Exercices
(Math. 2ème cycle)

Analyse avancée B

Eté 1998-99

Série 1

bornitude

1. Soient X un ensemble, $B(X)$ l'ensemble de toutes les fonctions $f : X \to \mathbb{C}$ bornées; posons $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$. Vérifier que $B(X)$muni de $\|\cdot\|$ est un espace de Banach. ($\|f\|$ s'appelle la *norme suprémum* de $f \in B(X)$).
   = EVN complet

continuité + bornitude

2. Soient X un espace topologique, $C(X)$ l'ensemble de toutes les fonctions $f : X \to \mathbb{C}$ continues et bornées. Démontrer que, muni de la norme suprémum (cf. Ex. 1) $C(X)$ est un sous-espace vectoriel fermé dans $B(X)$; en conclure que $C(X)$ (muni de la norme suprémum) est un espace de Banach.

3. Soit $X = [0, 1]$; pour $f, g \in C(X)$ posons

$$< f, g >= \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Vérifier que $C(X)$ est un espace préhilbertien qui n'est pas hilbertien.

4. (Continuation de Ex. 3). Posons, pour $f \in C(X)$,

$$\|f\|_2 =< f, f >^{1/2}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Vérifier que $\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty, f \in C(X)$. Démontrer qu'une inégalité de la forme $\|f\|_\infty \leq M\|f\|_2$ (M étant un nombre positif valable pour tout $f \in C(X)$) est impossible.

Corrigé de l'Exercice 1, Série 1

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{B}(X)$,

i.e. $\forall \varepsilon>0, \exists N \,/\, \forall n,m \geq N, \|f_n - f_m\| < \varepsilon \iff \sup_{x\in X} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

Donc $\forall x \in X, |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ i.e. la suite $(f_n(x))_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ elle converge : $f_n(x) \to f(x)$, $\forall x$.

Il reste à montrer que a) $f \in \mathcal{B}(X)$ i.e. f est bornée,

b) $f_n \longrightarrow f$ dans $\mathcal{B}(X)$.

a) Supposons que f est non bornée, i.e. $\forall M>0, \exists \tilde{x} \in X \,/\, |f(\tilde{x})| > M+1$.

Puisque $f_n(\tilde{x}) \to f(\tilde{x})$, $\exists N_{\tilde{x}} \,/\, |f(\tilde{x}) - f_n(\tilde{x})| < 1$ pour $n > N_{\tilde{x}}$.

Alors $\forall M>0, \exists \tilde{x}, N_{\tilde{x}} \,/$

$$|f_n(\tilde{x})| = |f(\tilde{x}) + (f_n(\tilde{x}) - f(\tilde{x}))| \geq |f(\tilde{x})| - |f_n(\tilde{x}) - f(\tilde{x})| > M+1-1 = M.$$

Ceci contredit le fait que f_n est bornée, $\forall n$.

Donc f est bornée.

b) $\forall \varepsilon>0, \exists N \,/\, n,m \geq N \Rightarrow \|f_n - f_m\| < \varepsilon$. Donc $\forall n > N$,

$$\|f_n - f\| = \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in X} \left|f_n(x) - \lim_{m\to\infty} f_m(x)\right|$$

$$= \sup_{x\in X} \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \lim_{m\to\infty} \sup_{x\in X} |f_n(x) - f_m(x)|$$

$$= \lim_{m\to\infty} \|f_n - f_m\| < \varepsilon$$

Corrigé de l'Exercice 2, Série 1

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$, $f_n \in C(X)$ et $f = \lim\limits_{n\to\infty} f$

Pour montrer que $C(X)$ est un sous-espace fermé de $B(X)$, il suffit de monter que f est continue. Pour cela, on utilise :

a) $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ i.e.

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists N / \forall n \geq N,\ \|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow \left|f_n(x) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3},\ \forall x \in X$$

b) continuité de f_n en a, $\forall a \in X$, i.e.

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists O_n(a) \text{ ouvert de } X / x \in O_n(a) \Rightarrow \left|f_n(a) - f_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Ainsi, $\forall \varepsilon>0, \forall a \in X, \exists N, O_n(a)$ / si $n \geq N$ et $x \in O_n(a)$,

alors
$$\begin{aligned}|f(a) - f(x)| &\leq |f(a) - f_n(a)| + |f_n(a) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &\leq \varepsilon\end{aligned}$$

Donc f est continue.

Ceci associé à l'exercice 1 implique que toute suite de Cauchy dans $C(X)$ converge dans $C(X)$. $\Rightarrow$ $C(X)$ est un espace de Banach.

Corrigé de l'Exercice 4, Série 1

a) $$\|f\|_2^2 = \int_0^1 |f(x)|^2\,dx \leq \int_0^1 \left(\sup_{x\in X} |f(x)|\right)^2 dx = \left(\sup_{x\in X} |f(x)|\right)^2 = \|f\|_\infty^2$$

$\Rightarrow \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$.

b) Supposons $\exists M>0 / \|f\|_\infty \leq M \|f\|_2$, $\forall f \in C(X)$.

Alors les 2 normes sont equivalentes, et puisque $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach (cf. Exercice 2), $(C(X), \|\cdot\|_2)$ est aussi un espace de Banach, ce qui contredit l'exercice 3.

Exercices
(Math. 2ème cycle)

Analyse avancée B

Eté 1998-99

Série 2

1. (a) Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Si $F : E \times E \to \mathbb{C}$ est une forme sesquilinéaire et Q est la forme quadratique associée, vérifier la formule de polarisation :

$$4F(f,g) = \sum_{k=0}^{3} i^k Q(f + i^k g), (f,g) \in E \times E$$

   (b) Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Si $F : E \times E \to \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire et Q est la forme quadratique associée alors vérifier que

$$4F(f,g) = Q(f+g) - Q(f-g), (f,g) \in E \times E.$$

2. Vérifier en détail les affirmations suivantes pour un espace préhilbertien E muni du produit scalaire $< \cdot, \cdot >$ et de la norme $|| \cdot ||$ qui s'en déduit :

   (i) Si $| < f, g > | = ||f|| ||g||$ alors f, g sont linéairement dépendants.

   (ii) Si $||f + g|| = ||f|| + ||g||$ alors $f = 0$ ou $g = 0$ ou $f = \lambda g$ avec $\lambda > 0$.

   (iii) $||f + g||^2 + ||f - g||^2 = 2(||f||^2 + ||g||^2)$.

Exercices
(Math. 2ème cycle)

Analyse avancée B

Eté 1998-99

Série 3

1. Démontrer que dans l'espace $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, muni de la distance

$$d(x,y) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \frac{|x_j - y_j|}{1 + |x_j - y_j|}, \ x = (x_j), \ y = (y_j)$$

une suite $\{x^{(n)}\}$ converge vers x lorsque $n \to \infty$ si et seulement si $\lim_{n\to\infty} x_j^{(n)} = x_j$, $j = 0, \ 1, \ldots$ où $x = (x_j), \ x^{(n)} = (x_j^{(n)})$.

2. Soit $F : \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}$; posons $F(e_i, e_j) = a_{ij}$ où $\{e_1, \ldots, e_N\}$ est la base canonique de $\mathbb{C}^N$, $A = [a_{ij}]$. Démontrer les affirmations suivantes :

   (i) F est une forme sesquilinéaire si et seulement si

$$F(x,y) = \sum_{1 \le i,j \le N} a_{ij} \ x_i \ \overline{y}_j = < Ax, y > = y^* Ax$$

   où $x = (x_1, \ldots, x_N)$, $y = (y_1, \ldots, y_N)$ sont considérés comme des matrices colonnes, $y^* = [\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_N]$ (matrice ligne) et $< \cdot, \cdot >$ est le produit scalaire canonique de $\mathbb{C}^N$.

   (ii) F est hermitienne si et seulement si $A = A^* = \overline{{}^t A}$ (i.e. $a_{ij} = \overline{a}_{ij}$)

   (iii) F est une forme hermitienne positive (strictement positive) si et seulement si $A = A^*$ avec $< Ax, x > \ \ge \ 0, \ x \in \mathbb{C}^N$ ($< Ax, x >> 0, \ 0 \ne x \in \mathbb{C}^N$) ($A$ s'appelle matrice auto-adjointe positive (strictement positive)).

   (iv) Démontrer que

$$| < Ax, y > |^2 \ \le \ < Ax, x > < Ay, y >, \ x, y \in \mathbb{C}^N$$

   si A est une matrice auto-adjointe positive.

Exercices
(Math. 2ème cycle)

Analyse avancée B

Eté 1998-99

Série 4

1. Si E, F sont deux espaces normés, $\mathcal{L}(E, F)$ est l'espace formé de toutes les applications linéaires $u : E \to F$ avec $\|u\| = \sup_{\|f\| \leq 1} \|uf\| < \infty$. Démontrer que $\mathcal{L}(E, F)$ muni de cette norme est un espace normé; c'est un espace de Banach si F est un espace de Banach.

2. Soient E, F, G trois espaces normés. Si $u \in \mathcal{L}(E, F), v \in \mathcal{L}(F, G)$ démontrer que $vu \in \mathcal{L}(E, G)$ (où $vu(f) = v(u(f)), f \in E$) avec

$$\|vu\| \leq \|v\| \|u\|.$$

En particulier $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$ est une algèbre normée.

Exercices
(Math. 2ème cycle)

Analyse avancée B

Eté 1998-99

Série 5

1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue non identiquement nulle. Démontrer que, pout tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe des constantes $\alpha_n,\ \beta_n \geq 0$ telles que

$$\alpha_n (\sum_{j=0}^{n} |a_j|^2)^{\frac{1}{2}} \leq \int_0^1 |\sum_{j=0}^{n} a_j x^j| f(x) dx \leq \beta_n (\sum_{j=0}^{n} |a_j|^2)^{\frac{1}{2}}$$

pour tout choix de $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$.

2. Soient $E = \{f \in C([0,1]) : f(0) = 0\}$, $E_0 = \{f \in E : \int_0^1 f(x)dx = 0\}$ avec $\|f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|, f : [0,1] \to \mathbb{C}$.

(i) Vérifier que E est un espace de Banach et que E_0 est un sous-espace vectoriel fermé de E.

(ii) Démontrer qu'il n'existe pas de fonction $g \in E$ telle que $\|g\| = 1$ avec

$$d(g, E_0) = \inf_{f \in E_0} \|g - f\| = 1$$

en complétant le raisonnement qui suit :

(a) Pour un tel g, il existerait pour chaque $h \in E \setminus E_0$ un $c \in \mathbb{C}$ tel que $g - ch \in E_0, c = \int_0^1 g \ / \ \int_0^1 h$.

(b) On aurait alors
$$1 \leq \|g - (g - ch)\| = |c| \|h\|.$$

(c) En prenant $h(x) = x^\alpha,\ 0 < \alpha \to 0$, dans (b), on aurait

$$|\int_0^1 g(x)dx| \geq 1.$$

(d) Or, si $g(0) = 0$ et $\|g\| = 1$ alors

$$|\int_0^1 g(x)dx| < 1,$$

une contradiction à (c).

Exercices
(Math. 2ème cycle)

Analyse avancée B

Eté 1998-99

Série 6

1. (a) Soit E un espace normé; démontrer que $f \mapsto \|f\|$ est une fonction continue dans E.

   (b) Soit E un espace préhilbertien; démontrer que $(f, g) \mapsto < f, g >$ est une fonction continue dans $E \times E$.

2. Soit $T : E \to F$ une application linéaire, continue et surjective entre les espaces normés E et F. Montrer que si E est séparable alors F l'est aussi.

Exercices
(Math. 2ème cycle)

Analyse avancée B

Eté 1998-99

Série 7

1. Démontrer que (avec $a, b \in \mathbb{C}$)

(i) $\inf_{a,b} \int_0^{2\pi} |\cos 2x - (a + b\sin x)|^2 dx = \pi$

(ii) $\inf_{a,b} \int_{-\pi}^{\pi} |x - (a + b\cos x)|^2 dx = \frac{2\pi^3}{3}$

(iii) $\inf_{a,b} \int_0^{2\pi} |x - (a + b\sin x)|^2 dx = 2\pi(\frac{\pi^2}{3} - 2).$

Etablir que dans (i) et (ii) l'infimum est atteint pour $a = b = 0$ et dans (iii) l'infimum est atteint pour $a = \pi, b = -2$.

2.(i) Soit $a_\alpha \geq 0, \alpha \in I$: posons

$$\tilde{\sum_{\alpha\in I}} a_\alpha = \sup\left\{\sum_{\alpha\in J} a_\alpha : J \subset I, J \text{ fini}\right\}.$$

Démontrer que $\{a_\alpha\}_{\alpha\in I}$ est sommable si et seulement si $\tilde{\sum_{\alpha\in I}} a_\alpha < \infty$ et alors

$$\sum_{\alpha\in I} a_\alpha = \tilde{\sum_{\alpha\in I}} a_\alpha.$$

(ii) Soit $c_\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \in I$; démontrer que $\{c_\alpha\}_{\alpha\in I}$ est sommable si et seulement si $\tilde{\sum_{\alpha\in I}} |c_\alpha| < \infty$ et alors

$$\sum_{\alpha\in I} c_\alpha = \sum_{\alpha\in I} c_\alpha^+ - \sum_{\alpha\in I} c_\alpha^-$$

où $c_\alpha^+ = \max(c_\alpha, 0), c_\alpha^- = \max(-c_\alpha, 0)$.

(iii) Soit $c_\alpha \in \mathbb{C}, \alpha \in I$; démontrer que $\{c_\alpha\}_{\alpha\in I}$ est sommable si et seulement si $\{Re\, c_\alpha\}_{\alpha\in I}, \{I_m c_\alpha\}_{\alpha\in I}$ sont sommables; démontrer que ceci équivaut à $\tilde{\sum_{\alpha\in I}} |c_\alpha| < \infty$; alors

$$\sum_{\alpha\in I} c_\alpha = \sum_{\alpha\in I} Re\, c_\alpha + i \sum_{\alpha\in I} I_m c_\alpha$$

$$|\sum_{\alpha\in I} c_\alpha| \leq \sum_{\alpha\in I} |c_\alpha|.$$

Exercices
(Math. 2ème cycle)

Analyse avancée B

Eté 1998-99

Série 8

1. (i) Démontrer qu'un espace normé E est complet si et seulement si toute série absolument convergente dans E est convergente.

   (ii) Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans un espace normé E. Démontrer que la série $f_0 + f_1 - f_1 + f_2 - f_2 + \dots$

   a) converge dans E si et seulement si $f_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$,

   b) converge absolument dans E si et seulement si $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\| < \infty$.

2. Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans un espace de Banach E. Démontrer qu'une condition suffisante mais non nécessaire pour l'existence de $\lim_{n\to\infty} f_n$ est que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n - f_{n+1}\| < \infty.$$

Exercices
(Math. 2ème cycle)

Analyse avancée B

Eté 1998-99

Série 9

1. Soit $\lambda = (\lambda_n)_{n\in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ≥ 0; posons

$$E_\lambda = \{a = (a_n)_{n\in \mathbb{N}} \in \ell^2 : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\lambda_n < \infty\}.$$

Vérifier les affirmations suivantes :

(i) E_λ est toujours un sous-espace vectoriel dense de ℓ^2;

(ii) pour $\lambda_n = 1, n \geq 0, E_\lambda$ n'est pas fermé;

(iii) si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2 < \infty$ alors $E_\lambda = \ell^2$.

2. Soit $E = C([0,1])$ l'espace préhilbertien muni du produit scalaire $< f, g >= \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$.
Posons

$$u(f) = \int_0^{1/2} f(x)dx, f \in E.$$

Vérifier que u donne une fonctionnelle linéaire continue dans E; démontrer que u ne peut pas être représentée comme

$$u(f) = < f, \xi >, f \in E,$$

pour un $\xi \in E$.

Exercices
(Math. 2ème cycle)

Analyse avancée B

Eté 1998-99

Série 10

Soit $-\infty < a < b < \infty$. Vérifier l'orthogonalité des familles suivantes dans l'espace préhilbertien $C([a,b])$ muni de son produit scalaire canonique : $< f, g >= \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$:

(i) $x \mapsto \exp\left(\frac{2n\pi x i}{b-a}\right), n \in \mathbb{Z}$

(ii) $x \mapsto \cos\frac{2n\pi x}{b-a}, n = 0, 1, \ldots, \; x \mapsto \sin\frac{2n\pi x}{b-a}, n = 1, 2, \ldots$.

En admettant que chacune de ces familles est une base orthogonale dans $C([a,b])$, écrire $f \in C([a,b])$ comme

(iii) $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(\frac{2n\pi x i}{b-a}\right)$ (série de Fourier complexe)

(iv) $f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right)\right\}$ (série de Fourier réelle)

en indiquant les formules pour les a_n, b_n, c_n.

En gardant les notations de (i) - (iv) même pour les fonctions $f \in R([a,b])$, fonctions complexes intégrables au sens de Riemann dans $[a,b]$, écrire les séries de Fourier complexe et réelle pour

(v) $f(x) = \begin{cases} c_1 \text{ si } & -\pi \leq x < 0 \\ c_2 \text{ si } & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

où c_1, c_2 sont deux constantes (ici $a = -\pi, b = \pi$). En utilisant la formule de Parseval sur f dans (v) établir que

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}$$

d'où déduire que $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \pi^2/6$.

Exercices
(Math. 2ème cycle)

Analyse avancée B

Eté 1998-99

Série 11

1. Soient X, Y deux espaces métriques compacts, $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ continue, $\varepsilon > 0$. Démontrer qu'il existe $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in C(X)$, $\psi_1, \ldots, \psi_n \in C(Y)$ tels que

$$\sup_{(x,y)\in X\times Y} \mid f(x,y) - \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x)\ \psi_j(y) \mid < \varepsilon.$$

Généraliser cet énoncé au cas de N espaces métriques compacts $X_1, \ldots, X_N$.

2. Soient $0 \leq a < b < \infty$, $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ continue, $\varepsilon > 0$. Démontrer qu'il existe $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ tels que

$$\sup_{a\leq x\leq b} \mid f(x) - \sum_{j=0}^{n} a_j\ x^{2j} \mid < \varepsilon.$$

Que pouvez-vous dire si $a < 0 < b$, $a, b \in \mathbb{R}$?

Exercices
(Math. 2ème cycle)

Analyse avancée B

Eté 1998-99

Série 12

1. Soit $u(x_0, x_1, \ldots) = (\lambda_0 x_0, \lambda_1 x_1, \ldots)$ où $x = (x_0, x_1, \ldots) \in \ell^2$.

   i) Vérifier que $ux \in \ell^2$ pour tout $x \in \ell^2$ si et seulement si $\sup_{j \geq 0} |\lambda_j| = M < \infty$ et alors $u \in \mathcal{L}(\ell^2)$ avec $\|u\| = M$.

   ii) Déterminer u^* (en supposant que $M < \infty$) et voir que $u = u^*$ si et seulement si les λ_j sont réels.

2. Soit

$$Kf(x) = \int_a^b k(x,y) f(y) dy, \ -\infty < a < b < \infty,$$

   où $k \in C([a,b] \times [a,b])$.

   i) Démontrer que $K \in \mathcal{L}(E)$ où E est l'espace préhilbertien $C([a,b])$ avec

$$\|K\| \leq M = \left(\int_a^b \int_a^b |k(x,y)|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

   ii) Démontrer que $K \in \mathcal{L}(H)$ où H est l'espace hilbertien $L^2([a,b])$ avec $\|K\| \leq M$.

   iii) Déterminer K^*; voir que $K = K^*$ si $k(x,y) = \overline{k(y,x)}$, pour $(x,y) \in [a,b] \times [a,b]$.

Exercices
(Math. 2ème cycle)

Analyse avancée B

Eté 1998-99

Série 13

1. Soit $u(x_0, x_1, \ldots) = (\lambda_0 x_0, \lambda_1 x_1, \ldots)$ où $x = (x_0, x_1, \ldots) \in \ell^2$ avec $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $\sup_{j\geq 0} |\lambda_j| = M < \infty$. Démontrer que $\sigma_p(u) = A$, $\sigma(u) = \overline{A}$, où A est la partie de $\mathbb{C}$ formée par les λ_j.

2. Soit $E = C([0,1])$, l'espace préhilbertien muni du produit scalaire de L^2. Posons, pour $f \in E$,

$$uf(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

   i) Vérifier que si $\lambda \in \mathbb{C}^*$ alors $(\lambda - u)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ en établissant que

$$(\#) \qquad (\lambda - u)^{-1} f(x) = \frac{1}{\lambda} f(x) + \frac{1}{\lambda^2} e^{x/\lambda} \int_0^x f(t) e^{-t/\lambda} dt, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

   ii) Démontrer que u est injectif mais non surjectif. Conclure que $\sigma(u) = \{0\}$ et que u n'a aucune valeur propre.

   iii) Démontrer que

$$u^n f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

   Utiliser la série de Neumann formellement (sans se soucier de la convergence) pour obtenir une expression de $(\lambda - u)^{-1} f(x)$. Montrer que cette expression est équivalente à la formule $(\#)$.

Exercices
(Math. 2ème cycle)

Analyse avancée B

Eté 1998-99

Série 14

1. Soit $E = C([0,1])$ l'espace préhilbertien muni de sa norme L^2 et

$$u\,f(x) = \int_0^1 (x+y)f(y)dy.$$

Démontrer que:

i) $u : E \to E$ est un opérateur linéaire continu et symétrique du rang 2 (donc u est compact),

ii) $\sigma(u) = \sigma_p(u) = \{0, \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\}$,

iii) Les valeurs propres $\lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ sont simples avec fonction propre $f(x) = x + (\lambda - \frac{1}{2})$,

iv) $\lambda = 0$ est une valeur propre de multiplicité ∞, les fonctions propres correspondantes étant les $f \in \{1, x\}^{\perp}$.

2. Pour $x = (x_0, x_1, x_2, \ldots) \in \ell^2$ posons

$$u\,x = (x_1, x_2, \ldots), v\,x = (0, x_0, x_1, \ldots).$$

Démontrer que:

i) $u, v \in \mathcal{L}(\ell^2)$ avec $\|u\| = 1,\ \|v\| = 1,\ v = u^*$,

ii) u est surjectif mais non injectif,

iii) v est injectif mais non surjectif,

iv) u n'est pas normal (en vérifiant que $u\,u^*x = u^*u\,x$ si et seulement si $x_0 = 0$).