq q_2(x)$, $\forall x \in [a,b]$, n'importe quelle solution u_2 de l'équation $L_2 u_2 = 0$ possède un zéro dans (t_1, t_2), sauf si $p_1(t) = p_2(t)$, $q_1(t) = q_2(t)$ $\forall t \in [t_1, t_2]$ et $u_2(t) = \lambda u_1(t)$ $\forall t \in [t_1, t_2]$.

Idée: Soit : – $L_k := \frac{d}{dx} p_k \frac{d}{dx} + q_k$, $L u_k = 0$.
– $t_1, t_2 \in [a,b]$ zéros consécutifs de u_1
Alors :

$$\left\{ p_1(x) \geqslant p_2(x) \ , \ q_1(x) \leq q_2(x) \quad \forall x \in [a,b] \right. \Longrightarrow \exists \gamma \in [t_1, t_2] \text{ t.q. } u_2(\gamma) = 0$$



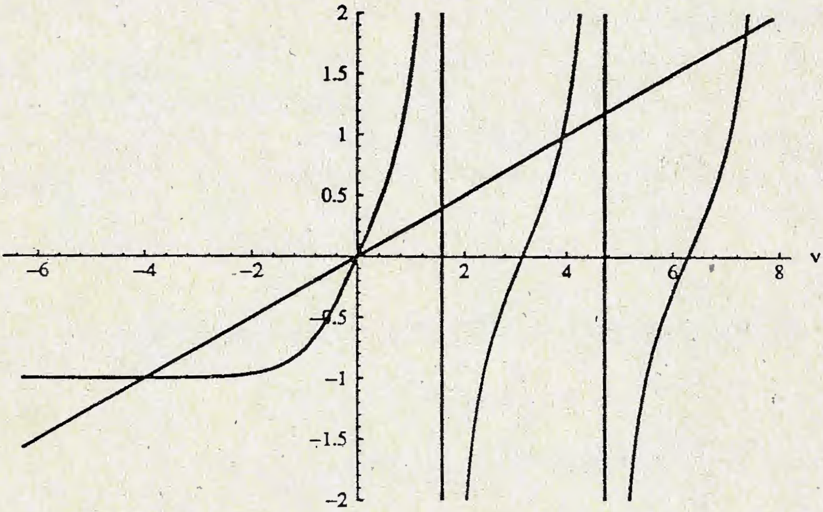
CORRIGÉ DE LA SÉRIE 5

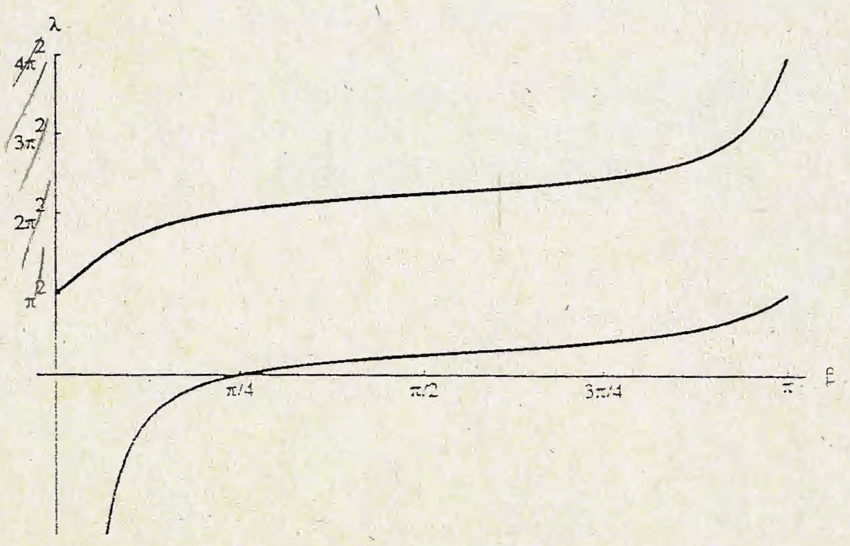
Exercice 1 : On distingue trois cas: a) $\lambda = 0$, b) $\lambda < 0$, c) $\lambda > 0$.

a) Les solutions de l'équation s'écrivent $y(x) = c_1 x + c_2$. Les conditions de bord imposent la solution triviale $y \equiv 0$, sauf si $L \cos\beta = \sin\beta$.

b) Il existe une solution non triviale $y(x) = c \sinh(\sqrt{|\lambda|}x)$ si et seulement si $\sqrt{|\lambda|} \tan\beta = \tanh(\sqrt{|\lambda|}L)$. On peut trouver la valeur propre λ correspondante en cherchant l'abscisse $x^* > 0$ de l'intersection des graphes des fonctions $x \mapsto x\frac{\tan\beta}{L}$ et $x \mapsto \tanh x$. La valeur propre est donnée par $\lambda = -(x^*/L)^2$. On obtient une valeur propre négative si et seulement la pente de la droite $x \mapsto x\frac{\tan\beta}{L}$ est positive et < 1, i.e $0 < \beta < \pi/2$ et $\tan\beta < L$. Il n'y a pas de $\beta_0 \in (0, \pi)$ tel que $\lambda(\beta_0) \leq \lambda(\beta)\ \forall\beta$. En effet nous avons $\lim_{\beta\to 0} \lambda(\beta) = -\infty$.

c) Ecrivons $\lambda = \nu^2$. On obtient la condition suivante pour les valeurs propres $\tan\nu L = \frac{\tan\beta}{L}\nu L$. (Le cas $\beta = \pi/2$ est considéré séparément.) Cette équation peut être résolue graphiquement en considérant les intersections des graphes des fonctions $x \mapsto \tan x$ et $x \mapsto \frac{\tan\beta}{L}x$.





CORRIGÉ DE LA SÉRIE 6 un peu court !

Exercice 1 : (1) Si $W(u,v)(t)$ est le wronskien en t des solutions u et v, alors

$$p(t)(u(t)v'(t) - u'(t)v(t)) = p(t)W(u,v)(t)\,.$$

L'éq. diff. pour le wronskien implique $\big(W(t)p(t)\big)' = 0$, i.e. $p(t)W(t) = p(t_0)W(t_0)$.

(2) On vérifie de suite que $w(t_0) = w'(t_0) = 0$. Nous avons $\forall t$,

$$w'(t) = c\int_{t_0}^{t}(u(s)v'(t) - u'(t)v(s))f(s)\,ds\,,$$

$$w''(t) = c(u(t)v'(t) - u'(t)v(t))f(t) + c\int_{t_0}^{t}(u(s)v''(t) - u''(t)v(s))f(s)\,ds\,.$$

il faudrait encore le montrer ! w est une solution de $Ly = f$ si et seulement si les fonctions u et v sont linéairement indépendantes et si $c^{-1} := p(t)(u(t)v'(t) - u'(t)v(t))$. car l'expression est indép. de t.

(3) Notons u la solution non triviale de $Ly = 0$, $\Lambda_1 y = 0$, $\Lambda_2 y = 0$. Soit v une solution de $Ly = 0$, linéairement indépendante de u. L'espace des solutions de $\{Ly = 0$ et $\Lambda_1 y = 0\}$ ou $\{Ly = 0$ et $\Lambda_2 y = 0\}$ est de dimension un; on a donc $\Lambda_k v \neq 0$, $k = 1, 2$. La solution la plus générale de $Ly = f$ s'écrit ? ?

$$y = \overset{Lu=Lv=0}{c_1 u + c_2 v} + w \quad , \quad w(t) := c\int_a^t (u(s)v(t) - u(t)v(s))f(s)\,ds\,,$$

avec $c^{-1} = W(u,v)(a)p(a)$. Nous avons $\underbrace{\Lambda_1 y = c_2 \overset{=0}{\Lambda_1 v}}_{\text{pourquoi}} = 0$, ce qui implique $c_2 = 0$. } ?
$\Lambda_2 y = 0 \iff \Lambda_2 w = 0 \iff \exists\lambda$, $(w(b), w'(b)) = \lambda(u(b), u'(b))$ puisque $\Lambda_2 u = 0$ et $u \not\equiv 0$. L'identité de Green pour u et w donne

$$\int_a^b (Lu)(s)w(s)\,ds - \int_a^b u(s)(Lw)(s)\,ds = p(b)W(u,w)(b)\,. \quad - p(a)\overset{=0 \text{ pourquoi?}}{\cancel{W}(u,w)(a)}$$

$\int_a^b (Lu)(s)w(s)\,ds = 0$ et $\int_a^b u(s)(Lw)(s)\,ds \overset{\text{cf. cours}}{=} \int_a^b u(s)f(s)\,ds$. On a donc $\Lambda_2 w = 0 \iff W(u,w)(b) = 0 \iff \int_a^b u(s)f(s)\,ds = 0$.

s'écrit comme : aurait $\varphi = c_1 \cdot u + \frac{1}{pW(u,v)}\int_a^t f(u) \dots ds$

$\int u \cdot f\, ds = 0$

Exercice 2 : Si $u_1(t) = 0$ et $u_1'(t) = 0$ alors $u_1(t) \equiv 0$. Si $u(t_0) = v(t_0) = 0$ alors $u'(t_0) \neq 0$ et $v'(t_0) \neq 0$. sinon c'est la sol. triviale Il existe une constante λ t.q. $v'(t_0) = \lambda u'(t_0)$; par conséquent $\underset{\text{sol. triviale}}{v - \lambda u} \equiv 0$, i.e. $v(t) = \lambda u(t)$ $\forall t$, i.e. v linéairement dépendant de u. Nous introduisons comme dans le cours des coordonnées polaires pour les fonctions u_k: $r_k(t)\sin\theta_k(t) := u_k(t)$ et $r_k(t)\cos\theta_k(t) := p_k(t)u_k'(t)$. L'angle θ_k vérifie

où sont les réponses aux questions ?

Transformation de Prüfer. ok.

$$\theta_k'(t) = \frac{1}{p_k(t)}\cos^2\theta_k(t) + \underbrace{q_k(t)\sin^2\theta_k(t)}_{+(E_k \cdot \rho_k(x) - q_k(x))\cdot \sin^2\theta_k}\,.$$

, avec ici $E \cdot \rho \equiv 0$ → on devrait avoir le signe ⊖.

Par conséquent nous avons

$$\theta_1'(t) \leq \frac{1}{p_2(t)}\cos^2\theta_1(t) + q_2(t)\sin^2\theta_1(t)\,. \tag{1}$$

, $p_2 \leq p_1$ et $q_2 \geq q_1$ → ok.

Le théorème de comparaison (ok) donne $\theta_1(t) \leq \theta_2(t)$ $\forall t$ $t \geq t_0$, si $\theta_1(t_0) \leq \theta_2(t_0)$. ! Sans restreindre la généralité nous pouvons supposer que $u_1'(t_1) > 0$, $u_1'(t_2) < 0$ et $u_2(t_1) \geq 0$. Nous pouvons donc normaliser θ_1 de sorte que $\theta_1(t_1) = 0$, $\theta_1(t_2) = \pi$ } ? et $\theta_2(t_1) \in [0, \pi]$. ① Si $p_1(t) = p_2(t)$, $q_1(t) = q_2(t)$ $\forall t \in [t_1, t_2]$ et (1.a) $u_2(t) = \lambda u_1(t)$ $\forall t \in [t_1, t_2]$, alors u_2 n'a pas de zéro dans (t_1, t_2). Sous les mêmes conditions, mais si u_2 est linéairement (1.b) indépendante de u_1 sur $[t_1, t_2]$, alors $u_2(t_1) > 0$ et donc $\theta_1(t_1) < \theta_2(t_1)$. Le théorème de comparaison donne $\pi = \theta_1(t_2) < \theta_2(t_2)$, ce qui implique l'existence d'un zéro dans (t_1, t_2). ② Dans les autres cas nous avons $\theta_1(t_1) \leq \theta_2(t_1)$, mais cependant toujours $\pi = \theta_1(t_2) < \theta_2(t_2)$, puisque l'inégalité est stricte sur un sous-intervalle de $[t_1, t_2]$ dans (1).

largué.

Résultat de l'exercice 1 :

Soit φ t.q. $L\varphi = 0$, $\Lambda_1\varphi = \Lambda_2\varphi = 0$. Soit v t.q. $Lv = 0$, v linéairement indép. de φ. Alors si

$$\int_a^b \varphi(s)\cdot f(s)\,ds = 0$$

La solution du problème $LY = f$ sur $I = [a,b]$ s'écrit :

$$Y(t) = C_1\cdot\varphi(t) + \frac{1}{p(a)\cdot W(\varphi,v)(a)}\int_a^t f(s)\cdot\left(\varphi(s)\cdot v(t) - \varphi(t)\cdot v(s)\right) ds$$

Résultat de l'exercice 2

Soit $L_1 := \frac{d}{dx} p_1(x) \frac{d}{dx} + q_1(x)$

$L_2 := \frac{d}{dx} p_2(x) \frac{d}{dx} + q_2(x)$

Soit $p_1(x) \geqslant p_2(x)$, $q_1(x) \leq q_2(x)$ $\forall x \in I = [a,b]$, soit $L_1\varphi_1 = 0$, t.q. $\alpha, \beta \in I$ 2 zéros consécutifs de φ_1, alors

$\exists \gamma \in [\alpha,\beta] \subset I$ t.q. $L_2\varphi_2 = 0$ et $\varphi_2(\gamma) = 0$

EPFL
Département de mathématiques

Physique, 2ème année

MÉTHODES MATHÉMATIQUES DE LA PHYSIQUE

SÉRIE 7

Exercice 1 : On considère l'équation différentielle

$$y''(x) + a_2(x)y(x) = 0\,,$$

avec ~~a_1 et~~ a_2 ~~deux~~ une fonction~~s~~ continue~~s~~ réelle~~s~~.

$L = \frac{d^2}{dx^2} + a_2(x)$

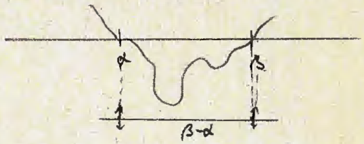
$L\varphi = 0$

$a_2(x) \in [m, M]$ $\forall x$

m : minimum
M : maximum

On suppose que $0 < m \leq a_2(x) \leq M\ \forall x$. Soit ϕ une solution non triviale avec deux zéros consécutifs α et β ($\alpha < \beta$). Montrer que

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}} \leq \beta - \alpha \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}}\,.$$



Exercice 2 : On considère les vibrations d'une membrane rectangulaire. Trouver tous les modes de vibrations propres que l'on peut obtenir par la méthode de séparation des variables:

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x,y) + \frac{d^2}{dy^2}u(x,y) = \lambda u(x,y)\ ,\ 0 < x < a\,,\ 0 < y < b\,,$$

t.q. $u(0,y) = u(a,y) = u(x,0) = u(x,b) = 0$. Donner une condition nécessaire sur le quotient de a/b pour que l'on ait des valeurs propres multiples?

Exercice 3 : Déterminer par la méthode de séparation des variables la solution du problème suivant.

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x,y) + \frac{d^2}{dy^2}u(x,y) = 0\ ,\ 0 \leq x \leq a\,,\ 0 \leq y \leq b\,,$$

t.q.

$$u(0,y) = u(a,y) = 0 \quad \forall y \quad , \quad u(x,b) = 0 \quad \forall x \quad , \quad u(x,\underset{0}{\cancel{b}}) = f(x) \quad \forall x\,.$$

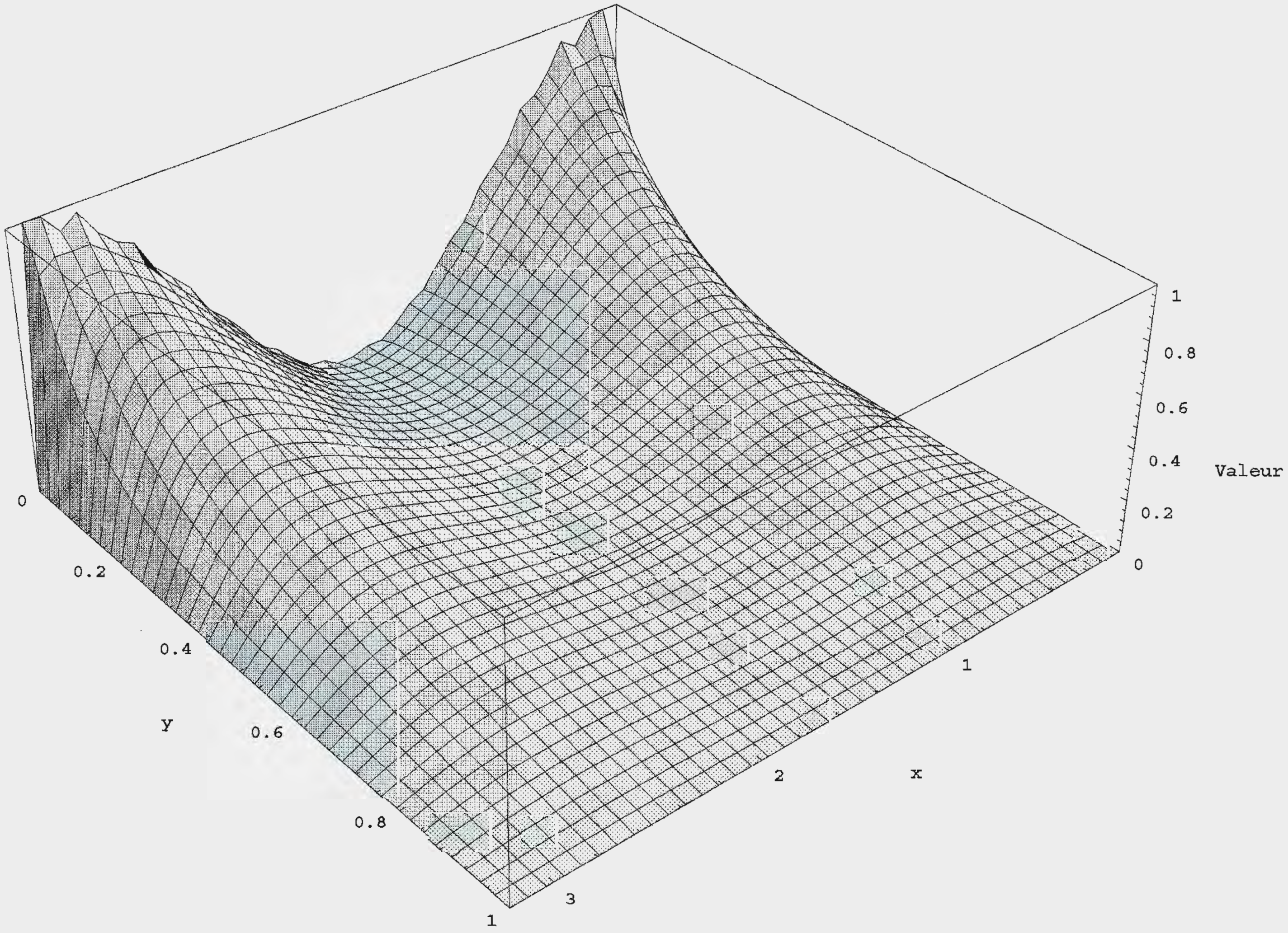
Problème de la membrane rectangulaire

Conditions intiales: u(0,y) = u(a,) = u(x,b) = 0, u(x,0) = f(x)

```
nb = 50; a = 3.2; b = 1; f = Cos[x]^2;

u = (2/a)*Sum[(1/Sinh[n*Pi*b/a])*Sin[n*Pi*x/a]*Sinh[n*Pi/a*(b-y)]*NIntegrate[f*Sin[n*Pi*x/a],{x,0,a}],{n,1,nb}];

Plot3D[u,{x,0,a},{y,0,b},
AxesLabel -> {"x","y","Valeur"},
ViewPoint->{1.793,2.168,1.880},
PlotRange -> {0, 1},
PlotPoints -> 40];
```



MÉTHODES MATHÉMATIQUES DE LA PHYSIQUE

Idée de l'ex. 1.
i) u t.q. $L_1 u=0$, alors $v=\frac{u'}{u}$ t.q. $L_2 v=0$
ii) v t.q. $L_2 v=0$, alors $u'=v\cdot u$ t.q. $L_1 u=0$

SÉRIE 8

Exercice 1 : On considère l'équation différentielle

$$L_1 \qquad y''(x)+a_1(x)y'(x)+a_2(x)y(x)=0\,. \quad (*)$$

(les solutions de ces 2 éqn. diff. sont reliées par la relation)

avec a_1 et a_2 deux fonctions continues réelles. Supposons que u est une solution de $(*)$ ne possédant pas de zéro sur l'intervalle (α,β). Vérifier que la fonction $\boxed{v(x)\equiv\frac{u'(x)}{u(x)}}$ est une solution sur l'intervalle (α,β) de l'équation différentielle (équation de Riccati)

$$L_2 \qquad v'(x)+v^2(x)+a_1(x)v(x)+a_2(x)=0\,. \quad (**)$$

Inversément, si v est une solution sur l'intervalle (α,β) de l'équation $(**)$, alors montrer que les solutions de l'équation $u'(x)=v(x)\cdot u(x)$ donnent des solutions de $(*)$ sur l'intervalle (α,β), qui ne s'annulent pas. Montrer que l'équation de Riccati

$$v'(x)+v^2(x)+1+x^2=0$$

n'a aucune solution sur l'intervalle $(0,\pi)$.

Exercice 2 : Soit q une fonction réelle continue définie sur $[a,b]$. On étudie l'équation différentielle

$$\boxed{y''(t)+Ey(t)=q(t)y(t)\,,}$$

lorsque E est grand. Le terme de droite $q(t)y(t)$ est petit par rapport au terme $Ey(t)$. Cela indique que les solutions de l'équation

$$y''(t)+Ey(t)=q(t)y(t)$$

sont proches de celles de l'équation

$$\boxed{y''(t)+Ey(t)=0} \quad , E>0$$

On peut concrétiser cette idée de la façon suivante. Soit $h(t,\tau)$ la solution de $y''(t)+Ey(t)=0$ avec conditions initiales $h(\tau,\tau)=0$ et $h'(\tau,\tau)=1$. Montrer que ① la fonction

fonction de Green normale (connue)

$$k(t,\tau):=\begin{cases}h(t,\tau) & \text{si } t\leq\tau,\\ 0 & \text{si } t>\tau,\end{cases}$$

est une fonction de Green causale, i.e. si f est une fonction continue la fonction $\int_a^b k(t,\tau)f(\tau)\,d\tau$ est une solution de l'équation $y''(t)+Ey(t)=f(t)$, t.q. $y(a)=y'(a)=0$. Soit φ une solution de $y''(t)+Ey(t)=0$, $\varphi(a)=y_a$ et $\varphi'(a)=y'_a$.

② Vérifier que la solution $z(t)$ de

$$z''(t)+Ez(t)=q(t)z(t) \quad , \quad z(a)=y_a\ ,\ z'(a)=y'_a$$

est solution de l'équation intégrale

$$z(t)=\int_a^b k(t,\tau)q(\tau)z(\tau)\,d\tau+\underbrace{\varphi(t)}_{\text{solution homogène}}\,.$$

③ Estimer $\sup_t|z(t)-\varphi(t)|$.
Indication: estimer $\int_a^b|z(t)|^2\,dt$ en fonction de $\int_a^b|\varphi(t)|^2\,dt$.

Résultat de l'exercice $L:=\frac{d^2}{dx^2}+E$; $L\varphi=q\cdot\varphi$; si E grand, alors $Lu=0 \rightarrow u\sim\varphi$

CO~~R~~RIGÉ DE LA SÉRIE 7

un peu $\frac{\text{trop}}{\text{court.}}$

pourquoi juste min et pas sin et cos. ?

Exercice 1 : On compare l'équation avec les equations (m) : $y'' + my = 0$ resp. (M) : $y'' + My = 0$. On considère les solutions $\sin\sqrt{m}(x-\alpha)$ resp. $\sin\sqrt{M}(x-\alpha)$, qui s'annulent en α. Le théorème de comparaison indique qu'entre les deux zéros α et β de ϕ la solution $\sin\sqrt{M}(x-\alpha)$ de (M) a un zéro dans (α, β). Par conséquent

$$\alpha < \alpha + \frac{\pi}{\sqrt{M}} < \beta\,.$$

NON ! le résultat de l'ex. 2. série 6, résultat pas clairement mentionné ni ds la donnée ni ds le corrigé $\Longrightarrow$ LAMENTABLEMENT NUL

De même, entre deux zéros de $\sin\sqrt{m}(x-\alpha)$ ϕ a un zéro dans $\alpha, \alpha + \alpha + \pi/\sqrt{m}$. Par conséquent

$$\alpha < \beta < \alpha + \frac{\pi}{\sqrt{m}}\,.$$

Exercice 2 : Si la solution cherchée s'écrit $u(x,y) = \alpha(x)\cdot\beta(y)$ on obtient $-\alpha''\beta - \alpha\beta'' = \lambda\alpha\beta$, i.e $-\alpha''/\alpha - \beta''/\beta = \lambda$. On est ramené à la discussion de deux problèmes de Dirichlet

$$-\alpha''(x) = \lambda_1\alpha(x) \quad \alpha(0) = \alpha(a) = 0\,,$$
$$-\beta''(y) = \lambda_2\beta(y) \quad \beta(0) = \beta(b) = 0\,,$$

avec $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda$. On obtient comme valeurs et fonctions propres

$$\lambda_{n,m} = \pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right) \quad u_{n,m}(x,y) = \sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\,.$$

Si l'on a des valeurs propres multiples,

$$\lambda_{n_1,m_1} = \lambda_{n_2,m_2} \Leftrightarrow \frac{n_1^2}{a^2} + \frac{m_1^2}{b^2} = \frac{n_2^2}{a^2} + \frac{m_2^2}{b^2} \Leftrightarrow \frac{1}{a^2}(n_1^2 - n_2^2) = \frac{1}{b^2}(m_2^2 - m_1^2)\,.$$

Il faut donc que le rapport $b^2/a^2 \in \mathbb{Q}$.

Exercice 3 : En posant $u(x,y) = \alpha(x)\beta(y)$, on obtient par séparation des variables

$$\frac{d^2}{dx^2}\alpha(x) + \lambda\alpha(x) = 0\,,\ \alpha(0) = \alpha(a) = 0 \qquad \frac{d^2}{dx^2}\beta(y) - \lambda\beta(y) = 0\,,\ \beta(b) = 0\,.$$

Le problème de Sturm-Liouville pour α donne les valeurs propres et fonctions propres $(n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{a^2}\,,\ \alpha_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{a}\,.$$

L'équation pour β et $\lambda = \lambda_n$ donne

$$\beta_n(y) = \sinh\left(\frac{n\pi}{a}(b-y)\right).$$

La solution la plus générale que nous pouvons écrire avec ces fonctions s'écrit

$$u(x,y) = \sum_{n\geq 1} A_n\alpha_n(x)\beta_n(y)\,.$$

La condition $u(x,0) = f(x)$ devient

$$\sum_{n\geq 1} \overset{\text{projection}}{A_n}\,\overset{\text{fonction propre}}{\alpha_n(x)}\beta_n(0) = f(x)\,,$$

ce qui donne pour A_n la relation

$$A_n = \frac{\langle \varphi_n | f(x)\rangle}{\|\varphi_n\|^2}\cdot\frac{1}{\beta_0} \longleftarrow \quad \int_0^a \sin\frac{n\pi x}{a} f(x)\,dx = \overset{\text{normalisation}}{\frac{a}{2}} A_n \overbrace{\sinh\frac{n\pi b}{a}}^{\beta_n(0)}\,.$$

si $\beta_n(0) = 1$, alors on aurait ce qu'on connaît :

$$\sum_{n\geq 1} A_n\cdot\alpha_n = f(x)$$

i.e. on décompose $f(x)$ dans la base des α_n

$$A_n = \frac{\langle\alpha_n|f\rangle}{\|\alpha_n\|^2}$$

Ici comme $\beta_n(0) \neq 1$, alors pour avoir les coefficients de la projection on divise chaque A_n par β_n, et dans ce cas on aura bien

$$\sum \tilde{A}_n\alpha_n = f(x)$$

$$\tilde{A}_n = \frac{\langle\alpha_n|f\rangle}{\|\alpha_n\|^2}\cdot\frac{1}{\beta_n}$$

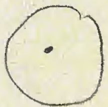
EPFL Physique, 2ème année
Département de mathématiques

MÉTHODES MATHÉMATIQUES DE LA PHYSIQUE

SÉRIE 9

Exercice 1 : Soit $p \geq 1$, $l^p = \{x = (x(n))_{n\geq 1} : x(n) \in \mathbb{C},\ \sum_{n\geq 1} |x(n)|^p < \infty\}$ et $\|x\|_p = \left(\sum_{n\geq 1} |x(n)|^p\right)^{1/p}$. Montrer que $(l^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach.

Exercice 2 : Montrer que dans la boule de centre 0 et de rayon 1 de l'espace l^2 on peut trouver une infinité de boules de même rayon ρ, $\rho < 1/4$, qui sont disjointes deux à deux.



Exercice 3 : Soit (E, d) un espace métrique complet. Soit F un sous-ensemble de E. (F, d) est aussi un espace métrique. Montrer que (F, d) est complet si et seulement si F est fermé.

Exercice 4: Les polynômes de Legendre P_n, $n \geq 1$, sont définis par la formule

$$P_n(t) := \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n\,.$$

Vérifier les affirmations suivantes. Le polynôme P_n est de degré n, le coefficient de t^n est positif,

$$\int_{-1}^{1} P_n(t)t^k\,dt = 0\quad,\qquad k = 0, 1, \ldots, n-1\,,$$

$$\int_{-1}^{1} [P_n(t)]^2\,dt = \frac{2}{2n+1}\,.$$

$\underline{E : E.V}$

$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\underline{E = \mathbb{R}}$

$d(x,y) = |x-y|^{1/2}$

$\|x\| = d(x,0)$, $\|\alpha \cdot x\| \neq |\alpha| \cdot \|x\|$

CORRIGÉ DE LA SÉRIE 8

Exercice 1 : Soit $v(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$. On calcule

$$v'(x) = \frac{u''(x)}{u(x)} - (\frac{u'(x)}{u(x)})^2 = \frac{-a_1(x)u'(x)}{u(x)} - a_2(x) - (\frac{u'(x)}{u(x)})^2 .$$

Inversément, si $v(x)$ est solution de l'équation de Riccati, alors const $\exp \int^x v(s)\, ds$ est une solution de l'équation $(*)$ qui ne s'annule pas dans l'intervalle où $v(x)$ est définie (sauf si const $= 0$).

on remplace $v = \frac{u'}{u}$ dans l'équation de Riccati pour v

L'équation de Riccati $v' + v^2 + 1 + x^2 = 0$ est associée à l'équation linéaire du deuxième ordre $u''(x) + (1 + x^2)u(x) = 0$. On peut comparer cette équation avec l'équation $y''(x) + y(x) = 0$. On voit que chaque solution de $u''(x) + (1 + x^2)u(x) = 0$ a un zéro dans l'intervalle $(0, \pi)$ puisque $\sin x$ est une solution de $y''(x) + y(x) = 0$. Par conséquent aucune solution de l'équation de Riccati est définie sur l'intervalle $(0, \pi)$.

trop d'étapes sautées pour être compréhensible.

Exercice 2 : La solution

$$h(t, \tau) = \frac{1}{\sqrt{E}} \sin \sqrt{E}(t - \tau) .$$

ok.

Soit $y(t) := \int_a^b k(t, \tau) f(\tau)\, d\tau \overset{\text{car } \int_t^b = 0}{=} \int_a^t k(t, \tau) f(\tau)\, d\tau$; nous obtenons successivement

$$y'(t) = \int_a^t \cos \sqrt{E}(t - \tau) f(\tau)\, d\tau ,$$

$$y''(t) = f(t) - \int_a^t \sqrt{E} \sin \sqrt{E}(t - \tau) f(\tau)\, d\tau .$$

évalue les dérivées successives pour remplacer ds l'éqn.

La fonction $y(t)$ satisfait les conditions initiales $y(a) = 0$ et $y'(a) = 0$; par ce qui précède elle est solution de

$$y''(t) + E\cancel{y}(t) = q(t)y(t) .$$

seulement le nom de la variable qui change : inutile

Par conséquent $z(t)$, solution de

$$z''(t) + Ez(t) = q(\cancel{t})z(t) \quad , \quad z(a) = y_a \, , \; z'(a) = y'_a$$

s'écrit $z(t) = y(t) + \varphi(t)$; elle satisfait donc l'équation intégrale

$$z(t) = \int_a^b k(t, \tau) q(\tau) z(\tau)\, d\tau + \varphi(t) .$$

à vérifier que c'est bien solution.

Il est facile d'estimer $z(t) - \varphi(t)$,

$$\begin{aligned} |z(t) - \varphi(t)| &\le \int_a^t |\frac{1}{\sqrt{E}} \sin \sqrt{E}(t - \tau) q(\tau) z(\tau)\, d\tau| \\ &\overset{C.S.}{\le} \frac{1}{\sqrt{E}} \Big(\int_a^b |q(\tau)|^2\, d\tau \Big)^{1/2} \Big(\int_a^b |z(\tau)|^2\, d\tau \Big)^{1/2} \\ &\equiv \frac{1}{\sqrt{E}} \|z\|_2 \, \|q\|_2 . \end{aligned}$$

C.S. : $|\langle x|y\rangle| \le \langle x|x\rangle^{1/2} \langle y|y\rangle^{1/2}$

ici : $|\langle x|y\rangle| = \langle x|y\rangle$

norme de L_2

En utilisant une nouvelle fois l'équation intégrale on obtient

$$\|z - \varphi\|_2^2 = \int_a^b |z(\tau) - \varphi(\tau)|^2\, d\tau \le \frac{1}{E} |b - a| \|q\|_2^2 \, \|z\|_2^2 .$$

Par conséquent

$= \int_a^b |z(t) - \varphi(t)|^2$

$$\|z\|_2 \le \|\varphi\|_2 \Big(1 - \frac{\sqrt{|b - a|} \|q\|_2}{\sqrt{E}} \Big)^{-1} .$$

$\|\varphi\|_2 \geq - \frac{\sqrt{|b-a|}\, \|q\|_2}{\sqrt{E}} \cdot \|z\| + \|z\|$

EPFL
Département de mathématiques

Physique, 2ème année

MÉTHODES MATHÉMATIQUES DE LA PHYSIQUE

SÉRIE 10

Exercice 1 : Soit $x : [0,1] \mapsto \mathrm{R}$; on définit

$$\|x\|_p := \left(\int_0^1 |x(s)|^p \, ds\right)^{1/p} \quad , \; p \geq 1 \, .$$

On considère l'espace vectoriel normé $E := C([0,1])$; vérifier que $(E, \| \cdot \|_p)$ est un espace vectoriel normé.
Sur cet espace on définit pour tout $p \geq 1$ la suite $\{x_n\}_{n \geq 3}$,

$$x_n(t) := \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } t \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ \frac{n}{2}(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}) & \text{sinon} \, . \end{cases}$$

Montrer que pour tout $p \geq 1$ la suite est une suite de Cauchy. Calculer pour chaque $t \in [0,1]$ la limite

$$x(t) := \lim_{n \to \infty} x_n(t)$$

et estimer $\|x_n - x\|_p$. Conclure qu'il n'existe aucun élément $y \in C([0,1])$ tel que $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y\|_p = 0$, et que par conséquent $(C([0,1]), \| \cdot \|_p)$ n'est pas un espace de Banach.

Exercice 2 : Soit $(\phi_n)_{n \geq 1}$ une famille orthonormale dans un espace préhilbertien $(\mathcal{H}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$. Soit V le plus petit sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$, contenant ϕ_n, $n = 1, 2, \ldots$. Montrer que

$$V = \{\underbrace{x \in \mathcal{H}; \|\overbrace{x\|^2 = \sum_{n \geq 1} | \langle x | \phi_n \rangle |^2}^{\text{propriété de Parseval}}}_{1°}\} = \{\underbrace{x \in \mathcal{H}; x = \sum_{n \geq 1} \langle \phi_n | x \rangle \, \phi_n}_{2°}\} \, .$$

Exercice 3 : Soit $(\mathcal{H}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace hilbertien. Soit $(\phi_n)_{n \geq 1}$ une base de $\mathcal{H}$. Montrer qu'un système orthonormal $(\psi_n)_{n \geq 1}$ est une base si et seulement si

$$\|\phi_k\|^2 = \sum_{n \geq 1} | \langle \psi_n | \phi_k \rangle |^2 \, .$$

CORRIGÉ DE LA SÉRIE 9

Exercice 1 : Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy. $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N_\varepsilon$ t.q. $\forall n, m \geq N_\varepsilon$ $\|x_n - x_m\|_p \leq \varepsilon$, i.e.

m est ici dans l'espace $\mathbb{C}$, qui est complet.

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{M} |x_n(k) - x_m(k)|^p \leq \varepsilon^p \quad , \quad \forall M.$$

En particulier $|x_n(k) - x_m(k)| \leq \varepsilon\ \forall k \geq 1$. Il existe par conséquent $x(k) := \lim_{n\to\infty} x_n(k)$ de plus $x = (x(k))_k \in l^p$, puisque la suite $(\|x_n\|_p)_n$ est bornée,

? Pourquoi la limite est dans ℓ^p ?

[illegible]

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_n(k)|^p \leq C < \infty \quad \forall n\,.$$

En prenant dans (1) la limite $m \to \infty$ puis $M \to \infty$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_n(k) - x(k)|^p \leq \varepsilon^p \quad , \quad \forall n \geq N_\varepsilon\,.$$

Exercice 2 : Si $E = \mathrm{C}^n$, et si $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots, 0)$ avec 1 à la j$^{\text{ième}}$ place, les n boules $B(1/2e_j, \rho)$ sont disjointes deux à deux dès que $\rho < \sqrt{2}/4$ et elles sont à l'intérieur de la boule unité centrée en 0. Donc pour $E = l^2$ toutes les boules $B(1/2e_j, \rho)$ avec $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots)$ sont disjointes deux à deux et à l'intérieur de la boule unité.

Exercice 3 : Supposons que (F, d) est complet. Soit $(x_n)_{n\leq 1}$, $x_n \in F$, une suite qui converge vers $x \in E$. La suite $(x_n)_{n\leq 1}$ est une suite de Cauchy dans F, et par conséquent a une limite dans F. Donc F est fermé.

Supposons que F est fermé. Soit $(x_n)_{n\leq 1}$ une suite de Cauchy dans (F, d). C'est aussi une suite de Cauchy dans E. Par conséquent $\lim_n x_n = x$ existe dans E. Mais comme F est fermé $x \in F$, et donc F est complet.

Exercice 4 : P_n est obtenu en dérivant n fois un polynôme de degré $2n$. Le coefficient de t^n dans P_n est donné par la valeur en $t = 1$ de

$$\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}t^{2n} = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\,.$$

Par intégration par parties $k+1$ fois,

$$\int_{-1}^{1} P_n(t)t^k\,dt = \frac{(-1)^{k+1}}{2^n n!}\int_{-1}^{1}\frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}}(t^2-1)^n\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}}t^k\,dt = 0\,.$$

En utilisant le résultat précédent, en intégrant n fois par parties puis encore n fois par parties on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}[P_n(t)]^2\,dt &= \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\int_{-1}^{1}P_n(t)t^n\,dt = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1}t^n\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n \\
&= \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\frac{n!}{2^n n!}(-1)^n\int_{-1}^{1}(t+1)^n(t-1)^n\,dt \\
&= \frac{1}{4^n}\frac{(2n)!}{(n!)^2}(-1)^n(-1)^n\frac{n!}{(n+1)\cdots 2n}\int_{-1}^{1}(t+1)^{2n}\,dt \\
&= \frac{4^{2n+1}}{2n+1}\frac{1}{4^n}\frac{(2n)!}{n!}\frac{1}{(n+1)\cdots 2n} = \frac{2}{2n+1}\,.
\end{aligned}$$

EPFL Physique, 2ème année
Département de mathématiques

MÉTHODES MATHÉMATIQUES DE LA PHYSIQUE

SÉRIE 11

Exercice 1 : Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soient M et N deux sous-espaces vectoriels fermés de $\mathcal{H}$. P et Q désignent les projecteurs orthogonaux associés. Vérifier que

$$\|Px\| = \|x\| \Leftrightarrow Px = x\,.$$

En utilisant ce résultat montrer les affirmations suivantes.

a) $0 \leq \langle x|Px\rangle = \|Px\|^2$.
b) $\langle x|Px\rangle \leq \langle x|Qx\rangle\ \forall x$ si et seulement si $M \subset N$.
c) PQ est un projecteur orthogonal si et seulement si $PQ = QP$.
⊗d) Si $PQ = QP$, PQ est le projecteur orthogonal associé à $M \cap N$.
e) $PQ = 0 \Leftrightarrow QP = 0 \Leftrightarrow M \perp N$.

Exercice 2 : Donner deux sous-espaces dans R^2, M et N, tels que les projecteurs orthogonaux associés, P et Q, ne commutent pas.

Décrire tous les sous-espaces fermés M et N dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ tels que les projecteurs orthogonaux associés, P et Q, commutent.

CORRIGÉ DE LA SÉRIE 10

Exercice 1 : Si $\|x\|_p = 0$ on a $x(t) = 0\ \forall t \in [0,1]$, car x est une fonction **continue**. → sinon au sens de Lebesgue ça ne s'averait pas
La propriété d'homogénéité est évidente. L'inégalité triangulaire correspond ici à l'inégalité de Minkowski pour les intégrales.
Supposons que $n > m$; nous avons $(|x_n(t) - x_m(t)| \le 1)$

$$\|x_n - x_m\|_p^p = \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}} |x_n(t) - x_m(t)|^p\, dt \le \frac{2}{m}\,,$$

ce qui donne $\|x_n - x_m\|_p \le (\frac{2}{m})^{1/p}$. La suite est donc de Cauchy. Nous avons

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le t < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} < t \le \cancel{1}.\ 1 \end{cases}$$

car au pire la différence entre x et xn est de 1, idem que

car ce n'est pas continu

Par conséquent $\|x_n - x\|_p \le (\frac{2}{n})^{1/p}$ et $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_p = 0$. Cependant $x \notin E$ et donc ne peut pas être la limite de la suite. Supposons que $y \in E$ est la limite de la suite, $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y\|_p = 0$. Nous avons dans ce cas

$$\|y - x\|_p \le \overbrace{\|y - x_n\|_p}^{\to 0 \text{ par hyp.}} + \overbrace{\|x_n - x\|_p}^{\text{on a montré avant}} \to 0 \quad , \quad n \to \infty.$$

$\|y-x-x_n+x_n\| = \|(y-x_n)+(x_n-x)\| \overset{\text{norme}}{\le} \|y-x_n\| + \|x_n-x\|$

Comme x est continue sur $[0,1/2)$ et sur $(1/2,1]$, on a $y(t) = x(t) = 0$ si $t \in [0,1/2)$ et $y(t) = x(t) = 1$ si $t \in (1/2,1]$; ceci est en contradiction avec la continuité de y sur $[0,1]$.

p.21-22 **Exercice 2 :** Posons

par la meilleure approximation cela veut dire que $\|x\|^2 = \|z\|^2 + \underbrace{d(x;z)^2}_{=0}$ → les $x \in \mathcal{H}$ qui sont dans vect$\{\phi_i\}$

$$V_1 = \{x \in \mathcal{H} : \|x\|^2 = \sum_{n\ge1} |\langle x|\phi_n\rangle|^2\}\,,\ V_2 = \{x \in \mathcal{H} : x = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \phi_{n_k}\}$$

pourquoi on introduit ça (?) (pas nécessaire)

$$V_3 = \{x \in \mathcal{H} : x = \sum_{n\ge1} \langle \phi_n|x\rangle\, \phi_n\}.$$

→ les x qui sont dans vect$\{\phi_i\}$

Par définition $V = \overline{V_2}$. On montre premièrement $V_1 = V_3$. Cela suit de l'identité valable pour tout $x \in \mathcal{H}$

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{N} |\langle \phi_k|x\rangle|^2 + \|x - \sum_{k=1}^{N} \langle \phi_k|x\rangle\, \phi_k\|^2.$$

meilleure approximation, on a que $V_3 \Leftrightarrow V_1$

Il est clair que $V_3 \subset \overline{V_2} = V$. Inversément si $x \in V$, alors il existe $x_n \in V_2$ tels que $x_n \to x$. Si $x_n = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \phi_{n_k}$ on sait que (cf cours) $\forall n\ \exists\ n_m$ t.q. $d(x,x_m) \le d(x,x_n)$ avec $x_m = \sum_{j=1}^{n_m} \langle\phi_j|x\rangle\phi_j$

$$\underbrace{\|x - \sum_{j=1}^{n_m} \langle \phi_j|x\rangle\, \phi_j\|}_{\text{approximation}} \le \|x - x_n\|. \quad = \varepsilon$$

Exercice 3 : Soit V le plus petit sous-espace vectoriel fermé contenant tous les ψ_k. En utilisant l'exercice 2 on sait que V contient tous les ϕ_n et que $V \supset \mathcal{H}$. Comme $V \subset \mathcal{H}$ on a $V = \mathcal{H}$; donc chaque $x \in \mathcal{H}$ peut s'écrire $x = \sum_k \langle \psi_k|x\rangle\, \psi_k$, i.e les ψ_k forment une base de $\mathcal{H}$.

MÉTHODES MATHÉMATIQUES DE LA PHYSIQUE

SÉRIE 12

Exercice 1 : Utiliser les théorèmes de Fubini et de la convergence dominée pour calculer l'intégrale

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^n dx \sin x \int_0^\infty dy\, \mathrm{e}^{-xy} .$$

Justifier l'utilisation de ces théorèmes.

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + \lambda^2}$$

Exercice 2 : Calculer les transformées de Fourier suivantes

(1) $\mathcal{F}(\mathrm{e}^{-\varepsilon|x|})$, $x \in \mathrm{R}$ et $\varepsilon > 0$.

(2) $\mathcal{F}(\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2})$, $x \in \mathrm{R}$ et $\alpha > 0$. $\to \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-a|x|}$, $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f(x))) = f(-x) \to \mathcal{F}^2(f(x)) = \mathcal{F}(f(-x))$

(3) Soient $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ et $\underline{k} = (k_1, k_2, k_3)$ deux vecteurs de $\mathrm{R}^{\cancel{2}\,3}$, et $x = |\underline{x}|$, $k = |\underline{k}|$ les normes euclidiennes de ces vecteurs. Vérifier la formule suivante pour une fonction invariante par rotation, $f(\underline{x}) = f(x)$,

coord. sphér. calculer et on le fait aller à l'∞

$$(\mathcal{F}f)(\underline{k}) = (\mathcal{F}f)(k) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}k} \int_0^\infty x \cdot f(x) \cdot \sin kx\, dx .$$

(4) $\mathcal{F}(\frac{\mathrm{e}^{-\lambda|\underline{x}|}}{|\underline{x}|})$, avec $|\underline{x}|$ la norme euclidienne de $\underline{x} \in \mathrm{R}^3$. Le paramètre λ est positif.

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\lambda^2 + k^2}$$

$\gamma_R = R \cdot e^{it}$

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{2} \frac{1}{2i} \left(e^{ix} - e^{-ix}\right) dx$$

CORRIGÉ DE LA SÉRIE 11

Exercice 1 : $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|x - Px\|^2$. Donc,
$\|x\| = \|Px\| \iff \|x - Px\| = 0 \iff x = Px$.

a) $0 \leq \|Px\|^2 = \langle Px|Px\rangle = \langle x|P^2x\rangle = \langle x|Px\rangle$.

b) En utilisant a) $\langle x|Px\rangle \leq \langle x|Qx\rangle \iff \|Px\| \leq \|Qx\|$. Soit $\langle x|Px\rangle \leq \langle x|Qx\rangle$. Si $x \in M$, $Px = x$ et par hypothèse $\|x\| = \|Px\| \leq \|Qx\| \leq \|x\|$, i.e $\|x\| = \|Qx\|$ ou encore $x \in N$. Inversément si $M \subset N$ on peut décomposer chaque x en $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in N$ et $x_2 \in N^\perp$. Si $y \in M$ $\langle y|x_2\rangle = 0$ car $y \in N$. Donc $x_2 \in M^\perp$. On a par conséquent $\|Px\| = \|P(x_1 + x_2)\| = \|Px_1\| = \|PQx\| \leq \|Qx\|$.

c) Si $PQ = QP$ alors $(PQ)^2 = PQPQ = P^2Q^2 = PQ$ et $\langle PQx|y\rangle = \langle Qx|Py\rangle = \langle x|QPy\rangle = \langle x|PQy\rangle$. Donc PQ est un projecteur orthogonal. Inversément si PQ est un projecteur orthogonal $\langle PQx|y\rangle = \langle x|PQy\rangle$; d'autre part $\langle PQx|y\rangle = \langle x|QPy\rangle$. Donc $\langle x|(PQ - QP)y\rangle = 0 \ \forall x, y$, i.e $PQ = QP$.

d) $PQx = QPx$ et par conséquent $\mathrm{Im}PQ \subset M \cap N$. D'autre part si $x \in M \cap N$ on a $Px = Qx = x$ et donc $\mathrm{Im}PQ \supset M \cap N$.

e) $PQ = 0 \iff \langle PQx|y\rangle = 0 \ \forall x, y \iff \langle Qx|Py\rangle = 0 \ \forall x, y \iff \underbrace{\underset{\in M}{\mathrm{Im}P} \perp \underset{\in N}{\mathrm{Im}Q}}_{\text{i.e. tout } x \in M \text{ est } \perp \text{ à tout } y \in N \ \Rightarrow M \perp N} \iff \langle x|QPy\rangle = 0 \ \forall x, y \iff QP = 0$.

Remarque: Si $M \perp N$, alors $M \cap N = \{0\}$, car $x \in M \cap N$ est orthogonal à lui-même. $M \cap N = \{0\}$ est nécessaire mais non suffisant pour l'orthogonalité des sous-espaces M et N. Voir exercice 2.

Exercice 2 : Deux sous-espaces à une dimension, qui ne sont pas orthogonaux.

$\boxed{\begin{matrix} V \leftrightarrow W \\ S \leftrightarrow T \end{matrix}}$

tous les esp. fermés ds esp. Hilb. t.q. PQ = QP.

Soient V et W deux sous-espaces fermés orthogonaux. Notons S et T les projecteurs associés à V et W. Soit $[V, W]$ le sous-espace engendré par V et W (vecteurs); posons $U := S + T$ (projecteur associé) et montrons que U est le projecteur sur $[V, W]$. En effet on sait que $ST = TS = 0$, (car $V \perp W$) | ex. 1.e et par conséquent

ce sont des simples propriétés des projecteurs ⟶

$$U^2 = (S + T)(S + T) = S + T = U, \quad \langle Ux|y\rangle = \langle x|Uy\rangle, \quad \mathrm{Im}U = [V, W].$$

Soient M et N deux sous-espaces, et $M \cap N$ l'intersection des sous-espaces M et N. Notons P, Q, R les projecteurs orthogonaux associés aux sous-espaces M, N, $M \cap N$. Le sous-espace M est décomposé en $M \cap N$ et $M_1 := M \cap (M \cap N)^\perp$, et le sous-espace N est décomposé en $M \cap N$ et $N_1 := N \cap (M \cap N)^\perp$. Notons P_1 et Q_1 les projecteurs orthogonaux associés aux sous-espaces M_1 et N_1. Nous avons

$$\boxed{\begin{matrix} M & N & M \cap N \\ P & Q & R \end{matrix}}$$

$M_1 = M \cap (M \cap N)^\perp \leftrightarrow P_1$
$N_1 = N \cap (M \cap N)^\perp \leftrightarrow Q_1$

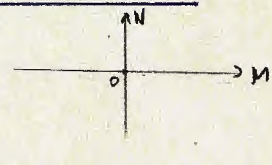
$$P = R + P_1 \quad Q = R + Q_1 \quad RP_1 = P_1R = RQ_1 = Q_1R = 0.$$?

Par conséquent $PQ = QP \iff P_1Q_1 = Q_1P_1$. Si $P_1Q_1 = Q_1P_1$, P_1Q_1 est le projecteur orthogonal associé à $M_1 \cap N_1 \boxed{=} (M \cap N) \cap (M \cap N)^\perp \underset{\text{ok}}{=} \{0\}$, i.e. $P_1Q_1 = 0$. Inversément si ~~P_1Q_1~~ $M_1 \perp N_1 \Rightarrow P_1Q_1 = 0$ $= 0$, alors Q_1 et P_1 commutent (voir exercice 1). Donc $PQ = QP \iff M_1 \perp N_1$: les projecteurs P et Q commutent si et seulement si $P_1Q_1 = 0$, i.e si et seulement si les sous-espaces supplémentaires orthogonaux à $M \cap N$ dans M, resp. N, sont orthogonaux.

⟶ tombe d'où ? C'est ÇA le point crucial.

$$\Longrightarrow \begin{cases} M \cap N \boxplus \tilde{M} = M \\ M \cap N \boxplus \tilde{N} = N \end{cases} \text{t.q. } \tilde{M} \perp \tilde{N}$$

Exemple dans $\mathbb{R}^2$
$M = e_1$, $N = e_2$
$M \cap N = \{0\}$
$\left.\begin{matrix}\tilde{M} = e_1 \\ \tilde{N} = e_2\end{matrix}\right\}$ et $\tilde{M} \perp \tilde{N}$



EPFL Physique, 2ème année
Département de mathématiques

MÉTHODES MATHÉMATIQUES DE LA PHYSIQUE

SÉRIE 13

Exercice 1 : Soit A une matrice symétrique définie positive et réelle. On écrit $\langle x|Ay\rangle$ le produit scalaire des vecteurs x et Ay dans l'espace euclidien R^n. Calculer la transformée de Fourier de la gaussienne

$$f(x) = \exp(-1/2\,\langle x|Ax\rangle)\,.$$

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\det A}}\cdot \exp(-1/2 \langle\lambda|A^{-1}\lambda\rangle)$$

Exercice 2 : Soit une fonction $f : \mathrm{R} \to \mathrm{C}$, de classe C^2 et telle que $\overset{0}{|f(x+Tn)|} \le \frac{C}{1+(x+Tn)^2}$

$$|f(x)| + |f'(x)| + |f''(x)| \le \frac{C}{1+x^2} \quad \Rightarrow |f(x)| \le \frac{C}{1+x^2}$$

avec C une constante indépendante de x. On définit une nouvelle fonction g de la façon suivante

$$g(x) = \sum_{n\in\mathrm{Z}} f(x+nT)\,.$$

avec ça, on a que $|f(x)|$, $|f'(x)|$, $|f''(x)|$ sont bornées. On regarde le sup. de $f(x+nT)$, il est atteint pour $x=-T$, donc: $f(x+nT) \le \frac{C}{1+(n-1)^2T^2} \sim \frac{1}{n^2}$
donc $\sum f(x+nT) \le \frac{1}{n^2} < \infty$
→ g est absolument convergente → de même avec g' et g''
→ $g \in C^2$

(1) Montrer que la série qui définit la fonction g est uniformément convergente sur l'intervalle $[0,T]$ et montrer que g est de classe C^2.

(2) Montrer que g est périodique de période T. Développer g en série de Fourier,

$$g(x) = \sum_{n\in\mathrm{Z}} a_n \exp(2i\pi xn/T)\,. \quad \left(\downarrow \Theta\, \frac{1}{n^2}\right)$$

En posant $x=0$ dans cette expression on obtient la **formule sommatoire de Poisson:**

$$\boxed{\sum_{n\in\mathrm{Z}} f(Tn) = \frac{\sqrt{2\pi}}{T}\sum_{n\in\mathrm{Z}} \hat{f}(\frac{2\pi}{T}n)\,.}$$

→ idem Analyse.

(3) Appliquer cette identité aux deux fonctions suivantes avec $T=1$.

↓ lien avec la périodicité ?

$$f(x) = (2\pi t)^{-1/2}\exp(-\frac{x^2}{2t})\,;$$

$$f(x) = \frac{t}{\pi}\frac{1}{x^2+t^2} \quad t>0\,.$$

Point 2) Soit la base de $L^2(a,b)$:
$e_n = \{\frac{1}{\sqrt{b-a}} \exp(i\frac{2\pi}{b-a}\cdot n x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $b-a=T$, alors: $e_n = \{\frac{1}{\sqrt{T}} \exp(i\frac{2\pi}{T}\cdot nx)\}_{n\in\mathbb{Z}}$

Alors: $g = \sum_n a_n \cdot e_n$, avec:

$$a_n = \langle e_n|g\rangle = \frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T e^{-i\frac{2\pi}{T}\cdot nx}\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+kT) = \frac{1}{\sqrt{T}}\cdot\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_0^T f(x+kT)\cdot e^{-i\frac{2\pi}{T}\cdot nx} = \frac{1}{\sqrt{T}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\frac{2\pi}{T}nx}dx$$

Soit $u = \frac{2\pi n}{T}$, alors:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{T}}\int_{\mathbb{R}} f(x)\cdot e^{-iux}dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{T}}\,\mathcal{F}(f(u)) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{T}}\cdot\hat{f}\left(\frac{2\pi n}{T}\right)$$

Alors:

$$g(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{T}}\cdot\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}\left(\frac{2\pi n}{T}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{T}}\cdot\exp\left(-i\frac{2\pi}{T}nx\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{T}\cdot\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}\left(\frac{2\pi}{T}\cdot n\right)\cdot\exp\left(-i\frac{2\pi}{T}\cdot nx\right)$$

Soit $x=0$, alors:

$$\left.\begin{aligned} g(0) &= \frac{\sqrt{2\pi}}{T}\cdot\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}\left(\frac{2\pi}{T}\cdot n\right)\\ g(0) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)\end{aligned}\right\} \to \boxed{\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n\cdot T) = \frac{\sqrt{2\pi}}{T}\cdot\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}\left(\frac{2\pi}{T}\cdot n\right)}$$

CORRIGÉ DE LA SÉRIE 12

Exercice 1 : La fonction $(x, y) \mapsto \sin x e^{-xy}$ définie sur $[0, n] \times \mathrm{R}^+$ est sommable. En effet l'intégrale itérée

Ah!

$$\int_0^n dx\,|\sin x| \int_0^\infty dy\, e^{-xy} < \infty\,.$$

Le théorème de Fubini donne le résultat et aussi l'identité

$$\int_0^n dx\, \frac{\sin x}{x} = \int_0^n dx\, \sin x \int_0^\infty dy\, e^{-xy} = \int_0^\infty dy \int_0^n dx\, \sin x e^{-xy}\,.$$

Calculons par parties $\int_0^n dx\, \sin x e^{-xy}$. Deux intégrations par parties donnent

$$\int_0^n dx\, \sin x e^{-xy} = -\frac{1}{y}\sin n e^{-ny} - \frac{1}{y^2}\cos n e^{-ny} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^2}\int_0^n dx\, \sin x e^{-xy}\,.$$

Par conséquent

$$\int_0^n dx\, \sin x e^{-xy} = \frac{-1}{1+y^2}\left(e^{-ny}(y \sin n + \cos n)\right) + \frac{1}{1+y^2}\,.$$

D'autre part si $n \geq 1$ et $y \geq 0$ on a $e^{-ny} \leq \frac{1}{1+y}$. Donc

$$\boxed{e^{-ny}\frac{1}{1+y^2}|\sin n \cdot y + \cos n| \leq \frac{1}{1+y^2}}$$

est sommable sur $[0, \infty)$. Par le théorème de Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n dy\, \frac{-1}{1+y^2} e^{-ny}(y \sin n + \cos n) = \int_0^\infty dy\, \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{1+y^2} e^{-ny}(y \sin n + \cos n) = 0\,.$$

Ainsi on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n dx\, \frac{\sin x}{x} = \int_0^\infty dy\, \frac{1}{1+y^2} = \arctan(\infty) - \arctan(0) = \frac{\pi}{2}\,.$$

Exercice 2 : 1). On décompose l'intégrale en deux parties

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon|x|} e^{-ikx}\, dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{\varepsilon x} e^{-ikx}\, dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\varepsilon x} e^{-ikx}\, dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + k^2}\,.\end{aligned}$$

2). On peut faire le calcul par la méthode des résidus, ou utiliser la relation $\mathcal{F}(\mathcal{F}\phi)(x) = \phi(-x)$. On obtient

$$\mathcal{F}\left(\frac{a}{a^2+x^2}\right)(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-a|k|}\,.$$

3). On choisit un système de coordonnées adapté pour chaque valeur de $\underline{k}$, de sorte que l'on ait $\underline{k} \cdot \underline{x} = kx \cos\vartheta$ et $d\underline{x} = x^2 \sin\vartheta dx d\vartheta d\phi$. On obtient

$$\begin{aligned}(2\pi)^{3/2} \hat{f}(k) &= \int_0^\infty f(x) x^2\, dx \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi e^{-ikx\cos\vartheta} \sin\vartheta\, d\vartheta \\ &= 2\pi \int_0^\infty f(x) x^2\, dx \int_{-1}^{1} e^{-ikxu}\, du = \frac{4\pi}{k} \int_0^\infty f(x) x \sin kx\, dx\,.\end{aligned}$$

4). On utilise le résultat précédent

$$\hat{f}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k} \int_0^\infty e^{-\lambda x} \sin kx\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\lambda^2 + k^2}\,.$$

CORRIGÉ DE LA SÉRIE 13

Exercice 1 : Il existe une matrice orthogonale U telle que $A = UDU^\top$, avec D une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres positives λ_m de la matrice A. En faisant un changement de variables $x = Uy$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f)(k) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \exp(-i\,\langle k|x\rangle - \frac{1}{2}\,\langle x|Ax\rangle)\,dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \exp(-i\left\langle U^\top k|y\right\rangle - \frac{1}{2}\,\langle y|Dy\rangle)\,dy \\
&= \prod_{m\geq 1} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i(U^\top k)_m y_m - \frac{1}{2}\lambda_m y_m^2)\,dy_m \\
&= \frac{1}{(\prod_{m\geq 1}\lambda_m)^{1/2}} \prod_{m\geq 1} \exp(-\frac{1}{2}\frac{((U^\top k)_m)^2}{\lambda_m}) = \frac{1}{(\det A)^{1/2}} \exp(-\frac{1}{2}\left\langle k|A^{-1}k\right\rangle)\,.
\end{aligned}$$

Exercice 2 : 1). Les hypothèses sur la fonction f impliquent $x = -T$

$$\sup_{x\in[0,T]} |f(x+nT)| \leq \frac{C}{1+|n-1|^2T^2} \quad |n| \geq 1\,.$$?

? Par conséquent la série est uniformément convergente sur $[0,T]$. Il en est de même pour les séries $\sum_n f'(x+nT)$ et $\sum_n f''(x+nT)$. On conclut que g est de classe C^2.

2). La fonction est T-périodique par construction. On peut donc écrire

$$g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \exp(2\pi inx/T)\,.$$

avec

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{T}\int_0^T g(x)\exp(-2\pi ikx/T)\,dx \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+nT)\exp(-2\pi ikx/T)\,dx \\
&= \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-2\pi ikx/T)\,dx\,.
\end{aligned}$$

On obtient $a_k = \frac{\sqrt{2\pi}}{T}\hat{f}(\frac{2\pi k}{T})$ et la formule de Poisson $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT) = \frac{\sqrt{2\pi}}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(\frac{2\pi n}{T})$.

3). On sait que

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-tk^2/2}\,.$$

La formule de Poisson donne

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-n^2/(2t)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-2\pi^2n^2t}\,.$$

Pour la deuxième fonction on a

$$\frac{1}{\pi}\mathcal{F}(\frac{t}{t^2+x^2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t|k|}\,.$$

La formule de Poisson donne

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n^2+t^2} = \frac{\pi}{t}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-2\pi|n|t} = \frac{\pi}{t}\cdot\frac{1+\exp(-2\pi t)}{1-\exp(-2\pi t)}\,.$$

EXAMEN: METHODES MATHEMATIQUES DE LA PHYSIQUE

- L'examen est oral. Il dure en règle générale 15 minutes.
- Il y a 15 minutes de préparation, sans document.
- L'examen porte sur **tout** le cours et sur **toutes** les séries, **sauf** ex.2 série 1, ex.1 série 2, ex.2 série 3, ex.1 série 6, ex.1 série 8, ex.4 série 9, ex.2 série 10.

La ou les questions posées seront soit d'ordre pratique, soit d'ordre théorique, ou les deux. Si la question posée est d'ordre pratique, cette question sera directement liée à un des exercices ou à un exemple traité dans le cours. La liste ci-dessous contient des questions d'ordre théorique, que j'ai posées à l'examen ces dernières années. Cette liste **ne constitue en aucun cas une liste officielle des questions théoriques.** Elle est uniquement donnée afin d'orienter l'étudiant dans sa préparation de l'examen. Il est possible que les questions seront posées de façon différente cette année.

Exemples de questions théoriques:

(1) Transformée de Fourier?
(2) Problème de Sturm-Liouville?
(3) Théorème de comparaison de Sturm. Indiquer une application de ce théorème.
(4) Problème avec conditions de bord pour une équation differentielle? Illustrer et donner les résultats principaux.
(5) Fonction de Green, définition, utilité.
(6) Espace de Hilbert abstrait: notion de base, projection orthogonale.
(7) Résultats principaux pour les équations différentielles linéaires. Comment peut-on exprimer une solution?
(8) Intégration de lebesgue : introduction et résultats