

Série 1

La transformation de Lorentz

Soient \mathcal{R} un référentiel d'inertie et \mathcal{R}' un référentiel en translation uniforme de vitesse \vec{V} par rapport à \mathcal{R} .

\mathcal{R} et \mathcal{R}' sont munis de repères cartésiens (O, x, y, z) et (O', x', y', z') , ainsi que d'horloges t et t' , tels que:

- En $t=0$, les deux repères coïncident et $t=t'$.
- La vitesse \vec{V} de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} est donnée par: $\vec{V} = (V, 0, 0)$.

Tout événement \mathcal{E} est paramétrisé dans \mathcal{R} (resp. \mathcal{R}') par le quadruple (t, x, y, z) (resp. (t', x', y', z')).
Soit Λ la transformation:

$$\Lambda : (t, x, y, z) \mapsto (t', x', y', z') = \Lambda(t, x, y, z)$$

On demande:

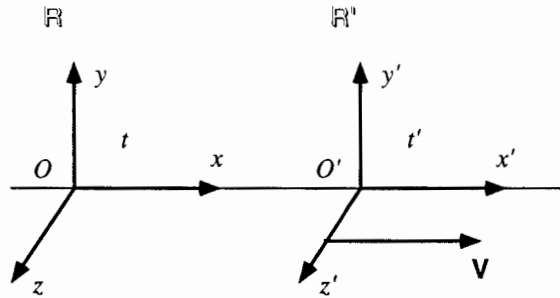
1. D'établir l'expression de la transformation Λ .
2. De montrer que l'ensemble de ces transformations Λ forme un groupe avec la loi de composition: $(\Lambda_1 \circ \Lambda_2)x = \Lambda_1(\Lambda_2 x)$
(avec les matrices)

Indications:

- La transformation Λ est linéaire.
- L'espace est isotrope ($\Rightarrow y' = y, z' = z$)
- Postulat de la relativité restreinte: "La vitesse de la lumière est indépendante du référentiel"
- Lorsque $V \rightarrow 0$, Λ tend vers l'identité.

Corrigé série 1

La transformation de Lorentz



La vitesse de la lumière étant une constante indépendante du référentiel, on peut paramétriser un événement par

$$(ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv x^\mu$$

On veut chercher les transformations de coordonnées entre référentiels d'inertie, i.e. entre référentiels par rapport auxquels un corps isolé a un mouvement rectiligne et uniforme. Cela impose que ces transformations soient linéaires:

$$x'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda_\nu^\mu x^\nu \quad (1)$$

Soient deux événements \mathcal{E} et \mathcal{E}' , introduisons l'intervalle I défini par:

$$I = (x^1(\mathcal{E}) - x^1(\mathcal{E}'))^2 + (x^2(\mathcal{E}) - x^2(\mathcal{E}'))^2 + (x^3(\mathcal{E}) - x^3(\mathcal{E}'))^2 - (x^0(\mathcal{E}) - x^0(\mathcal{E}'))^2 \quad (2)$$

Par cette définition, il est clair que pour tout événements \mathcal{E} et \mathcal{E}' reliés par un rayon lumineux, on aura $I = 0$ quelque soit le référentiel d'inertie.

La linéarité des transformations (1), implique que pour tout intervalle I on a (selon \mathcal{R}) $I = nI'$ où $n = n(\vec{V})$. Si l'on change $x \leftrightarrow -x$, $y \leftrightarrow -y$, $x' \leftrightarrow -x'$ et $y' \leftrightarrow -y'$ sur la figure ci-dessus, on voit que selon \mathcal{R}' , \mathcal{R} a une vitesse $\vec{V} = (V, 0, 0)$. Le raisonnement ci-dessus selon \mathcal{R}' conduit cette fois à $I' = nI$; donc $n^2 = 1$, $n = \pm 1$; or comme $(t', x', y', z') \rightarrow (t, x, y, z)$ lorsque $V \rightarrow 0$, on a $n = 1$. La conclusion est que l'intervalle I défini par (2) est invariant sous la transformation recherchée.

Posons $T = ict$ et $T' = ict'$, avec le postulat d'homogénéité de l'espace (qui conduit à $y' = y$ et $z' = z$), l'invariance de I peut s'écrire:

$$\Delta x^2 + \Delta T^2 = \Delta x'^2 + \Delta T'^2 \quad (3)$$

Il est clair que dans l'espace à deux dimensions (x, T) toute transformation

$$x' = x \cos \theta + T \sin \theta \quad (4)$$

$$T' = -x \sin \theta + T \cos \theta \quad (5)$$

laisse invariant l'intervalle $\Delta x^2 + \Delta T^2$ (de même que les rotations dans \mathbb{R}^2 laissent invariant l'intervalle $|\vec{r} - \vec{r}'|^2$)

Les repères de \mathcal{R} et \mathcal{R}' sont choisis de telle sorte que:

$$x' = 0 \Leftrightarrow x = Vt \Leftrightarrow x = \frac{VT}{ic}$$

en introduisant cela dans (4), on a

$$x' = 0 = \cos \theta \frac{VT}{ic} + T \sin \theta \Leftrightarrow \tan \theta = i \frac{V}{c}$$

mais

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Définissons

$$\beta \equiv \frac{V}{c}$$

$$\gamma \equiv \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

(4) et (5) peuvent ainsi s'écrire:

$$x' = \cos \theta (x + T \tan \theta) = \gamma (x + ict \frac{V}{c}) = \gamma (x - \beta ct)$$

$$\frac{T'}{i} = ct' = \cos \theta \left(-\frac{x \tan \theta}{i} + \frac{T}{i} \right) = \gamma (-\beta x + ct)$$

On a ainsi obtenu la transformation de Lorentz resumée ci-dessous:

$$t' = \gamma \left(-\frac{\beta}{c} x + t \right) \quad (6)$$

$$x' = \gamma (x - \beta ct) \quad (7)$$

$$y' = y \quad (8)$$

$$z' = z \quad (9)$$

Avec $\beta = \frac{V}{c}$ et $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

Ainsi, la transformation de Lorentz $\Lambda : x^\mu \mapsto x'^\mu = \Lambda x^\mu$ prend la forme matricielle simple:

$$\Lambda(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vérifions maintenant que l'ensemble L des matrices $\Lambda(\beta)$, $\beta \in \mathbb{R}$ forme un groupe avec la loi de composition $(\Lambda(\beta_1) \circ \Lambda(\beta_2))x = \Lambda(\beta_1)(\Lambda(\beta_2)x)$.

1. $\Lambda(\beta_1) \circ \Lambda(\beta_2) \in L$

En effet

$$\Lambda(\beta_1)\Lambda(\beta_2)x = (\Lambda(\beta_1)\Lambda(\beta_2))x$$

$$\Lambda(\beta_1)\Lambda(\beta_2) = \begin{pmatrix} \gamma_1\gamma_2(1 + \beta_1\beta_2) & -\gamma_1\gamma_2(\beta_1 + \beta_2) & 0 & 0 \\ -\gamma_1\gamma_2(\beta_1 + \beta_2) & \gamma_1\gamma_2(1 + \beta_1\beta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

posons

$$\gamma_3 \equiv \gamma_1\gamma_2(1 + \beta_1\beta_2)$$

$$\beta_3 \equiv \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2}$$

alors

$$\Lambda(\beta_1)\Lambda(\beta_2) = \begin{pmatrix} \gamma_3 & -\beta_3\gamma_3 & 0 & 0 \\ -\beta_3\gamma_3 & \gamma_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de plus

$$1 - \beta_3^2 = 1 - \frac{\beta_1^2 + 2\beta_1\beta_2 + \beta_2^2}{(1 + \beta_1\beta_2)^2} = \frac{1 + \beta_1^2\beta_2^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2}{(1 + \beta_1\beta_2)^2} \\ = \frac{(1 - \beta_1^2)(1 - \beta_2^2)}{(1 + \beta_1\beta_2)^2} = \frac{1}{\gamma_1^2\gamma_2^2(1 + \beta_1\beta_2)^2} = \frac{1}{\gamma_3^2}$$

On vient de prouver que $\Lambda(\beta_3) \equiv \Lambda(\beta_1)\Lambda(\beta_2) \in L$

2. Element neutre:

Il est clair que

$$\Lambda(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est l'unique élément neutre du groupe ($\forall\beta, \Lambda(0) \circ \Lambda(\beta) = \Lambda(\beta) \circ \Lambda(0) = \Lambda(\beta)$). On le vérifie aisément en résolvant l'équation:

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}$$

3. Element inverse:

En résolvant l'équation

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On montre facilement que $\forall\beta$, la transformation $\Lambda(-\beta)$ est l'inverse de $\Lambda(\beta)$.

4. Associativité: Elle est immédiate par l'associativité de la multiplication matricielle.

Les points 1 à 4 vérifient que l'ensemble (L, \circ) forme un groupe.

Finalement introduisons la grandeur *rapidité* η , définie par

$$\tanh \eta \equiv \beta$$

Une transformation de Lorentz peut alors s'écrire:

$$\Lambda(\beta) = \Lambda(\eta) = \begin{pmatrix} \cosh \eta & -\sinh \eta & 0 & 0 \\ -\sinh \eta & \cosh \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La composition des transformation de Lorentz devient alors simple:

$$\Lambda(\eta_1) \circ \Lambda(\eta_2) = \Lambda(\eta_1 + \eta_2)$$

Remarques:

Dans cet exercice, nous nous sommes restreint à un groupe de transformations particulières appelées *boosts* de vitesse \vec{V} . Le groupe de Lorentz proprement dit est beaucoup plus grand. Ce dernier étant lui-même un sous-groupe du groupe de Poincaré qui tient compte des translations d'espace temps ($x^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \lambda_\nu^\mu x^\nu + a^\mu$). Tous ceci est décrit dans l'annexe à ce corrigé.

Transformations de Lorentz: Complément

Convention:

Nous allons utiliser ici la convention de sommation d'Einstein, qui veut que dans un terme, la présence d'un même indice en haut et en bas correspond à la sommation sur cet indice: $a^i b_i \equiv \sum_i a^i b_i$.

Les transformations de Lorentz trouvées en exercice de la série 1 correspondent à un choix particulier (et délibéré) du système de coordonnées. Examinons le cas plus général.

1. coordonnées

Soit \mathcal{R} un référentiel d'inertie. L'observation montre qu'il est toujours possible de paramétriser un événement par quatre nombres réels, i.e. que l'on peut définir une application:

$$\begin{aligned} \{\text{Événements}\} &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ E &\longmapsto (x_E^0, x_E^1, x_E^2, x_E^3) \end{aligned}$$

x_E^μ , $\mu = 0, \dots, 3$ sont les coordonnées **contravariantes** de l'événement E .

Notations: $(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (x^0, \mathbf{x}) \equiv x^\mu$

Remarques:

- x^μ a la dimension d'une longueur.
- $x_E^0 = ct_E$ est la coordonnée "temps", elle caractérise l'instant de l'événement E par rapport à \mathcal{R} .
- $\mathbf{x}_E \equiv (x_E^1, x_E^2, x_E^3)$ est la coordonnée "espace", elle caractérise le lieu de l'événement E par rapport à \mathcal{R} .

2. Intervalle d'espace-temps

Soient A et B deux événements de coordonnées x_A^μ et x_B^μ . On définit l'**intervalle** d'espace-temps entre A et B par:

$$\Delta x^\mu \equiv x_A^\mu - x_B^\mu$$

3. Produit scalaire

Soient Δx_1 et Δx_2 deux intervalles, on définit le "produit scalaire" de Δx_1 et Δx_2 par:

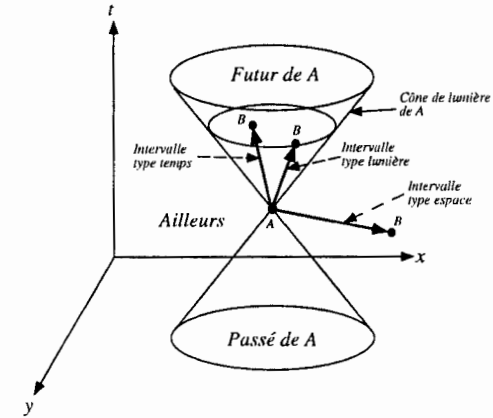
$$\Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \equiv \eta_{\mu\nu} \Delta x_1^\mu \Delta x_2^\nu$$

et pour tout intervalle Δx , on définit la forme quadratique:

$$\Delta s^2 \equiv \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu$$

Sous forme différentielle:

$$ds^2 \equiv \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$



Remarques:

Pour tout événement A de coordonnées x_A^μ , on associe une surface dans \mathbb{R}^4 définie par l'équation $\eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu = \Delta s^2 = 0$, avec $\Delta x^\mu = x_A^\mu - x^\mu$. Cette surface est appelée **cône de lumière de A**. Soit $\Delta s_B^2 = \eta_{\mu\nu} (x_A^\mu - x_B^\mu)(x_A^\nu - x_B^\nu)$, alors:

- $\Delta s_B^2 = 0$: l'événement B est sur le cône de lumière de A , seul un rayon lumineux peut relier A à B . L'intervalle $x_A^\mu - x_B^\mu$ est dit de **type lumière** (c.f. figure).
- $\Delta s_B^2 > 0$: l'événement B est à l'extérieur du cône de lumière de A . Aucune information partant de A ne peut atteindre B , autrement dit, il n'y a pas de relations causales entre A et B (A ne peut être la cause de B). Dans ce cas, l'intervalle $x_A^\mu - x_B^\mu$ est dit de **type espace**.
- $\Delta s_B^2 < 0$: l'événement B est à l'intérieur du cône de lumière de A . Il peut dans ce cas exister une relation causale entre A et B . L'intervalle $x_A^\mu - x_B^\mu$ est dit de **type temps**.

Pour ces définitions, nous avons introduit le tenseur $\eta_{\mu\nu}$ défini par:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{cases} -1 & , \text{ si } \mu = \nu = 0 \\ 1 & , \text{ si } \mu = \nu = 1, 2, 3 \\ 0 & , \text{ sinon} \end{cases}$$

Ou encore sous forme matricielle:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\eta_{\mu\nu}$ est la **métrique** de la relativité restreinte.

4. Transformations de Lorentz

Armés de ces notions, on cherche maintenant à déterminer les transformations $x^\mu \mapsto x'^\mu(x^\mu)$ qui permettent de passer d'une paramétrisation par rapport à un référentiel d'inertie \mathcal{R} , à une autre paramétrisation par rapport à un autre référentiel d'inertie \mathcal{R}' .

Pour cela nous allons utiliser deux hypothèses:

- Hypothèse (a)

La transformation est linéaire et inversible, i.e.

$$\exists \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \text{ tel que } \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu} = \delta^\mu_\nu$$

- Hypothèse (b)

La transformation laisse la forme quadratique invariante, i.e.:

$$\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu$$

A partir de ces hypothèses, on trouve le résultat suivant:

La transformation est de la forme:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \quad (1)$$

où Λ^μ_ν , $a^\mu \in \mathbb{R}$ doivent satisfaire aux conditions:

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu \quad (2)$$

(ou sous forme matricielle: $\eta = \Lambda^t \eta \Lambda$)

Inversement, il est facile de montrer que toute transformation de la forme (1) satisfaisant (2) vérifie les hypothèses (a) et (b). D'où la définition:

Définition:

On appelle transformation de Lorentz toute application:

$$(a, \Lambda) \quad \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ x^\mu \longmapsto x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$$

tel que $\eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu$

Remarques:

- On peut facilement montrer que $\Delta x \cdot \Delta y = \Delta x' \cdot \Delta y'$, la transformation de Lorentz conserve le produit scalaire.
- Si deux événements sont reliés par un rayon lumineux, leur intervalle est tel que $\Delta s^2 = 0$. Comme la transformation de Lorentz conserve la norme, $\Delta s'^2 = 0$. Cela revient à dire que la transformation de Lorentz laisse invariant la vitesse de la lumière, ce qui est en accord avec le second postulat de la relativité restreinte, qui veut la vitesse de la lumière soit indépendante du référentiel.
- Si l'on avait choisi comme hypothèse (b) que $ds^2 = 0 \Leftrightarrow ds'^2 = 0$, ce qui revient à ne considérer que les transformations qui laissent invariant la vitesse de la lumière, on aurait trouvé beaucoup plus de transformations, en particulier celles non linéaires en x^μ . Dans ce cas, un mouvement de rotation uniforme (MRU) relativement à \mathcal{R} ne l'aurait pas été relativement à \mathcal{R}' ; ce qui est en désaccord avec le premier postulat, qui veut que tous les référentiels d'inertie sont équivalents.
- Propriétés de la matrice Λ :
 - $(\Lambda^0_0)^2 \geq 1$
 - $\det(\Lambda) = \pm 1$

5. Groupe de Lorentz (Poincaré)

L'ensemble des transformations de Lorentz (a, Λ) forme un groupe avec la loi de composition:

$$(a_1, \Lambda_1) \circ (a_2, \Lambda_2) \equiv (a_2 + \Lambda_2 a_1, \Lambda_2 \Lambda_1)$$

- L'élément neutre est $(0, I)$.
- L'inverse de (a, Λ) est $(a, \Lambda)^{-1} = (-\Lambda^{-1}a, \Lambda^{-1})$.
- La loi est associative: $((a_1, \Lambda_1) \circ (a_2, \Lambda_2)) \circ (a_3, \Lambda_3) = (a_1, \Lambda_1) \circ ((a_2, \Lambda_2) \circ (a_3, \Lambda_3))$

Vous pouvez le vérifier si le cœur vous en dit !

Ce groupe s'appelle groupe de **Poincaré**, ou groupe de **Lorentz inhomogène**.

L'ensemble des transformations de Poincaré $(0, \Lambda) \equiv \Lambda$ est un sous-groupe appelé groupe de **Lorentz (homogène)**, que l'on note \mathcal{L} .

Le groupe \mathcal{L} est formé de quatre composantes:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_+^+ \cup \mathcal{L}_-^+ \cup \mathcal{L}_+^- \cup \mathcal{L}_-^-$$

Selon les valeurs de Λ^0_0 et $\det(\Lambda)$:

	$\text{sign}(\Lambda^0_0)$	$\det(\Lambda)$	
\mathcal{L}_+^+	+	+1	Composante orthochrone propre
\mathcal{L}_-^+	+	-1	Composante orthochrone impropre
\mathcal{L}_+^-	-	+1	Composante pseudochrone propre
\mathcal{L}_-^-	-	-1	Composante pseudochrone impropre

Remarques:

- Une transformation orthochrone ne renverse pas le signe du temps.
- Définissons les transformations \mathcal{P} , \mathcal{T} par:

$$\mathcal{P}(x^0, \mathbf{x}) = (x^0, -\mathbf{x})$$

$$\mathcal{T}(x^0, \mathbf{x}) = (-x^0, \mathbf{x})$$

$$\mathcal{PT}(x^0, \mathbf{x}) = (-x^0, -\mathbf{x})$$

Alors, il est clair que $\mathcal{P} \in \mathcal{L}_-^+$, $\mathcal{T} \in \mathcal{L}_-^+$, $\mathcal{PT} \in \mathcal{L}_+^-$ et de plus $I \in \mathcal{L}_+^+$.

On a introduit ces transformations car en fait \mathcal{L} peut s'écrire:

$$\mathcal{L} = \left\{ \Lambda_1 \Lambda_2 \mid \Lambda_1 \in \mathcal{L}_+^+, \Lambda_2 \in \{I, \mathcal{P}, \mathcal{T}, \mathcal{PT}\} \right\}$$

Cas particuliers

- (a) Le groupe \mathcal{L}_+^+ contient le sous-groupe des rotations propres \mathcal{R}_+

$$\mathcal{R}_+ = \left\{ \Lambda \in \mathcal{L}_+^+ \mid \Lambda^0_\mu = \delta^0_\mu, \Lambda^i_j = R^i_j; \text{ avec } \mathbf{R}\mathbf{R}^t = I \text{ et } \det(\mathbf{R}) = 1 \right\}$$

(b) Transformations de Lorentz pures:

Soit une vitesse

$$\mathbf{v} = v \mathbf{n} = c \beta \mathbf{n} = c \tanh(\eta) \mathbf{n}$$

où $|\mathbf{n}| = 1$ et η est le paramètre de **rapidité**. Alors les transformations de Lorentz pures de vitesse \mathbf{v} sont données par:

$$\Lambda(\mathbf{v}) = \Lambda(\eta) = \begin{cases} \Lambda_0^0 = \cosh(\eta) \\ \Lambda_i^0 = \Lambda_0^i = -\sinh(\eta)n_i \\ \Lambda_j^i = \delta_j^i + n^i n_j (\cosh(\eta) - 1) \end{cases}$$

Si on pose $\cosh(\eta) = \left(1 - \tanh^2(\eta)\right)^{-1/2} = \left(1 - \beta^2\right)^{-1/2} \equiv \gamma$, on a:

$$\Lambda(\mathbf{v}) = \begin{cases} \Lambda_0^0 = \gamma \\ \Lambda_i^0 = \Lambda_0^i = -\gamma \frac{v_i}{c} \\ \Lambda_j^i = \delta_j^i + (\gamma - 1) \frac{v_i v_j}{v^2} \end{cases}$$

Remarques:

- Les transformations de Lorentz pures sont aussi appelées transformations de Lorentz sans rotation ou encore **boosts**.
- Si l'on pose $\mathbf{v} = (\beta c, 0, 0)$, on obtient le résultat de la série 1.
- L'ensemble des **boosts** n'est **PAS** un sous-groupe de \mathcal{L}_+^\uparrow , mais un sous-ensemble; en effet:

$$\Lambda(\eta_1)\Lambda(\eta_2) = \mathcal{R}_+(\theta\mathbf{n})\Lambda(\eta)$$

Par contre l'ensemble des boosts $\Lambda(v\mathbf{n})$, où \mathbf{n} est un vecteur unitaire fixe, est un sous-groupe de \mathcal{L}_+^\uparrow . C'est ce qui a été montré dans la série 1.

Notons enfin que tout élément Λ de \mathcal{L}_+^\uparrow peut s'écrire sous la forme:

$$\Lambda = \mathcal{R}_+\Lambda(\mathbf{v})$$

où $\mathcal{R}_+(\theta)$ est une rotation propre et $\Lambda(\mathbf{v})$ est un boost. Cela revient à dire que par un choix judicieux du système de coordonnées, on peut toujours se ramener au cas étudié dans la série 1.

Ce complément est tiré du cours "*Relativité et cosmologie*" donné en 4ème année par le professeur C. Gruber.

Série 2

Quadrivecteur énergie-impulsion

On sait que $\{E, \vec{p}c\}$ est un quadrivecteur. Il s'agit ici d'établir les expressions de l'impulsion \vec{p} en fonction de la vitesse \vec{v} partir de l'expérience de pensée suivante (Einstein) :

Deux particules se dirigent l'une vers l'autre avec des quantités de mouvement opposées l'une à l'autre. Ces particules sont diffusées élastiquement par une interaction à distance. Le système est complètement isolé. On fait l'hypothèse que \vec{p} est de la forme $\vec{p} = f(\frac{v}{c})\vec{v}$. On utilise trois référentiels Σ, Σ' et Σ'' . Σ est tel que la collision y est symétrique. Dans Σ' et Σ'' , la particule 1, respectivement la particule 2, ne se déplace que selon Oy . On exprimera \vec{v}'' en fonction de \vec{v}' (considérant la transformation directe de Σ' Σ'' des vitesses des particules) et, en imposant la conservation de la quantité de mouvement, on déduira l'expression $f(\frac{v}{c})$ dans $\vec{p} = f(\frac{v}{c})\vec{v}$.

ça veut dire quoi ?

Indication :

Utiliser les formules de transformation des vitesses d'un référentiel à un autre à partir des formules de transformation de $\{ct, \vec{x}\}$.

Corrigé série 2

Quadrivecteur énergie-impulsion

Dans cet exercice, nous allons considérer la diffusion élastique de deux particules de même masse m . Avant de commencer, posons quelques conventions de notation:

- Les deux particules seront indicées par 1 et 2 avant la diffusion et par 3 et 4 après la diffusion.
- Les vitesses seront notées $\beta \equiv \mathbf{v}/c$
- La quantité de mouvement d'une particule i s'écrira alors

$$\mathbf{p}_i = f(\beta_i, m_i)c\beta_i \quad (1)$$

- $\beta_{\mathcal{R}'}$ est la vitesse de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R}
- $\beta_{\mathcal{R}''}$ est la vitesse de \mathcal{R}'' par rapport à \mathcal{R}
- $\beta'_{\mathcal{R}''}$ est la vitesse de \mathcal{R}'' par rapport à \mathcal{R}'
- On suppose que l'énergie cinétique T d'une particule est donnée par

$$T = T(m, |\mathbf{p}|) \quad (2)$$

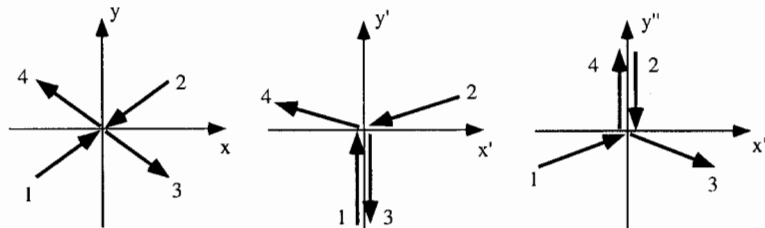
Rappel:

Formules de transformation des vitesses entre un référentiel \mathcal{R} et un référentiel \mathcal{R}' en translation selon Ox par rapport à \mathcal{R} :

$$\beta'_x = \frac{\beta_x - \beta_{\mathcal{R}'}}{1 - \beta_x \beta_{\mathcal{R}'}} \quad (3)$$

$$\beta'_y = \frac{\beta_y}{\gamma_{\mathcal{R}'}(1 - \beta_x \beta_{\mathcal{R}'})} \quad (4)$$

$$\beta'_z = \frac{\beta_z}{\gamma_{\mathcal{R}'}(1 - \beta_x \beta_{\mathcal{R}'})} \quad (5)$$



Considérons maintenant la diffusion élastique de deux particules 1 et 2 de même masse m . Plaçons nous d'abord dans un référentiel \mathcal{R} tel que $\beta_1 = -\beta_2$.

Le système étant isolé, la quantité de mouvement totale est conservée lors de la réaction, soit (en utilisant (1))

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 = 0 \quad (6)$$

Dans une diffusion élastique, l'énergie cinétique totale est conservée:

$$T_1 + T_2 = T_3 + T_4 \quad (7)$$

Comme d'après (6) $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$ et $|\mathbf{p}_3| = |\mathbf{p}_4|$, on conclut que $T_1 = T_2 = T_3 = T_4$, donc $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = |\mathbf{p}_3| = |\mathbf{p}_4|$ et finalement $|\beta_1| = |\beta_2| = |\beta_3| = |\beta_4|$.

La relation (6) impliquant que $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ et \mathbf{p}_4 sont coplanaires, le problème devient bi-dimensionnel et on va choisir un système de coordonnées tels que (voir figure):

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix} \quad \beta_3 = \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} \quad \beta_4 = \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix} \quad (8)$$

Plaçons nous maintenant dans un référentiel \mathcal{R}' en translation par rapport à \mathcal{R} avec une vitesse $\beta_{\mathcal{R}'} = \begin{pmatrix} \beta_{\mathcal{R}'} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Dans \mathcal{R}' , on veut que $\beta'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta'_1 \end{pmatrix}$. De la formule (3)

$$\beta'_{1x} = \frac{\beta_{1x} - \beta_{\mathcal{R}'}}{1 - \beta_{1x}\beta_{\mathcal{R}'}} = 0$$

On obtient facilement $\beta_{\mathcal{R}'} = \beta_{1x} = a$.

Le même raisonnement appliqué à \mathcal{R}'' , où l'on demande que $\beta''_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta''_1 \end{pmatrix}$, amène à

$$\beta_{\mathcal{R}''} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix}$$

On peut maintenant calculer aisément les vitesses des particules 1, 2, 3 et 4 dans les référentiels \mathcal{R}' et \mathcal{R}'' , à l'aide des formules (3), (4) et (5) et en se rappelant que $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, soit

$$\gamma_{\mathcal{R}'} = \gamma_{\mathcal{R}''} = (1 - a^2)^{-1/2}$$

Il vient:

Selon \mathcal{R}' :

$$\beta'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{b}{(1-a^2)^{1/2}} \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\beta'_2 = \begin{pmatrix} \frac{-2a}{1+a^2} \\ \frac{-b(1-a^2)^{1/2}}{1+a^2} \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\beta'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-b}{(1-a^2)^{1/2}} \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\beta'_4 = \begin{pmatrix} \frac{-2a}{1+a^2} \\ \frac{b(1-a^2)^{1/2}}{1+a^2} \end{pmatrix} \quad (12)$$

Selon \mathcal{R}'' :

$$\beta_1'' = \left(\begin{array}{c} \frac{2a}{1+a^2} \\ \frac{b(1-a^2)^{1/2}}{1+a^2} \end{array} \right) \quad (13)$$

$$\beta_2'' = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \frac{-b}{(1-a^2)^{1/2}} \end{array} \right) \quad (14)$$

$$\beta_3'' = \left(\begin{array}{c} \frac{2a}{1+a^2} \\ \frac{-b(1-a^2)^{1/2}}{1+a^2} \end{array} \right) \quad (15)$$

$$\beta_4'' = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \frac{b}{(1-a^2)^{1/2}} \end{array} \right) \quad (16)$$

Posons:

$$d = \frac{2a}{1+a^2} \quad (17)$$

$$c = \frac{b(1-a^2)^{1/2}}{1+a^2} \quad (18)$$

$$g = \frac{b}{(1-a^2)} \quad (19)$$

On peut alors écrire:

Selon \mathcal{R}' :

$$\beta_1' = \left(\begin{array}{c} 0 \\ g \end{array} \right) \quad (20)$$

$$\beta_2' = \left(\begin{array}{c} -d \\ -c \end{array} \right) \quad (21)$$

$$\beta_3' = \left(\begin{array}{c} 0 \\ -g \end{array} \right) \quad (22)$$

$$\beta_4' = \left(\begin{array}{c} -d \\ c \end{array} \right) \quad (23)$$

Selon \mathcal{R}'' :

$$\beta_1'' = \left(\begin{array}{c} d \\ e \end{array} \right) \quad (24)$$

$$\beta_2'' = \left(\begin{array}{c} 0 \\ -g \end{array} \right) \quad (25)$$

$$\beta_3'' = \left(\begin{array}{c} d \\ -c \end{array} \right) \quad (26)$$

$$\beta_4'' = \left(\begin{array}{c} 0 \\ g \end{array} \right) \quad (27)$$

Considérons maintenant le passage direct de \mathcal{R}' à \mathcal{R}'' . $\beta_{\mathcal{R}''}^{\mathcal{R}'}$, la vitesse de \mathcal{R}'' par rapport à \mathcal{R}' doit être telle que que la composante selon $O''x''$ de la particule 2 soit nulle, i.e.

$$0 = \beta_{2x}'' = \frac{\beta_{2x}' - \beta_{\mathcal{R}''}^{\mathcal{R}'}}{1 - \beta_{2x}'\beta_{\mathcal{R}''}^{\mathcal{R}'}} = \frac{-d - \beta_{\mathcal{R}''}^{\mathcal{R}'}}{1 + d\beta_{\mathcal{R}''}^{\mathcal{R}'}}$$

Soit $\beta_{\mathcal{R}''}^{\mathcal{R}'} = -d$.

Par cette transformation, β_1'' et β_2'' valent:

$$\beta_1'' = \left(\begin{array}{c} d \\ g(1-d^2)^{1/2} \end{array} \right) \quad (28)$$

$$\beta_2'' = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \frac{-e}{(1-d^2)^{1/2}} \end{array} \right) \quad (29)$$

En identifiant (28) à (24), on a

$$g(1-d^2)^{1/2} = e \quad (30)$$

Projetons la conservation de la quantité de mouvement sur l'axe $O''y''$:

$$p_{1y}'' + p_{2y}'' = p_{3y}'' + p_{4y}''$$

soit, en utilisant (1), (24), (25), (26) et (27):

$$f(\beta_1'')e - f(g)g = f(g)g - f(\beta_2'')c \quad (31)$$

Comme $\beta_1'' = \beta_2'' = \sqrt{d^2 + e^2}$, (31) peut s'écrire, en tenant compte de (30)

$$f(\sqrt{d^2 + e^2})e = \frac{g}{e}f(g) = \frac{f(g)}{\sqrt{1-d^2}} \quad (32)$$

Faisons tendre b vers 0, alors $c \rightarrow 0$ (18) et $g \rightarrow 0$ (19); la relation précédente s'écrit:

$$f(d) = \frac{f(0)}{\sqrt{1-d^2}} \quad (33)$$

A la limite non relativiste ($\beta \rightarrow 0$), on sait que $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, autrement dit, $\lim_{\beta \rightarrow 0} f(\beta) = f(0) = m$. Ainsi

$$f(d) = \frac{m}{\sqrt{1-d^2}}$$

et le résultat final:

$$\mathbf{p}(v, m) = \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \mathbf{v}$$

Série 3

1 Energie disponible en mode cible fixe et en mode collisionneur

Calculer l'énergie disponible dans une collision entre deux particules de même masse dans les deux cas suivants:

- **Expérience à cible fixe** : une particule-projectile entre en collision avec une particule-cible au repos.
- **Expérience en collisionneur** : les deux particules entrent en collision avec des quantités de mouvement opposées et égales.

Quelle devrait être la quantité de mouvement de la particule-projectile d'une expérience à cible fixe pour que l'énergie disponible soit la même que dans une expérience sur collisionneur ?
idée: m=cte ⇒ calculer pc pour collisionneur et cible fixe

Prendre l'exemple de l'accélérateur SPS du CERN (Super Proton Synchrotron) où circulent des faisceaux de protons et d'antiprotons de quantité de mouvement $p = 315 \text{ GeV}/c$.

2 Cinématique dans les référentiels du centre de masse et du laboratoire

Les particules produites dans les réactions à cible fixe suivantes peuvent-elles être émises vers l'arrière dans le laboratoire ?

1. $\bar{p} + p \rightarrow \Lambda + \bar{\Lambda}$ à $p_{\bar{p}} = 315 \text{ GeV}/c$

⊗ 2. $\pi^+ + p \rightarrow \rho^+ + p$ à $p_{\pi^+} = 10 \text{ GeV}/c$

On donne:

$$m_{\pi^+} = 139.57 \text{ MeV}/c^2$$

$$m_{\rho^+} = 768.30 \text{ MeV}/c^2$$

$$m_p = m_{\bar{p}} = 938.27 \text{ MeV}/c^2$$

$$m_{\Lambda} = m_{\bar{\Lambda}} = 1115.63 \text{ MeV}/c^2$$

3 Création de paires

Montrer que la réaction

$$\gamma \rightarrow \underbrace{e^+ e^-}_{\text{paire}}$$

est cinématiquement impossible dans le vide.

Corrigé série 3

1 Energie disponible en mode cible fixe et en mode collisionneur

Il a été vu au cours que E^* , l'énergie totale dans le référentiel du centre de masse (CM), représente l'énergie disponible dans une réaction (dans le CM, aucune énergie n'est utilisée pour la conservation de la quantité de mouvement totale, qui est nulle par définition du CM).

1.1 Collision en cible fixe

Les particules projectile (1) et cible (2) ont même masse, soit: $m_1 = m_2 = m$. De plus, la cible est au repos ($\mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$). Leurs quadrivecteurs énergie-impulsion valent:

$$P_1 = (E, \mathbf{pc}) \quad (1)$$

$$P_2 = (mc^2, \mathbf{0}) \quad (2)$$

$$P_1^2 = E^2 - p^2c^2 = m^2c^4 = P_2^2 \quad (3)$$

On sait que le carré d'un quadrivecteur énergie-impulsion est un invariant de Lorentz, i.e. une grandeur conservée lors d'un changement de référentiel. Pour calculer E^* , on va utiliser la conservation du carré de $P_1 + P_2$.

Dans le laboratoire:

$$P_1 + P_2 = (E + mc^2, \mathbf{pc}) \quad (4)$$

Dans le CM:

$$P_1^* + P_2^* = (E^*, \mathbf{0}) \quad (\text{CM}) \quad (5)$$

Soit

$$(E^*)^2 = (P_1^* + P_2^*)^2 = (P_1 + P_2)^2 = (E + mc^2)^2 - p^2c^2 \quad (6)$$

mais

$$\mathbf{p}^2c^2 = E^2 - m^2c^4 \quad (7)$$

d'où

$$(E^*)^2 = (\sqrt{s})^2 = (E + mc^2)^2 - E^2 + m^2c^4 \quad (8)$$

Finalement:

$$E^* \equiv \sqrt{s} = \sqrt{2mc^2(E + mc^2)} \quad (9)$$

On a coutume d'appeler \sqrt{s} l'énergie disponible dans une réaction.

1.2 Collisionneur

Les particules projectile (1) et cible (2) ont même masse et leurs quantités de mouvement sont opposées, soit:

$$m_1 = m_2 = m \quad (10)$$

$$\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 = \mathbf{p} \quad (11)$$

$$\text{soit } E_1 = E_2 \equiv E \quad (12)$$

Donc $P_1 + P_2 = (2E, \mathbf{0})$, le laboratoire coïncide avec le CM. L'énergie disponible vaut donc:

$$\sqrt{s} = 2E \quad (13)$$

1.3 Comparaison Cible fixe-Collisionneur

Exprimons pc en fonction de \sqrt{s} dans les deux cas:

- Cible fixe: de (7) et (9), on tire:

$$\sqrt{s} = \sqrt{2mc^2(\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} + mc^2)} \quad (14)$$

$$p^2c^2 + m^2c^4 = \left(\frac{s^2}{2mc^2} - mc^2\right)^2 \quad (15)$$

$$pc = \sqrt{\frac{s^2}{4m^2c^4} - s} \quad (16)$$

- Collisionneur: de (7) et (13), on tire:

$$s = 4E^2 = 4(p^2c^2 + m^2c^4) \quad (17)$$

$$pc = \sqrt{\frac{s}{4} - m^2c^4} \quad (18)$$

On voit donc que pour \sqrt{s} donné, la quantité de mouvement requise dans le CM (collisionneur) vaut mc^2/\sqrt{s} fois celle requise en cible fixe. Donc, si $mc^2/\sqrt{s} \ll 1$, on a intérêt à utiliser un collisionneur.

1.4 Application

Dans le collisionneur SPS du CERN circulent des protons et antiproton à $p = 315 \text{ GeV}/c$. La masse m du proton vaut $0.938 \text{ GeV}/c^2$.

La relation (9) nous donne:

$$\sqrt{s} = 2\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} = 630 \text{ GeV}$$

Pour avoir cette même énergie disponible en cible fixe, il faudrait, d'après (18), des protons d'énergie cinétique $p = 212'000 \text{ GeV}/c$; soit 670 fois plus énergétiques qu'en collisionneur ou encore 15 fois plus énergétiques que les protons qui circuleront dans le futur LHC du CERN !

2 Cinématique dans les référentiels du centre de masse et du laboratoire

Appelons $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ (resp. $\mathbf{p}_1^*, \mathbf{p}_2^*$), les quantités de mouvement des particules résultantes (1) et (2) dans le laboratoire (resp. dans le CM).
On décompose $\mathbf{p}_1^*, \mathbf{p}_2^*$ en des composantes parallèle et perpendiculaires à β_{CM} , la vitesse du CM par rapport au laboratoire

$$\mathbf{p}_1^* = \mathbf{p}_{1\parallel}^* + \mathbf{p}_{1\perp}^* \quad (1)$$

$$\mathbf{p}_2^* = \mathbf{p}_{2\parallel}^* + \mathbf{p}_{2\perp}^* \quad (2)$$

tel que:

$$\mathbf{p}_{i\parallel}^* \cdot \beta_{CM} = p_{i\parallel}^* \beta_{CM} \quad (3)$$

$$\mathbf{p}_{i\perp}^* \cdot \beta_{CM} = 0 \quad (4)$$

Dans une transformation de Lorentz, seule la composante de \mathbf{p} parallèle à β (vitesse d'un référentiel par rapport à l'autre) est transformée:

$$p_{i\parallel} = \gamma_{CM} (p_{i\parallel}^* + \beta_{CM} E_i^*) \quad (5)$$

$$p_{i\perp} = p_{i\perp}^* \quad (6)$$

Or

$$(p_i^*)^2 = (p_{i\parallel}^*)^2 + (p_{i\perp}^*)^2 \quad (7)$$

Soit:

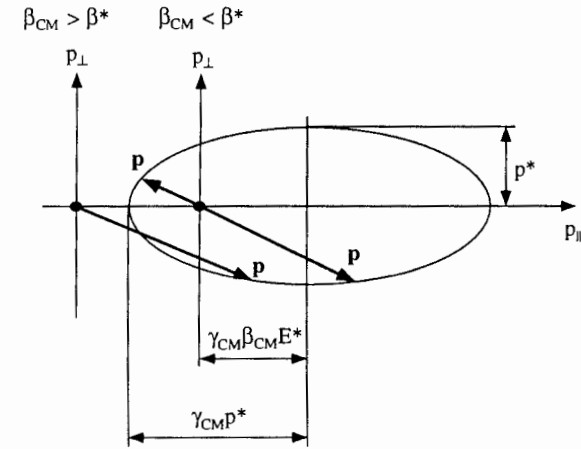
$$\frac{(p_{i\parallel}^*)^2}{(p_i^*)^2} + \frac{(p_{i\perp}^*)^2}{(p_i^*)^2} = 1 \quad (8)$$

En exprimant $p_{i\parallel}^*$ et $p_{i\perp}^*$ en fonction de $p_{i\parallel}$ et $p_{i\perp}$, il vient:

$$\frac{(p_{i\parallel} - \gamma_{CM} \beta_{CM} E_i^*)^2}{(\gamma_{CM} p_i^*)^2} + \frac{(p_{i\perp})^2}{(p_i^*)^2} = 1 \quad (9)$$

L'extrémité de \mathbf{p}_i décrit une ellipse de demi-grand axe $a = \gamma_{CM} p_i^*$ et de demi-petit axe $b = p_i^*$ (figure).

meilleur que le cas 1



Soit $\beta_i^* = p_i^* c / E_i^*$, la vitesse de la particule i dans le CM, deux cas sont à considérer:

- $\beta_{CM} \geq \beta_i^*$: Dans le laboratoire, la particule i est émise vers l'avant (dans la direction de la particule projectile).
- $\beta_{CM} < \beta_i^*$: Dans le laboratoire, la particule i peut être émise vers l'arrière (dans la direction opposée à la particule projectile).

Application

1. $p\bar{p} \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$ avec $p_p = 315 \text{ GeV}/c$

D'après l'exercice 1 (relation (9)), l'énergie disponible vaut:

$$\sqrt{s} = 24.35 \text{ GeV}$$

De plus, $E_p \approx p_p c$ i.e. que la particule est ultra-relativiste ($\beta_p \approx 1$). Dans ce cas, il est plus comode de raisonner avec le facteur γ . On sait que

$$\gamma = \frac{E}{mc^2}$$

$$\gamma_{CM} = \frac{E_p + E_{\bar{p}}}{\sqrt{s}} = \frac{E_p + m_p c^2}{\sqrt{s}} = 12.97$$

Comme $E^* = \sqrt{s}$, $m_\Lambda = m_{\bar{\Lambda}}$ et $\mathbf{p}_\Lambda^* = -\mathbf{p}_{\bar{\Lambda}}^*$, on a que $E^* = 2E_\Lambda^*$, soit:

$$\gamma_\Lambda^* = \gamma_{\bar{\Lambda}}^* = \frac{E_\Lambda^*}{m_\Lambda c^2} = \frac{\sqrt{s}}{2m_\Lambda c^2} = 10.9$$

Donc $\gamma_{CM} > \gamma_\Lambda^*$ ($\Leftrightarrow \beta_{CM} > \beta_\Lambda^*$): Le Λ et le $\bar{\Lambda}$ sont émis en avant dans le laboratoire.

2. $\pi^+ p \rightarrow \rho^+ p$ avec $p_{\pi^+} = 10 \text{ GeV}/c$

Energie disponible:

$$\sqrt{s} = \sqrt{(m_\pi^2 + m_p^2)c^4 + 2m_p c^2 E_\pi} = 4.43 \text{ GeV}$$

avec $E_\pi = 10.0 \text{ GeV}$.

$$\gamma_{CM} = \frac{E_\pi + m_p c^2}{\sqrt{s}} = 2.47$$

$$\textcircled{\otimes} (\mathbf{p}_\rho^*)^2 = (\mathbf{p}_p^*)^2 \Rightarrow E_\rho^{*2} - m_\rho^2 c^4 = E_p^{*2} - m_p^2 c^4$$

D'autre part

$$\textcircled{\otimes} \sqrt{s} = E^* = E_\rho^* + E_p^*$$

il vient:

$$E_p^* = \frac{(s + m_p^2 c^4 - m_\rho^2 c^4)}{2\sqrt{s}} = 2.2 \text{ GeV}$$

$$E_\rho^* = \sqrt{s} - E_p^* = 2.2 \text{ GeV}$$

$$\gamma_\rho = \frac{E_\rho^*}{m_\rho c^2} = 2.84 > \gamma_{CM}$$

La particule ρ^+ peut être émise vers l'arrière.

$$\gamma_p = \frac{E_p^*}{m_p c^2} = 2.40 < \gamma_{CM}$$

Le proton ne peut être émis qu'en avant.

3 Création de paires

Lors d'une collision, si le système est isolé, la quantité de mouvement totale et l'énergie totale du système sont conservées:

$$\sum \mathbf{p}_{in} = \sum \mathbf{p}_{out} \quad (1)$$

$$\sum E_{in} = \sum E_{out} \quad (2)$$

On définit le quadri-vecteur impulsion d'une particule d'énergie E et de quantité de mouvement \mathbf{p} par:

$$P \equiv (E, \mathbf{p}c) \quad (3)$$

(1) et (2) peuvent alors s'écrire:

$$\sum P_{in} = \sum P_{out} \quad (4)$$

Le produit scalaire entre deux quadri-vecteurs impulsion est défini par:

$$P_1 \cdot P_2 \equiv E_1 E_2 - c^2 \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 \quad (5)$$

La "norme" d'un quadri-vecteurs impulsion étant définie par:

$$P \cdot P \equiv P^2 = E^2 - c^2 p^2 \quad (6)$$

Si P est le quadri-vecteurs impulsion d'une particule de masse m , alors $P^2 = m^2 c^4$.
En utilisant la norme ci-dessus, on peut écrire la relation (4) comme:

$$\left(\sum P_{in} \right)^2 = \left(\sum P_{out} \right)^2 \quad (7)$$

Prenons le cas de la réaction $\gamma \rightarrow e^- e^+$. Dans ce cas:

$$\sum P_{in} = P_\gamma \quad (8)$$

$$\left(\sum P_{in} \right)^2 = P_\gamma^2 = m_\gamma^2 c^4 = 0 \quad (9)$$

$$\sum P_{out} = P_{e^+} + P_{e^-} \quad (10)$$

$$\left(\sum P_{out} \right)^2 = (P_{e^+} + P_{e^-})^2 = P_{e^+}^2 + P_{e^-}^2 + 2P_{e^+} \cdot P_{e^-} \quad (11)$$

$$= 2m_e^2 c^4 + 2 \left(E_{e^+} E_{e^-} - c^2 \mathbf{p}_{e^+} \cdot \mathbf{p}_{e^-} \right) \quad (12)$$

$$= 2m_e^2 c^4 + 2 \left(E_{e^+} E_{e^-} - c^2 p_{e^+} p_{e^-} \cos(\theta) \right) \quad (13)$$

où θ est l'angle entre la direction des e^- et e^+ .

Mais on sait que si $m \neq 0$, $E = \left(c^2 p^2 + m^2 c^4 \right)^{1/2} > cp$, de plus $1 - \cos(\theta) \geq 0$, donc

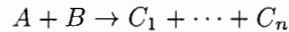
$$2m_e^2 c^4 + 2 \left(E_{e^+} E_{e^-} - c^2 p_{e^+} p_{e^-} \cos(\theta) \right) > 2m_e^2 c^4 + 2p_{e^+} p_{e^-} (1 - \cos(\theta)) \geq 2m_e^2 c^4 > 0 \quad (14)$$

Finalement $\left(\sum P_{out} \right)^2 = (P_{e^+} + P_{e^-})^2$ est strictement supérieur à 0, ce qui est en contradiction avec le fait que l'on doit avoir $0 = P_\gamma^2 = (P_{e^+} + P_{e^-})^2$. Ce raisonnement montre que le processus $\gamma \rightarrow e^- e^+$ est cinématiquement impossible, tout comme le processus inverse $e^- e^+ \rightarrow \gamma$.

Série 4

1 Seuil d'une réaction

Dans une réaction en cible fixe, Une particule A entre en collision avec une particule B immobile, produisant des particules C_1, \dots, C_n .



Connaissant les masses m_A, m_B et m_1, \dots, m_n , on demande de calculer le seuil de la réaction (i.e l'énergie E_A minimale, nécessaire à la production des particules C_1, \dots, C_n).

Calculer le seuil des réactions suivantes:

- (a) $p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$
- (b) $p + p \rightarrow p + p + \pi^0$
- (c) $p + p \rightarrow p + p + \pi^- + \pi^+$

$$m_p = m_{\bar{p}} = 938.27 \text{ MeV}/c^2.$$

$$m_{\pi^-} = m_{\pi^+} = 139.57 \text{ MeV}/c^2.$$

$$m_{\pi^0} = 134.98 \text{ MeV}/c^2.$$

2 Désintégrations à 2 et 3 corps

On considère la désintégration d'une particule A en n particules filles:

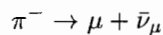


On demande:

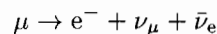
1. De calculer, dans le CM, l'énergie des particules filles dans une désintégration à 2 corps ($A \rightarrow a_1 + a_2$).
2. De calculer ensuite, dans le CM, l'énergie minimale et maximale d'une des particules filles dans une désintégration à 3 corps ($A \rightarrow a_1 + a_2 + a_3$).

Application:

Soit la désintégration



Sachant que le muon μ est une particule instable d'une durée de vie moyenne de $2.19 \mu\text{s}$, qui se désintègre selon le canal



on demande de calculer son énergie dans le référentiel du centre de masse, ainsi que son parcours maximum moyen dans le laboratoire pour une quantité de mouvement des pions de $20 \text{ MeV}/c$, $200 \text{ MeV}/c$ et $1 \text{ GeV}/c$ (indications: utiliser la dilatation du temps et la contraction de l'ellipse).

On donne:

$$m_\mu = 105.66 \text{ MeV}/c^2$$

$$m_e = 511 \text{ keV}/c^2$$

$$m_{\nu_\mu} = 0$$

Corrigé série 4

1 Seuil d'une réaction

Considérons la collision en cible fixe suivante, où B est immobile:

$$A + B \rightarrow C_1 + \dots + C_n$$

Dans le laboratoire, le quadri-vecteur énergie-impulsion total vaut avant la collision:

$$P = P_A + P_B = (E_A + m_B, \mathbf{p}_A) \quad (1.1)$$

Dans le référentiel du centre de masse (CM), ce quadri-vecteur vaut:

$$P^* = P_A^* + P_B^* = (E_A^* + E_B^*, \mathbf{0}) \quad (1.2)$$

avant la collision, et

$$P^{*'} = \sum_{i=1}^n P_{C_i}^* = (\sum_{i=1}^n E_{C_i}^*, \mathbf{0}) \quad (1.3)$$

après la collision.

Le système étant isolé, l'énergie totale et l'impulsion totale sont conservées lors de la collision, ou a donc $P^* = P^{*'}$.

Le seuil de la réaction correspond à l'énergie minimale nécessaire à la production des particules C_1, \dots, C_n . Il est clair que dans le centre de masse, cette énergie est égale à la somme des énergies de masse des particules C_i . Autrement dit, au seuil de réaction, dans le centre de masse toutes les particules C_i produites sont immobiles ($\mathbf{p}_i = 0$).

On peut ainsi écrire le quadri-vecteur énergie-impulsion total dans le CM, au seuil de réaction:

$$P_{seuil}^* = (\sum_{i=1}^n m_i, \mathbf{0}) = P_{seuil}^* \quad (1.4)$$

Pour calculer le seuil dans le laboratoire, on va utiliser l'invariance relativiste de la norme d'un quadri-vecteur:

$$(P_{seuil}^*)^2 = (P_{lab})^2 \quad (1.5)$$

En utilisant (1.1) et (1.4), cette relation s'écrit:

$$(\sum_{i=1}^n m_i)^2 = (E_A + m_B)^2 - p_A^2 \quad (1.6)$$

$$(\sum_{i=1}^n m_i)^2 = E_A^2 + 2E_A m_B + m_B^2 - (E_A^2 - m_A^2) \quad (1.7)$$

D'où le seuil de la réaction dans le laboratoire:

$$E_A^{seuil} = \frac{(\sum_{i=1}^n m_i)^2 - m_A^2 - m_B^2}{2m_B} \quad (1.8)$$

Application:

- $p + p \rightarrow p + p + p + p$

Ici, toutes les masses en présence sont égales. La relation (1.8) s'écrit donc:

$$E_{proton}^{seuil} = \frac{(4m_p)^2 - 2m_p^2}{2m_p} = 7m_p = 7 \cdot 0.938 = 6.57 \text{ GeV}$$

- $p + p \rightarrow p + p + \pi^0$

$$E_{proton}^{seuil} = \frac{(2m_p + m_{\pi^0})^2 - 2m_p^2}{2m_p} = 1.22 \text{ GeV}$$

- $p + p \rightarrow p + p + \pi^+ + \pi^-$

$$E_{proton}^{seuil} = \frac{(2m_p + 2m_{\pi})^2 - 2m_p^2}{2m_p} = 1.54 \text{ GeV}$$

2 Désintégration à 2 et 3 corps

Soit la désintégration:

$$A \rightarrow a_1 + \dots + a_n$$

On demande :

- De calculer, dans le CM, l'énergie des particules filles dans le cas où $n = 2$
- De calculer, dans le CM, l'énergie minimale et maximale d'une des particules filles dans le cas où $n = 3$

Pour simplifier les calculs, on va poser $c \equiv 1$.

Soient M la masse de la particule mère A et E_i, m_i, \mathbf{p}_i , l'énergie, la masse et la quantité de mouvement de la particule fille a_i .

Plaçons-nous dans le référentiel du centre de masse (CM) de la particule mère A . (Rappel: l'énergie disponible dans une réaction est l'énergie totale dans le CM). Dans ce référentiel la particule mère est au repos. son quadri-vecteur impulsion vaut $P_A = (M, \mathbf{0})$. On peut alors écrire:

$$\sum_{i=1}^n E_i = M \quad (2.1)$$

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i = \mathbf{0} \quad (2.2)$$

$$p_i^2 = E_i^2 - m_i^2, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.3)$$

Les relations (2.1) et (2.2) expriment la conservation du quadri-vecteur impulsion total.

2.1 Cas $n = 2$

$$E_1 + E_2 = M \quad (2.4)$$

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{0} \implies \mathbf{p}_1^2 = \mathbf{p}_2^2 \quad (2.5)$$

$$p_1^2 = E_1^2 - m_1^2 \quad (2.6)$$

$$p_2^2 = E_2^2 - m_2^2 \quad (2.7)$$

De (2.5), (2.6) et (2.7), on tire:

$$0 = E_1^2 - m_1^2 - E_2^2 + m_2^2 \quad (2.8)$$

$$M = E_1 + E_2, \quad P = E_1 \vec{e}_1 + E_2 \vec{e}_2 + \gamma M \vec{e}_3$$

$$E_1^2 - E_2^2 - M^2 + 2ME_1 + m_1^2 - m_2^2$$

En introduisant (2.4):

$$0 = E_1^2 - m_1^2 - (M - E_1)^2 + m_2^2 \quad (2.9)$$

$$0 = E_1^2 - m_1^2 - M^2 + 2ME_1 - E_1^2 + m_2^2 \quad (2.10)$$

d'où:

$$E_1 = \frac{m_1^2 - m_2^2 + M^2}{2M} \quad (2.11)$$

$$E_2 = M - E_1 = \frac{m_2^2 - m_1^2 + M^2}{2M} \quad (2.12)$$

Dans le centre de masse de la particule mère, une particule fille n'a qu'une seule énergie qui ne dépend que des masses des particules en présence. Remarquons que l'on doit toujours avoir:

$$E_i = \frac{m_i^2 - m_j^2 + M^2}{2M} \geq m_i$$

2.2 Cas $n = 3$

Pour $n = 3$, la relation (2.2) nous dit que $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ et \mathbf{p}_3 sont coplanaires. On peut donc écrire:

$$E_1 + E_2 + E_3 = M \quad (2.13)$$

$$p_{1x} + p_{2x} + p_{3x} = 0 \quad (2.14)$$

$$p_{1y} + p_{2y} + p_{3y} = 0 \quad (2.15)$$

$$p_i^2 = E_i^2 - m_i^2, \quad i = 1, \dots, 3 \quad (2.16)$$

Il y a donc 6 équations pour 9 inconnues; le problème est sous-déterminé et l'énergie d'une particule peut prendre une valeur quelconque d'un spectre continu (C'est l'observation du spectre continu de l'électron dans la désintégration β^- , qui a amené l'hypothèse de l'existence du neutrino).

On sait toutefois que ce spectre est borné, en effet:

$$m_i \leq E_i \leq M - \sum_{j \neq i} m_j$$

Il est clair que l'énergie minimale de la particule fille a_i est égale à son énergie de masse m_i (lorsqu'elle est au repos dans le CM). Déterminons le maximum de E_i .

Soient $P_i = (E_i, \mathbf{p}_i)$ le quadri-vecteur impulsion de la particule a_i dans le CM et $P_A = (M, \mathbf{0})$ celui de la particule mère A.

On sait que:

$$P_A = P_1 + P_2 + P_3 \quad (2.17)$$

$$M^2 = (P_1 + P_2 + P_3)^2 \quad (2.18)$$

d'où:

$$M^2 = m_1^2 + (P_2 + P_3)^2 + 2P_1(P_2 + P_3) \quad (2.19)$$

mais:

$$P_1(P_2 + P_3) = P_1 P_A - m_1^2 = E_1 M - m_1^2 \quad (2.20)$$

En introduisant cette dernière relation dans (2.19) et en exprimant E_1 , on trouve:

$$E_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - (P_2 + P_3)^2}{2M} \quad (2.21)$$

Trouver E_1^{max} , revient à minimiser

$$(P_2 + P_3)^2 = m_2^2 + m_3^2 + 2P_2 P_3 \quad (2.22)$$

On encoure à minimiser $P_2 P_3$. Or on sait que le produit de deux quadri-vecteurs ($P_2 P_3$) est un invariant de Lorentz. On va donc calculer ce produit dans le référentiel (*) de la particule a_2 . Dans ce référentiel, $P_2^* = (m_2, \mathbf{0})$; donc:

$$P_2^* P_3^* = m_2 E_3^* = m_2 \sqrt{m_3^2 + \mathbf{p}_3^{*2}} \quad (2.23)$$

Le résultat est immédiat, $P_2 P_3$ est minimum pour $\mathbf{p}_3^{*2} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{p}_3^* = \mathbf{0}$, dans ce cas:

$$P_2 P_3 = P_2^* P_3^* = m_2 m_3 \quad (2.24)$$

En introduisant ce dernier résultat dans (2.22) puis dans (2.21), on trouve E_1^{max} :

$$E_1^{max} = \frac{M^2 + m_1^2 - (m_2 + m_3)^2}{2M} \quad (2.25)$$

Remarque: Lorsque $E_1 = E_1^{max}$ cela correspond à la situation d'une désintégration à deux corps, avec une particule de masse m_1 et une autre de masse $(m_2 + m_3)$ (comparez (2.25) et (2.12)). De plus les particules 2 et 3 ont la même vitesse dans le CM. **Application:**

Soit la désintégration:

$$\pi^- \rightarrow \mu + \nu_\mu$$

Dans le centre de masse du π^- , l'énergie du muon vaut (d'après (2.11)):

$$E_\mu^* = \frac{m_\mu^2 + m_\pi^2}{2m_\pi} \quad (2.26)$$

On sait que la durée de vie moyenne τ_μ du muon au repos est de 2,19 μs ; la durée de vie dans un référentiel où le muon n'est pas au repos vaut (dilatation du temps):

$$\tau = \gamma_\mu \tau_\mu > \tau_\mu \quad (2.27)$$

Dans ce référentiel, le parcours du muon est donné par:

$$d = c\beta_\mu \tau = c\beta_\mu \gamma_\mu \tau_\mu \quad (2.28)$$

Pour déterminer le parcours maximum du muon dans le laboratoire, on va utiliser la construction de l'ellipse (cf. série 3):

$$\frac{(p_{\mu\parallel} - \gamma_{CM} \beta_{CM} E_\mu^*)^2}{(\gamma_{CM} p_\mu^*)^2} + \frac{(p_{\mu\perp})^2}{(p_\mu^*)^2} = 1 \quad (2.29)$$

Le parcours maximum correspond à un β_μ maximum, soit à $|p_\mu|$ maximum; la relation (2.29) nous dit que cela est le cas pour $p_{\mu\perp} = 0$. Nous avons donc:

$$p_\mu^{max} = \gamma_{CM} (\beta_{CM} E_\mu^* + p_\mu^*) = \gamma_{CM} (\beta_{CM} E_\mu^* + (E_\mu^{*2} - m_\mu^2)^{1/2}) \quad (2.30)$$

D'autre part,

$$\beta_\mu^{max} = \frac{p_\mu^{max}}{m_\mu \gamma_\mu} \quad (2.31)$$

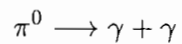
Finalement, on a le résultat suivant:

$$d^{max} = c\beta_\mu^{max} \gamma_\mu \tau_\mu \quad (2.32)$$

Série 5

La désintégration du π^0

La particule π^0 se désintègre principalement selon le canal:



Calculer l'angle minimum et l'angle maximum entre les deux photons dans le laboratoire pour des énergies du π^0 de 10 MeV à 10 GeV. Calculer l'asymétrie d'énergie des photons $(E_1 - E_2)/(E_1 + E_2)$.

Calculer la distribution de cette asymétrie, puis la distribution de l'angle entre les deux photons dans le laboratoire.

Indication: Dans le référentiel de repos du pion, l'émission des photons est isotrope.

Corrigé série 5

La désintégration du π^0

Soit la désintégration du π^0 ($m = 134,9764 \text{ MeV}$):

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$$

Dans le référentiel de repos du π^0 , qui est le Centre de Masse du système, les quadrivecteurs du pion et des deux photons 1 et 2 sont donnés par:

$$P_\pi^* = (m_\pi, 0) \quad (1)$$

$$P_1^* = (E_1^*, \mathbf{p}_1^*) \quad (2)$$

$$P_2^* = (E_2^*, \mathbf{p}_2^*) \quad (3)$$

avec

$$\mathbf{p}_1^* + \mathbf{p}_2^* = 0 \quad (4)$$

De plus, le photon n'ayant pas de masse:

$$(P_1^*)^2 = (P_2^*)^2 = 0 \quad (5)$$

D'où:

$$E_1^* = E_2^* = p_1^* = p_2^* = \frac{m_\pi}{2} \quad (6)$$

Signalons également que le π^0 n'ayant pas de spin, l'émission des photons est isotrope dans le CM, i.e. la distribution angulaire d'émission est uniforme:

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\Omega^*} \equiv \frac{1}{4\pi} \quad (7)$$

Où $\mathcal{P}(\Omega^*)$ est la probabilité d'émettre les photons dans le CM à un angle solide Ω^* à $d\Omega^*$ près.

Passons dans le référentiel du laboratoire.

La vitesse du CM correspond à la vitesse du pion:

$$\beta_{CM} = \beta_\pi \quad (8)$$

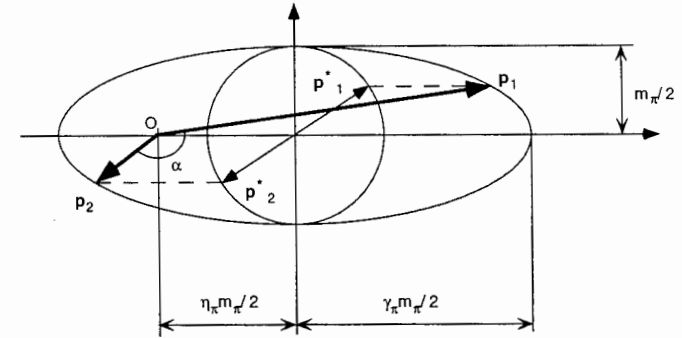
En utilisant la relation (6) et en posant:

$$\eta_\pi = \beta_\pi \gamma_\pi \quad (9)$$

La relation donnant la construction de l'ellipse devient (c.f série 3):

$$\frac{(p_{i\parallel} - \eta_\pi m_\pi / 2)^2}{(\gamma_\pi m_\pi / 2)^2} + \frac{(p_{i\perp})^2}{(m_\pi / 2)^2} = 1 \quad i = 1, 2 \quad (10)$$

Cette construction est représentée à la figure ci-dessous:



Remarques:

- $\frac{\eta_\pi m_\pi / 2}{\gamma_\pi m_\pi / 2} = \beta_\pi < 1$. Donc quelque soit l'énergie du pion, les photons peuvent être émis vers l'arrière dans le laboratoire (c.f série 3).
- Dans une ellipse, la distance centre-foyer c est liée aux demi-axes a et b par la relation $c^2 = a^2 - b^2$. Dans notre cas, on a $2a = \gamma_\pi m_\pi$ et $2b = m_\pi$; il suit que $2c = \eta_\pi m_\pi$. Le point O coïncide donc avec le foyer de l'ellipse.

Angle entre les photons:

Il est clair que dans le CM l'angle entre les photons est toujours égal à 180° . Calculons cet angle α dans le laboratoire.

Soit P_π , P_1 et P_2 les quadrivecteurs énergie-impulsion dans le labo du pion et des deux photons respectivement. Alors:

$$(P_\pi)^2 = (P_1 + P_2)^2 \quad (11)$$

$$m_\pi^2 = 2P_1 P_2 = 2(E_1 E_2 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2) \quad (12)$$

mais

$$\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = p_1 p_2 \cos \alpha = E_1 E_2 \cos \alpha \quad (13)$$

d'où

$$m_\pi^2 = 2E_1 E_2 (1 - \cos \alpha) \quad (14)$$

finalement

$$\cos \alpha = 1 - \frac{m_\pi^2}{2E_1 E_2} \quad (15)$$

Les photons pouvant être émis en arrière dans le laboratoire, il est immédiat que l'angle maximal entre les photons vaut 180° . Sur la figure de l'ellipse, on voit que cet angle correspond à:

$$p_1^{max} = E_1^{max} = (\gamma_\pi + \eta_\pi) m_\pi / 2 \quad (16)$$

$$p_2^{min} = E_2^{min} = (\gamma_\pi - \eta_\pi) m_\pi / 2 \quad (17)$$

On peut voir également sur l'ellipse que $\alpha = 0$ n'est pas possible. On va calculer l'angle minimum par dérivation.

Posons

$$u = 1 - \cos \alpha \quad (18)$$

$$v = 2E_1 E_2 = 2E_1(E_\pi - E_1) \quad (19)$$

La relation (15) nous donne:

$$u = \frac{m_\pi^2}{v} \quad (20)$$

donc

$$0 = \frac{du}{dE_1} = \frac{du}{dv} \frac{dv}{dE_1} = -2 \frac{m_\pi^2}{v^2} (E_\pi - 2E_1) \quad (21)$$

$$\Leftrightarrow E_1 = \frac{E_\pi}{2} = E_2 \quad (22)$$

L'on a dans ce cas l'angle minimum entre les deux photons.

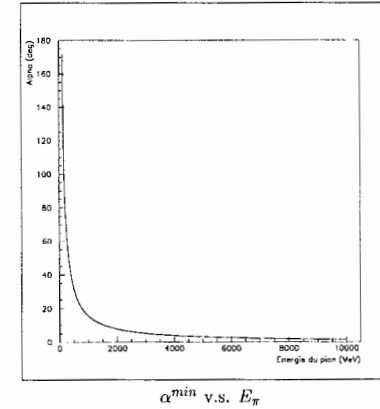
En résumé: lorsqu'on a équipartition de l'énergie entre les photons (asymétrie nulle), l'angle est minimal; l'angle maximal (180°) correspond à l'asymétrie maximale.

On exprime l'angle minimal en terme de l'énergie du pion, en utilisant les relation (15) et (22):

$$\cos \alpha^{min} = 1 - \frac{2m_\pi^2}{E_\pi^2} = 1 - \frac{2}{\gamma_\pi^2} \quad (23)$$

Ce résultat s'exprime plus simplement en fonction du demi-angle $\frac{\alpha}{2}$:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \beta_\pi \quad (24)$$



La figure ci-dessus représente l'angle α^{min} en fonction de l'énergie du pion. On remarque que cet angle tend rapidement vers 0 pour les hautes énergies.

Asymétrie d'énergie:

L'asymétrie d'énergie est donnée par:

$$A = \frac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2} \quad (25)$$

Nous avons déjà vu que l'angle maximum entre les photons correspond à $A = A^{max}$ et l'angle minimum à $A = 0$.

Pour calculer la distribution de l'asymétrie, on va d'abord exprimer cette dernière en fonction de θ^* , angle azimuthal dans le centre de masse (c.f. figure de l'ellipse).

En utilisant la transformation de Lorentz on a:

$$E_1 = \gamma_\pi (E_1^* + \beta_\pi p_{1\parallel}^*) = \gamma_\pi (E_1^* + \beta_\pi p_1^* \cos \theta^*) \quad (26)$$

en utilisant (6):

$$E_1 = \gamma_\pi \frac{m_\pi}{2} (1 + \beta_\pi \cos \theta^*) \quad (27)$$

de même:

$$E_2 = \gamma_\pi \frac{m_\pi}{2} (1 - \beta_\pi \cos \theta^*) \quad (28)$$

$$(29)$$

Avec $E_1 + E_2 = E_\pi = \gamma_\pi m_\pi$, il vient:

$$A = \beta_\pi \cos \theta^* \quad (30)$$

Donc $-\beta_\pi \leq A \leq \beta_\pi$ et $A^{max} = \beta_\pi$.

De plus $A = A^{max} \Leftrightarrow \theta^* = 0$ et $A = 0 \Leftrightarrow \theta^* = 90^\circ$. Tout cela est confirmé par la représentation de l'ellipse.

Distribution de l'asymétrie d'énergie:

Pour calculer la distribution de l'asymétrie $\frac{dn}{dA}$, on décompose:

$$\frac{dn}{dA} = \frac{dn}{d(\cos \theta^*)} \frac{d(\cos \theta^*)}{dA} \quad (31)$$

On utilise cette décomposition, car on sait que $\frac{dn}{d(\cos \theta^*)} = cst$. C'est en effet, à un facteur près, la distribution angulaire d'émission des photons dans le CM (relation (7)). Comme $d\Omega^* = \sin \theta^* d\theta^* d\phi^* = d(\cos \theta^*) d\phi^*$, on a $\frac{dn}{d(\cos \theta^*)} = \frac{1}{2}$.

De plus, la relation (30) nous donne

$$\frac{d(\cos \theta^*)}{dA} = \frac{1}{\beta_\pi} \quad (32)$$

D'où la distribution de l'asymétrie:

$$\frac{dn}{dA} = \frac{1}{2\beta_\pi} = cst \quad (33)$$

Distribution de l'angle α entre les photons:

On va calculer:

$$\frac{dn}{d\alpha} = \frac{dn}{dA} \frac{dA}{d(\cos \alpha)} \sin \alpha \quad (34)$$

En utilisant la relation (25) et $E_\pi = E_1 + E_2$, on peut écrire:

$$E_1 = \frac{E_\pi}{2} (1 + A) \quad (35)$$

$$E_2 = \frac{E_\pi}{2} (1 - A) \quad (36)$$

La relation (14) s'écrit alors:

$$m_\pi^2 = \frac{E_\pi^2}{2} (1 - A^2) \frac{2}{u} \left(-\frac{m_\pi^2 \cdot c^4}{u} \frac{2}{E_\pi^2} + 1 \right) \quad (37)$$

Introduisons $\mathcal{A} = |A|$, dans ce cas:

$$\frac{dn}{d\mathcal{A}} = 2 \frac{dn}{dA} = \frac{1}{\beta_\pi} \quad (38)$$

En utilisant \mathcal{A} , la solution de (37) vaut:

$$\mathcal{A} = \left(1 - \frac{2}{u\gamma_\pi^2} \right)^{1/2} \quad (39)$$

Où u est donné par (18).

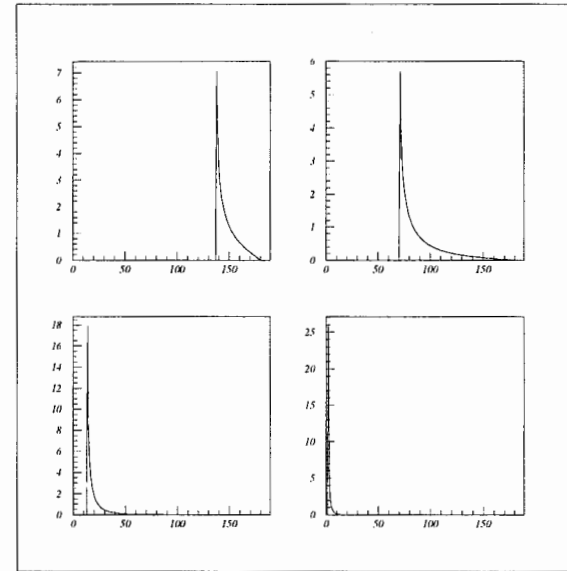
En utilisant (38) et $\frac{dA}{d(\cos \alpha)} = \frac{dA}{du} \frac{du}{d(\cos \alpha)}$, il vient d'après (34):

$$\frac{dn}{d\alpha} = \frac{\sin \alpha}{\beta_\pi \gamma_\pi^2 (1 - \cos \alpha)^2 \left(1 - \frac{2}{\gamma_\pi^2 (1 - \cos \alpha)} \right)^{1/2}} \quad (40)$$

où:

$$\arccos \left(1 - \frac{2}{\gamma_\pi^2} \right) \leq \alpha \leq \pi \quad (41)$$

La figure ci-dessous représente la distribution de l'angle α pour des énergies cinétiques du pion de 10 MeV, 100 MeV, 1 GeV et 10 GeV.



Série 6

1 Le Compteur Proportionnel

En admettant que, dans un compteur proportionnel cylindrique, l'ionisation du gaz résulte de l'amplification gazeuse et est localisée à la surface des fils d'anode, calculez la variation en fonction du temps de la différence de potentiel entre anode et cathode. On admettra que les ions se déplacent le long des lignes de champs avec une vitesse donnée par la mobilité:

$$v = \mu_i E$$

Indication: utiliser les relations des condensateurs cylindriques.

Corrigé série 6

Le Compteur Proportionnel

Dans un détecteur d'ionisation à gaz, une particule incidente produit des charges primaires par ionisation (ions positifs et électrons). Sous l'action d'un champ électrique, ces charges se déplacent le long des lignes de champs à une vitesse:

$$v_i = \mu_i E \quad (1)$$

Où E est l'intensité du champ et μ_i est la mobilité du ion i .

Dans un compteur proportionnel, il existe un phénomène de multiplication des charges. En effet, près de l'anode, le champ électrique est assez intense pour fournir aux électrons primaires une énergie suffisante pour ioniser à leur tour le milieu, créant ainsi une "avalanche ionique" près de l'anode. La charge totale collectée est proportionnelle à la charge primaire qui peut être négligée dans le traitement du signal.

Nous allons étudier le compteur proportionnel cylindrique, dont le schéma équivalent est donné à la figure 2.1.

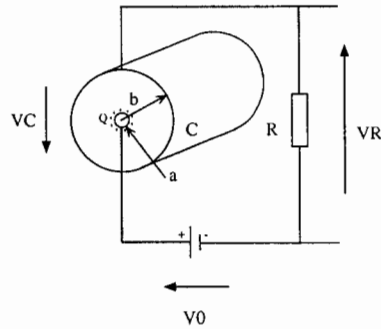


figure 0

Le but de l'exercice étant d'exprimer (la tension de mesure) $V_R = V_R(t)$.

Avant de commencer, nous allons poser quelques hypothèses:

- Le rayon a de l'anode est beaucoup plus petit que celui de la cathode: $a \ll b$
- La charge Q qui contribue au signal est créée à l'instant $t = 0$ dans l'avalanche près de l'anode. Cela revient à négliger l'ionisation primaire.
- La tension de mesure V_R est beaucoup plus petite que la tension d'alimentation: $V_R \ll V_0$.

Dans un condensateur cylindrique chargé à une tension V_0 , le champ électrique est donné par:

$$\mathbf{E}(r) = \frac{\alpha}{r} \mathbf{e}_r \quad (2)$$

où

$$\alpha = \frac{V_0}{\ln(b/a)} \quad (3)$$

La variation d'énergie W d'une charge Q se déplaçant dans le champ \mathbf{E} est donnée par:

$$dW = |Q|E(r)dr = \frac{|Q|\alpha}{r} dr \quad (4)$$

On a admis par hypothèse, que dans un compteur proportionnel, la charge Q est créée à une distance $r = \rho + a \simeq a \ll b$.

L'énergie acquise par une charge positive $+Q$ lors de sa migration vers la cathode vaut, en intégrant (4):

$$\Delta W^+ = \int_{a+\rho}^b \frac{dW}{dr} dr = |Q|\alpha \ln\left(\frac{b}{a+\rho}\right) \quad (5)$$

De même, l'énergie acquise par la charge négative vaut:

$$\Delta W^- = \int_{a+\rho}^a \frac{dW}{dr} dr = |Q|\alpha \ln\left(\frac{a+\rho}{a}\right) \quad (6)$$

En posant que $\rho + a \simeq a \ll b$, on peut voir que le rapport $\Delta W^- / \Delta W^+ \ll 1$. La contribution du mouvement des électrons peut être négligé et seul le mouvement des ions positifs contribue au signal.

La relation (5) nous donne, en faisant tendre ρ vers 0, l'énergie absorbée par la charge $+Q$ en fonction de r .

$$\Delta W^+(t) = \int_a^{r(t)} \frac{dW}{dr} dr = |Q|\alpha \ln\left(\frac{r}{a}\right) \quad (7)$$

Cette énergie est fournie par la décharge du condensateur cylindrique que constitue le compteur.

On sait que l'énergie potentielle d'un condensateur chargé vaut:

$$W_C = \frac{1}{2} C V_C^2 \quad (8)$$

donc:

$$\Delta W^+(t) = \frac{1}{2} C V_0^2 - \frac{1}{2} C V_C^2(t) = \frac{1}{2} C (V_0 - V_C(t))(V_0 + V_C(t)) \quad (9)$$

Or on a fait l'hypothèse que $V_R(t) = (V_0 - V_C(t)) \ll V_0$, soit que $V_0 + V_C(t) \simeq 2V_0$, donc:

$$\Delta W^+ = C V_0 V_R \quad (10)$$

En introduisant cette relation dans (7), on obtient:

$$V_R(t) = \frac{Q\alpha}{C V_0} \ln\left(\frac{r(t)}{a}\right) \quad (11)$$

Il ne nous reste plus qu'à exprimer $r(t)$ ceci se fait en utilisant la relation (1) qui donne la vitesse des ions:

$$\frac{dr}{dt} = \mu E(r) = \mu \frac{\alpha}{r} \quad (12)$$

où l'on a utilisé l'expression (2) du champ électrique.
En intégrant, on obtient:

$$\int_0^t dt = \frac{1}{\mu\alpha} \int_a^{r(t)} r dr \quad (13)$$

$$t = \frac{1}{2\mu\alpha} (r(t)^2 - a^2) \quad (14)$$

d'où

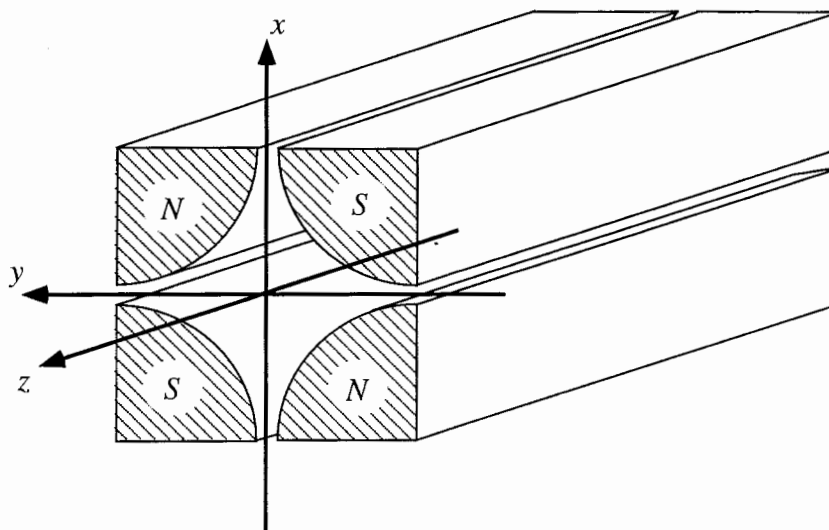
$$r(t) = \sqrt{2\mu\alpha t + a^2} \quad (15)$$

En introduisant cette dernière relation dans (11), on obtient $V_R(t)$:

$$V_R(t) = \frac{Q}{C} \frac{1}{\ln(b/a)} \ln \left(\frac{2\mu V_0}{a^2 \ln(b/a)} t + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (16)$$

Série 7

1 L'aimant quadrupolaire



L'Aimant quadrupolaire est un aimant comportant quatre pôles alternés, ayant la forme d'une hyperbole équilatère (c.f. figure).

On demande:

(i) Montrer qualitativement qu'un tel système est focalisant dans un plan et défocalisant dans l'autre; i.e. qu'une particule chargée, se déplaçant parallèlement à l'axe Oz , sera ramenée vers le centre de l'aimant dans un plan et en sera écartée dans l'autre plan.

(ii) Calculer le champs magnétique entre les pôles d'un tel système, supposé infiniment long.

(iii) Calculer les équations des trajectoires d'une particule se déplaçant parallèlement à l'axe Oz .

(iv) Supposons le quadrupôle "mince", montrer alors que l'effet du quadrupôle sur la trajectoire d'une particule est similaire à celui d'une lentille optique. Lentille convergente dans un plan et divergente dans l'autre.

(v) Montrer qu'un système de deux quadrupôles minces, l'un convergent et l'autre divergent, est toujours convergent.

Indications:

- Utiliser les équations de Maxwell dans le vide.

- Les pôles sont des équipotentielles du champs magnétique.

- Hypothèse: Le mouvement transversal de la particule (selon Oy et Ox) n'influence pas son mouvement longitudinal (selon Oz).

Corrigé série 7

(i) Analyse qualitative.

La figure 1 représente une coupe transversale de l'aimant quadrupolaire (ou quadrupôle). Les pôles étant alternés, qualitativement, il est facile de se convaincre que le champ magnétique est tel que représenté à la figure 1, par les petites flèches. Supposons qu'une particule chargée positivement se déplace selon z , hors de la trajectoire de référence définie par l'axe z . Cette particule subira une force de Lorentz $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, qui aura tendance à ramener la particule vers la trajectoire de référence dans le plan xz et à l'en éloigner dans le plan yz (c.f. figure 1). Ainsi, selon la charge de la particule et le sens de son mouvement longitudinal dans le quadrupôle, ce dernier sera "focalisant" dans un plan et "défocalisant" dans l'autre.

(ii) Calcul du champ magnétique.

Supposons qu'entre les pièces polaires il n'y ait ni charges ni courants, alors les équations de Maxwell pour le champ magnétique se résument à :

$$\nabla \times \mathbf{B} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2)$$

Or, on sait que si Φ est un champ scalaire, on a :

$$\nabla \times (\nabla \Phi) = 0 \quad (3)$$

Posons donc :

$$\mathbf{B} \equiv \nabla \Phi \quad (4)$$

Dans ce cas, (2) va s'écrire :

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (5)$$

Supposons maintenant un quadrupôle "infiniment" long, i.e. que l'ouverture entre les pièces polaires est beaucoup plus petite que la longueur du quadrupôle. Cette hypothèse nous permet de négliger les effets de bords et d'écrire :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \equiv 0 \quad (6)$$

La relation (5) devient :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \equiv 0 \quad (7)$$

Pour trouver une solution à cette équation différentielle, il nous faut des conditions aux bords. Celles-ci nous sont données par le fait que les surfaces des pièces polaires sont des équipotentielles du champ Φ , autrement dit :

$$\Phi(x, y, z) = Cst ; \forall (x, y, z) \in \left\{ \text{Surface des pôles} \right\} \quad (8)$$

Mais nous savons que les surfaces des pièces polaires sont des hyperboles équilatérales, d'équation :

$$yx = Cst \quad (9)$$

On voit donc facilement qu'un champ Φ du type :

$$\Phi(x, y, z) = gxy + A \quad (10)$$

où g et A sont des réels, satisfait la conditions de bord (8) et est solution de (7). La constante g est appelée le gradient du champ.

Finalement, la relation (4) nous donne le champ magnétique :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} gy \\ gx \\ 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

(iii) Equations des trajectoires.

Soit une particule de charge q se déplaçant dans le quadrupôle à une vitesse β avec une quantité de mouvement $\mathbf{p} = m\gamma c\beta$.

si cette particule est hors de la trajectoire de référence, elle subit une force de Lorentz :

$$\mathbf{F} = qc\beta \times \mathbf{B} \quad (12)$$

Appliquons l'équation de Newton :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = mc \frac{d}{dt} (\gamma\beta) = qc\beta \times \mathbf{B} \quad (13)$$

On fait ici l'hypothèse que le mouvement transversal (perpendiculaire à Oz) est très faible vis-à-vis du mouvement longitudinal de la particule, ceci permet de faire les approximations suivantes :

$$\frac{d\beta_z}{dt} = 0 \quad (14)$$

$$\gamma = \left(1 - \beta_z^2\right)^{-1/2} \Rightarrow \frac{d\gamma}{dt} = 0 \quad (15)$$

Ainsi, la relation (13) peut s'écrire, en utilisant (11) :

$$m\gamma\ddot{x} = -qc\beta_z B_y \quad (16)$$

$$m\gamma\ddot{y} = qc\beta_z B_x \quad (17)$$

$$0 = \dot{x}B_y - \dot{y}B_x \quad (18)$$

mais :

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dz} \frac{dz}{dt} = c\beta_z \frac{d}{dz} \quad (19)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = c^2 \beta_z^2 \frac{d^2}{dz^2} \quad (20)$$

Les relations (16) et (17) deviennent, en utilisant (11) :

$$x'' \equiv \frac{d^2 x}{dz^2} = -Kx \quad (21)$$

$$y'' \equiv \frac{d^2 y}{dz^2} = Ky \quad (22)$$

où

$$K \equiv \frac{qg}{m\gamma c\beta_z} = \frac{qg}{p_z} \quad (23)$$

Nous avons donc deux équations différentielles découplées pour le mouvement transversal de la particule dans le quadrupôle.

L'intégration des équations (21) et (22) nous donnent le résultat déjà prévu lors de l'analyse qualitative, autrement dit, si $q > 0$:

- La solution de (21) est:

$$x(z) = A_1 \sin(\sqrt{K}z) + A_2 \cos(\sqrt{K}z)$$

c'est une solution "focalisante" qui tend à garder la particule près de la trajectoire de référence.

- La solution de (22) est:

$$y(z) = B_1 e^{\sqrt{K}z} + B_2 e^{-\sqrt{K}z}$$

c'est une solution "défocalisante" qui tend à éloigner la particule de la trajectoire de référence.

(iv) Quadrupôle mince.

Considérons la trajectoire d'une particule dans le plan xz , et calculons:

$$\Delta x' = x'(s) - x'(e) \quad (24)$$

la variation de trajectoire entre la sortie s et l'entrée e d'un quadrupôle de longueur L (c.f. figure 2).

On a de (12):

$$x'' = \frac{d}{dz} (x') = -Kx \quad (25)$$

En intégrant cette relation de $z = e$ à $z = s$, on aura:

$$\Delta x' = x'(s) - x'(e) = \int_e^s dz (-Kx(z)) \quad (26)$$

L'hypothèse du quadrupôle mince permet de poser $x(z) \simeq x(e)$ pour $e \leq z \leq s$. (26) peut donc s'écrire:

$$\Delta x' = -Kx(e)L \quad (27)$$

ou encore:

$$x'(s) = x'(e) - Kx(e)L \quad (28)$$

On trouve de même:

$$y'(s) = y'(e) + Ky(e)L \quad (29)$$

Les relations (28) et (29) permettent d'assimiler un quadrupôle mince à une lentille de distance focale $f = 1/KL$, qui serait focalisante dans un plan et défocalisante dans l'autre (c.f. figure 3).

(v) Notation matricielle

La trajectoire transverse d'une particule est définie en tout point z par les vecteurs

$$\begin{pmatrix} x(z) \\ x'(z) \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} y(z) \\ y'(z) \end{pmatrix}$$

Dans le cas du quadrupôle mince, les équations (28) et (29) peuvent s'écrire sous forme matricielle:

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ x'(s) \end{pmatrix} = Q_f^+ \begin{pmatrix} x(e) \\ x'(e) \end{pmatrix} \quad (30)$$

$$\begin{pmatrix} y(s) \\ y'(s) \end{pmatrix} = Q_f^- \begin{pmatrix} y(e) \\ y'(e) \end{pmatrix} \quad (31)$$

où:

$$Q_f^\pm = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mp \frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \quad (32)$$

est la matrice de transformation d'un quadrupôle mince, focalisant pour Q_f^+ et défocalisant pour Q_f^- .

De ce point de vue matriciel, un espace sans champs magnétique de longueur d est représenté par une matrice de transformation V donnée par:

$$V(d) = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (33)$$

Considérons un système composé de deux quadrupôles Q_1 et Q_2 , de distances focales f_1 et f_2 , et séparés par un espace sans champs de distance d (c.f. figure 4). La matrice de transformation d'un tel système s'écrit:

$$\begin{aligned} M &= Q_{f_1}^\pm \times V(d) \times Q_{f_2}^\pm = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mp \frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mp \frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \pm \frac{d}{f_1} & d \\ -\frac{d}{f_1} & 1 \pm \frac{d}{f_2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (34)$$

où

$$-\frac{1}{f^*} = \pm \frac{1}{f_1} \pm \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \quad (35)$$

On peut montrer que f^* est la distance focale résultante du système (ce type de calcul s'applique également en optique géométrique).

Si le système est composé d'un quadrupôle focalisant et d'un autre défocalisant de même distance focale $f_1 = f_2 = f$, on a:

$$-\frac{1}{f^*} = -\frac{d}{f^2} < 0 \quad (36)$$

Le système est alors focalisant dans les deux plans.

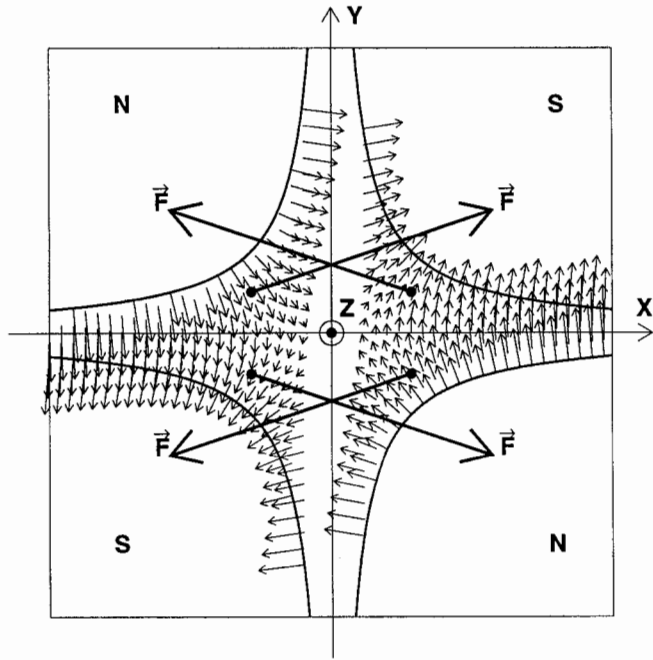


Figure 1

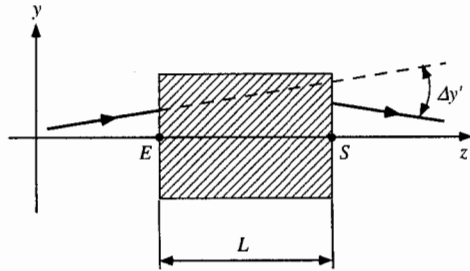


Figure 2

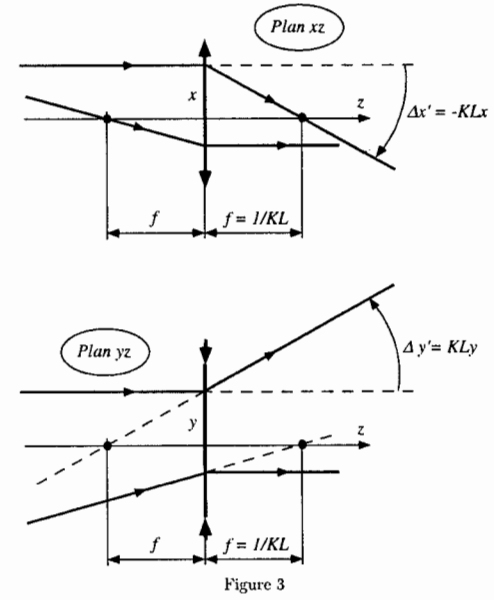


Figure 3

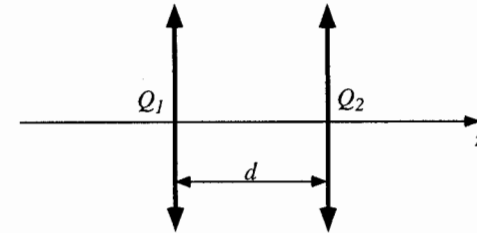


Figure 4



Figure 5: Quadrupôle au LEP

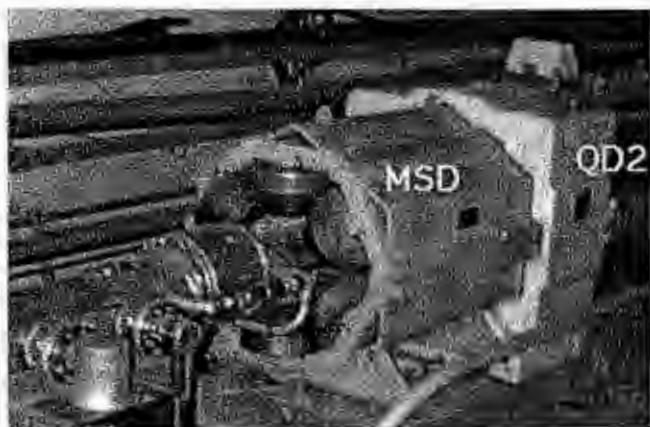


Figure 6: Sextupôle au LEP

Série 8

Des pions chargés peuvent être produits dans une collision en cible fixe du type:



Les pions émis vers l'avant sont ensuite envoyés contre une cible fixe constituée d'hydrogène:



On demande:

1. Calculer le seuil de la réaction (1).
2. Quelle doit être l'énergie cinétique minimale des protons dans (1), pour que les pions produisent, avec la cible d'hydrogène, un système composite de masse $1232 \text{ MeV}/c^2$ ($\pi^+ + p \rightarrow \Delta(1232)P_{33}$)

$$m_p = 938.3 \text{ MeV}/c^2$$

$$m_n = 939.6 \text{ MeV}/c^2$$

$$m_{\pi^+} = 139.6 \text{ MeV}/c^2$$

Corrigé série 8

Remarque: dans tous les calculs qui suivent, on posera $c=1$

Nous avons vu à la série 4 que le seuil d'une réaction en cible fixe $A+B \rightarrow C_1 + \dots + C_n$ était donné par:

$$E_A^{seuil} = \frac{(\sum_{i=1}^n m_{C_i})^2 - m_A^2 - m_B^2}{2m_B} \quad (1)$$

E_A^{seuil} étant l'énergie de la particule projectile au seuil de réaction. pour la réaction $p + p \rightarrow p + n + \pi^+$ le seuil est:

$$E_p^{seuil} = \frac{(m_p + m_n + m_\pi)^2 - 2m_p^2}{2m_p} = \frac{(938.3 + 939.6 + 139.6)^2 - 2 \cdot 938.3^2}{2 \cdot 938.3} = 1230.7 \text{ MeV} \quad (2)$$

Pour la réaction $\pi^+ + p \rightarrow X \equiv \Delta(1232)P_{33}$ le seuil est:

$$E_\pi^{seuil} = \frac{m_X^2 - m_p^2 - m_\pi^2}{2m_p} = \frac{1232^2 - 938.3^2 - 139.6^2}{2 \cdot 938.3} = 329.3 \text{ MeV} \quad (3)$$

Maintenant la question est de savoir qu'elle doit être l'énergie des protons projectile dans la réaction $p + p \rightarrow p + n + \pi^+$ pour pouvoir produire des π^+ émis vers l'avant ayant une énergie suffisante (≥ 329.3) pour produire la particule $\Delta(1232)P_{33}$.

Utilisons la transformation de Lorentz pour passer dans le référentiel du centre de masse (CM) de la première réaction:

$$E_\pi^{labo} = \gamma_{CM} E_\pi^* + \gamma_{CM} \beta_{CM} p_{\pi||}^* \quad (4)$$

Si l'on ne s'occupe que des π^+ émis vers l'avant, ou a:

$$p_{\pi||}^* = p_\pi^* = \sqrt{E_\pi^{*2} - m_\pi^2} \quad (5)$$

Soit:

$$E_\pi^{labo} = \gamma_{CM} E_\pi^* + \gamma_{CM} \beta_{CM} \sqrt{E_\pi^{*2} - m_\pi^2} \quad (6)$$

Dans le CM de la première réaction, le quadrivecteur impulsion total vaut:

$$P_{tot}^* = (\sqrt{s}, 0) \quad (7)$$

où \sqrt{s} est l'énergie disponible pour la réaction, on peut assimiler cette dernière à une désintégration à trois corps d'une particule de masse $M = \sqrt{s}$. On a vu à la série 4 que l'énergie dans le CM, d'une particule fille, produite lors d'une telle désintégration était comprise entre une valeur minimale et une valeur maximale:

$$m_i \leq E_i^* \leq \frac{M^2 + m_i^2 - (\sum_{k \neq i} m_k)^2}{2M} \quad (8)$$

$$E_\pi^* = \frac{E_\pi^{labo}}{\gamma} - \beta \cdot p_{\pi||}^*$$

Soit dans le cas de la réaction $\{p + p \rightarrow p + n + \pi^+\}$

$$m_\pi \leq E_\pi^* \leq \frac{s + m_\pi^2 - (m_p + m_n)^2}{2\sqrt{s}} \quad (9)$$

Donc, pour \sqrt{s} fixé (γ_{CM} dépend de \sqrt{s} , comme nous le verrons plus loin), on aura dans le labo (en utilisant (6)):

$$\gamma_{CM} m_\pi \leq E_\pi^{labo} \leq \gamma_{CM} E_\pi^{*max} + \beta_{CM} \gamma_{CM} \sqrt{(E_\pi^{*max})^2 - m_\pi^2} \quad (10)$$

où:

$$E_\pi^{*max} = \frac{s + m_\pi^2 - (m_p + m_n)^2}{2\sqrt{s}} \quad (11)$$

De plus pour pouvoir produire la particule $\Delta(1232)P_{33}$, on doit avoir:

$$E_\pi^{labo} \geq E_\pi^{seuil} = 329.3 \text{ MeV} \quad (12)$$

Nous pouvons donc maintenant obtenir le seuil de production de la particule $\Delta(1232)P_{33}$ par la chaîne $p + p \rightarrow p + n + \pi^+ \Rightarrow \pi^+$ (en avant) $+ p \rightarrow \Delta(1232)P_{33}$ en posant:

$$E_\pi^{labo} = E_\pi^{seuil} \leq \gamma_{CM} E_\pi^{*max} + \beta_{CM} \gamma_{CM} \sqrt{(E_\pi^{*max})^2 - m_\pi^2} \quad (13)$$

Il ne nous reste plus qu'à exprimer γ_{CM} et β_{CM} en fonction de \sqrt{s} :

$$\gamma_{CM} = \frac{E_{tot}^{labo}}{\sqrt{s}} = \frac{E_p + m_p}{\sqrt{s}} = \frac{\sqrt{s}}{2m_p} \quad (14)$$

$$\beta_{CM} = \left(1 - \frac{1}{\gamma_{CM}}\right)^{1/2} = \left(1 - \frac{4m_p^2}{s}\right)^{1/2} \quad (15)$$

où l'on a utilisé l'expression de l'énergie disponible dans la réaction $p + p \rightarrow p + n + \pi^+$ (c.f. série 3):

$$E_p = \sqrt{m_p^2 + p_p^2}$$

$$\sqrt{s} = \left(2m_p(E_p + m_p)\right)^{1/2} \quad (16)$$

Finalement, en utilisant (3), (11), (14) et (15), on trouve numériquement la solution de (13):

$$\sqrt{s} \simeq 2946 \text{ MeV} \quad (17)$$

Remarque:

Ce résultat correspond au seuil de production de la particule $\Delta(1232)P_{33}$, i.e. si $\sqrt{s} < 2946 \text{ MeV}$ aucun π^+ émis vers l'avant n'aura une énergie nécessaire (329.3 MeV) à la production de cette particule. Toutefois, pour $\sqrt{s} \geq 2946 \text{ MeV}$ il peut arriver que certains π^+ émis vers l'avant n'aient pas assez d'énergie pour produire la $\Delta(1232)P_{33}$, pour être sûrs que tous les π^+ aient l'énergie suffisante, il faut résoudre l'équation:

$$E_\pi^{labo} = E_\pi^{seuil} \leq \gamma_{CM} m_\pi \quad (18)$$

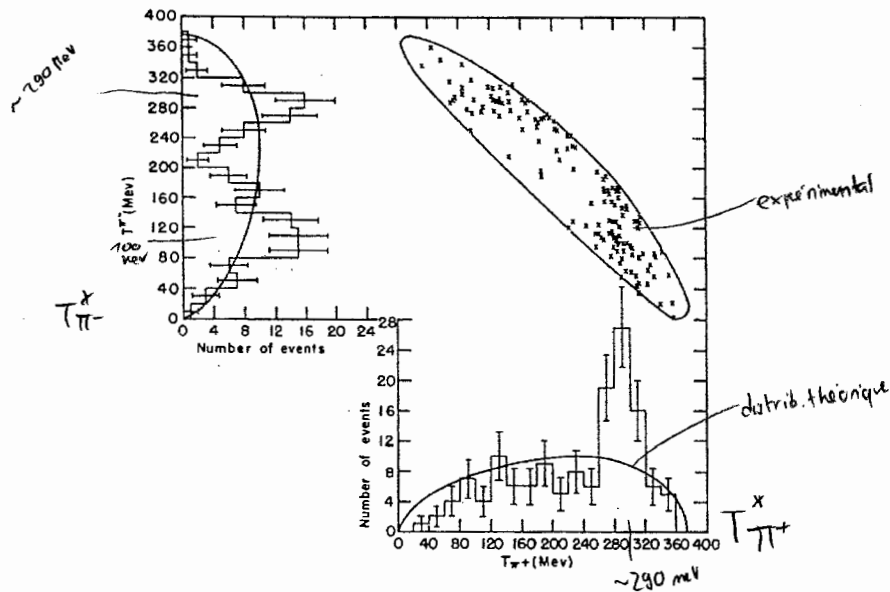
Soit, en utilisant (14):

$$\sqrt{s} \geq \frac{2m_p E_\pi^{seuil}}{m_\pi} \simeq 4427 \text{ MeV} \quad (19)$$

Série 9

Résonances baryoniques: la résonance $\Sigma(1385)$

En 1960, M. Alston et al. ont obtenu les distributions suivantes de $T_{\pi^+}^{CM}$ et $T_{\pi^-}^{CM}$ en analysant les pions issus de la réaction $K^- + p \rightarrow \Lambda + \pi^+ + \pi^-$:



Une telle représentation est appelée *diagramme de Dalitz*. A priori, l'énergie disponible \sqrt{s} peut se répartir d'une infinité de manières entre les trois particules produites, et la densité des points devrait être uniforme. L'accumulation de points pour certaines valeurs de $T_{\pi^+}^{CM}$ et $T_{\pi^-}^{CM}$ suggère l'existence d'un processus intermédiaire $K^- + p \rightarrow X^- + \pi^+$ ou $K^- + p \rightarrow (X^+) + \pi^-$ qui serait suivi de la désintégration de la résonance X en $\Lambda\pi$.

La forme allongée du diagramme vient du fait qu'une des particules est beaucoup plus lourde que les deux autres. Si elle était infiniment lourde, le diagramme de Dalitz se réduirait à une droite.

1. Montrer que $T_{\pi^+}^{CM}$ est linéaire en $m_{\Lambda\pi}^2 c^4$, c'est-à-dire qu'il est équivalent de représenter l'énergie cinétique du π^+ ou la masse effective $\Lambda\pi^-$.
2. Quelle est l'origine du pic à environ 100 MeV dans le spectre d'énergie du π^- ?
3. Sachant que la quantité de mouvement des (kaons) incidents sur la cible de protons est de 1.15 GeV/c, calculer $T_{\pi^+}^{max}$ et $T_{\pi^-}^{max}$ dans le centre de masse.
4. La résonance produite est en fait le baryon $\Sigma(1385)$. Déduire l'énergie des pics des spectres.

$$\begin{aligned}
 m_{K^-} &= 493.7 \text{ MeV}/c^2 \\
 m_p &= 938.3 \text{ MeV}/c^2 \\
 m_{\Sigma^+(1385)} &= 1382.8 \text{ MeV}/c^2 \\
 m_{\Sigma^-(1385)} &= 1387.2 \text{ MeV}/c^2 \\
 m_\Lambda &= 1115.6 \text{ MeV}/c^2 \\
 m_{\pi^-} = m_{\pi^+} &= 139.6 \text{ MeV}/c^2
 \end{aligned}$$

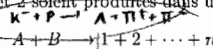
Corrigé série 9

Résonances baryoniques: la résonance $\Sigma(1385)$

(i) Soient 1 et 2 deux particules de quadri-vecteur énergie-impulsion P_1 et P_2 respectivement. On définit $m_{1,2}$ la masse effective de ces deux particules par:

$$c=1 \quad m_{1,2}^2 = (P_1 + P_2)^2 \quad (\text{masse invariante}) \quad (1)$$

On remarquera au passage que $m_{1,2}$ est un invariant de Lorentz. Supposons que les particules 1 et 2 soient produites dans une réaction du type:



Alors si toutes les réactions de ce type donnent $m_{1,2} = \text{cst}$, autrement dit s'il existe un pic dans la distribution de $m_{1,2}$, cela signifie que les particules 1 et 2 sont issues de la désintégration d'une particule X de masse $m_X = m_{1,2}$.

Soit la réaction:



Plaçons-nous dans le centre de masse (CM). On va montrer que $m_{1,2}^2$ est linéaire en l'énergie cinétique T_3 .

De la conservation de l'énergie-quantité de mouvement, on a:

$$P_A + P_B = (P_1 + P_2) + P_3 \quad (2)$$

Dans le CM:

$$P_A + P_B = (\sqrt{s}, 0) \quad (3)$$

Où \sqrt{s} est l'énergie disponible pour la réaction. *(Donc conservation de l'énergie-quantité de mouvement.)*

$$m_{1,2}^2 = (P_1 + P_2)^2 = ((P_A + P_B) - P_3)^2 \quad (4)$$

$$m_{1,2}^2 = (P_A + P_B)^2 + P_3^2 - 2(P_A + P_B)P_3 = s + m_3^2 - 2E_3\sqrt{s} \quad (5)$$

d'où

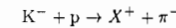
$$m_{1,2}^2 = s + m_3^2 - 2\sqrt{s}(m_3 + T_3) \quad (6)$$

$$= s + m_3^2 - 2\sqrt{s}E_3 \quad (7)$$

L'étude de la distribution de $m_{1,2}^2$ est donc équivalente à l'étude de celle de T_3 . Ainsi, la présence d'un pic d'énergie T_3 traduit le fait que les particules 1 et 2 proviennent de la désintégration d'une particule de masse:

$$m_{1,2} = \left(s + m_3^2 - 2\sqrt{s}(m_3 + T_3) \right)^{1/2} \quad (\text{état métable})$$

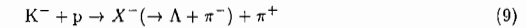
(ii) On sait que dans la réaction:



L'énergie cinétique du π^- (dans le CM) n'a qu'une seule valeur (c.f. série 4):

$$T_{\pi^-} = E_{\pi^-} - m_{\pi^-} = \frac{m_{X^+}^2 - m_{\pi^-}^2 + s}{2\sqrt{s}} - m_{\pi^-} \quad (8)$$

Cette valeur correspond au pic à 280 MeV dans la distribution de T_{π^-} . Par contre, dans la réaction:



Le X^- n'étant pas immobile dans le CM, l'énergie cinétique du π^- est distribuée entre deux valeurs minimale et maximale qui peuvent être calculées à l'aide de la construction de l'ellipse. En fait, le "pic" à 100 MeV correspond à la distribution de l'énergie des π^- issus de la réaction (9). Remarquons que le raisonnement ci-dessus s'applique également au π^+ ; toutefois, sur la figure de la donnée, ce pic n'est pas assez important pour être observé.

(iii) On a vu à la série 4 que dans une désintégration à trois corps, l'énergie maximale d'une particule fille (disons la particule 1) est donnée par:

$$E_1^{max} = \frac{M^2 + m_1^2 - (m_2 + m_3)^2}{2M} \quad (10)$$

$$E_1^{max} = \frac{s + m_1^2 - (m_2 + m_3)^2}{2\sqrt{s}}$$

où M est la masse de la particule mère. Ce résultat s'étend à une réaction à trois corps $A + B \rightarrow 1 + 2 + 3$ où l'on remplace la masse M par l'énergie disponible \sqrt{s} . Dans ce cas:

Calculons \sqrt{s} pour des kaons de $p_{K^-} = 1,15$ GeV sur des protons fixes.

$$\sqrt{s} = \left((p_{K^-}^2 + p_p^2) \right)^{1/2} = \left(m_{K^-}^2 + m_p^2 + 2E_{K^-}m_p \right)^{1/2} \quad (11)$$

où

$$\left. \begin{aligned} p_{K^-}^2 + p_p^2 + 2p_{K^-}p_p &= m_{K^-}^2 + m_p^2 + 2E_{K^-}m_p \\ p_{K^-}^2 &= m_{K^-}^2 - p_{K^-}^2 \\ p_p &= (m_p, 0) \\ p_{K^-} &= (E_{K^-}, p_{K^-}) \end{aligned} \right\} p_{K^-} \cdot p_p = m_p \cdot E_{K^-}$$

finalment

$$\sqrt{s} = 1863,5 \text{ MeV} \quad (13)$$

L'énergie cinétique maximale des pions vaut donc:

$$T_{\pi^\pm}^{max} = \frac{s + m_{\pi^\pm}^2 - (m_{\pi^\pm} + m_\Lambda)^2}{2\sqrt{s}} - m_{\pi^\pm} = 374,7 \text{ MeV} \quad (14)$$

(iv) Pour calculer l'énergie des pics, on va utiliser la relation (8):

$$T_{\pi^\pm} = E_{\pi^\pm} - m_{\pi^\pm} = \frac{m_{X^\pm}^2 - m_{\pi^\pm}^2 + s}{2\sqrt{s}} - m_{\pi^\pm}$$

où $X^+ \equiv \Sigma^+(1385)$, $X^- \equiv \Sigma^-(1385)$ et \sqrt{s} est donné par (13).

Le résultat est:

$$T_{\pi^-} = 284,3 \text{ MeV}$$

$$T_{\pi^+} = 281,1 \text{ MeV}$$

Série 10

typique examen

Détermination de la masse du Λ et du K_S^0

Lorsque l'on bombarde une cible de protons avec un faisceau de π^- , on peut observer la réaction suivante:



Les K_S^0 et les Λ étant des particules instables, elles se désintègrent, notamment par les réactions suivantes:



Ces réactions ont été observées dans des chambres à bulle. La figure en annexe montre les traces laissées par les particules chargées. Le rayon de courbure de ces traces permet de calculer les quantités de mouvement des particules filles.

1. Supposant connues les masses du Λ et du K_S^0 , quelle est le seuil de la réaction (1) ?

$$m_\Lambda = 1115.6 \text{ MeV}/c^2$$

$$m_{K_S^0} = 497.72 \text{ MeV}/c^2$$

$$m_{\pi^-} = 139.57 \text{ MeV}/c^2$$

$$m_p = 938.28 \text{ MeV}/c^2$$

2. Trouver les masses du Λ et du K_S^0 à partir des informations suivantes:

- réaction (2):

$$p_{\pi^+} = 1308.08 \text{ MeV}/c$$

$$p_{\pi^-} = 208.29 \text{ MeV}/c$$

$$\theta(\pi^+, \pi^-) = 34.16^\circ$$

- réaction (3):

$$p_p = 721.27 \text{ MeV}/c$$

$$p_{\pi^-} = 133.96 \text{ MeV}/c$$

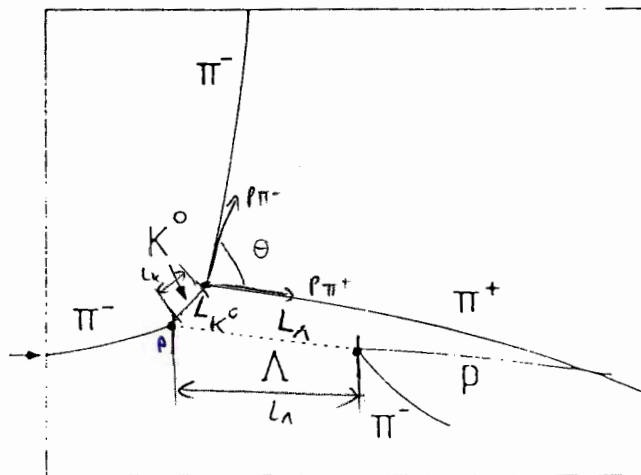
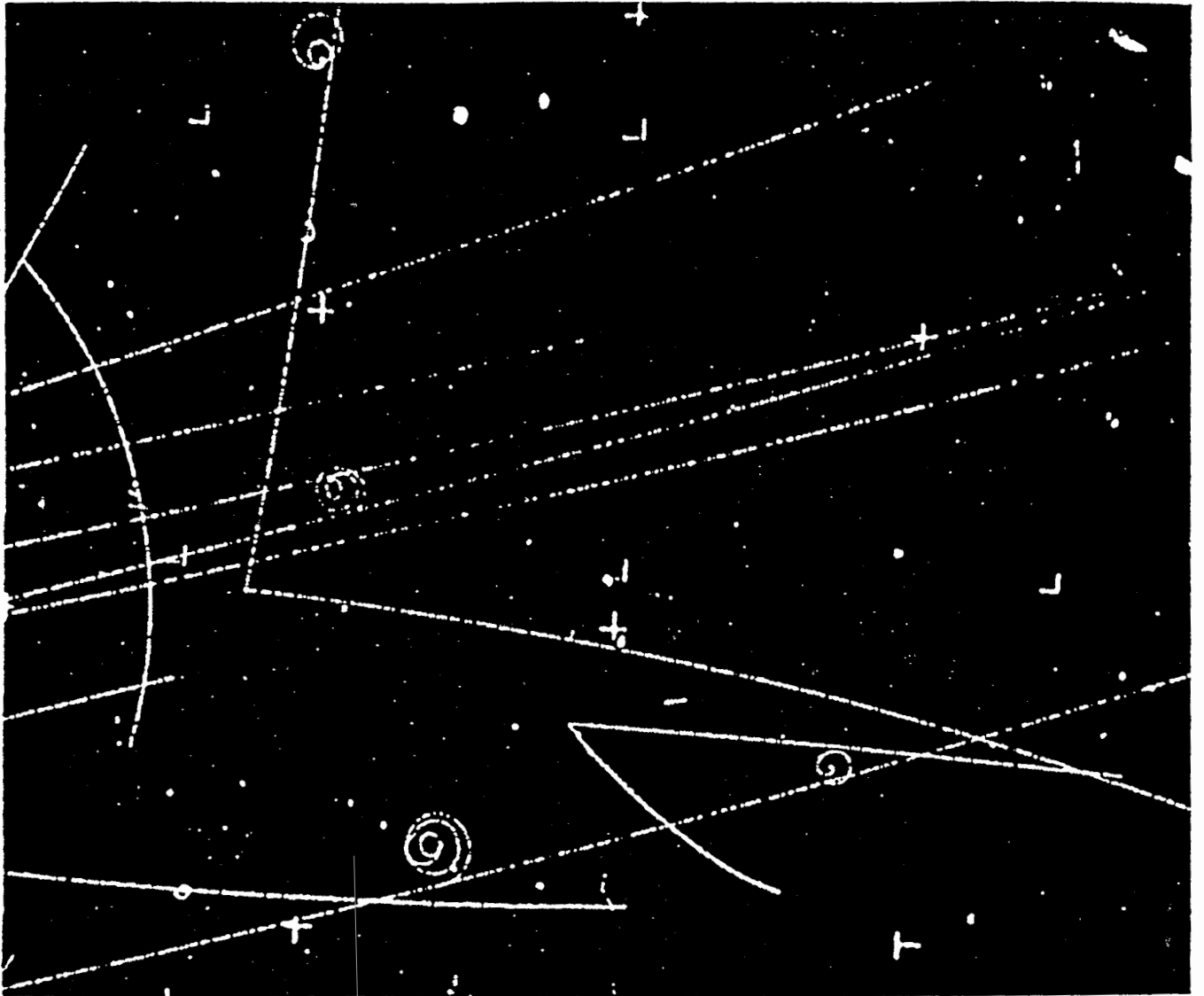
$$\theta(\pi^-, p) = 54.18^\circ$$

3. Pour l'événement décrit au point 2, on mesure le parcours L dans le laboratoire des particules K_S^0 et Λ (L est la distance entre le vertex de production de la particule et son vertex de désintégration).

$$L_\Lambda = 5,76 \text{ cm}$$

$$L_{K_S^0} = 7,98 \text{ cm}$$

Quelle a été la durée de vie de chaque particule ?



chambre à bulles : que les part.
 charg. donnent des traces
 (rayon de courbure relié à la qté mvt.
 $f \sim \frac{p}{qB}$
 identifie les particules par la
 perte d'énergie spécifique
 (densité des bulles)

Corrigé série 10

1. Connaissant les masses du Λ et du K_S^0 , calculons le seuil de la réaction:

$$\pi^- + p \rightarrow \Lambda + K_S^0 \quad (1)$$

On sait (c.f. série 5) que le seuil de la réaction correspond à la production des Λ et K_S^0 au repos dans le centre de masse. Soit

$$P_\Lambda^* = (m_\Lambda, \mathbf{0}) \quad (2)$$

$$P_{K_S^0}^* = (m_{K_S^0}, \mathbf{0}) \quad (3)$$

L'énergie disponible \sqrt{s} vaut:

$$s = (P_\Lambda^* + P_{K_S^0}^*)^2 = (m_\Lambda + m_{K_S^0})^2 \quad (4)$$

Comme s est un invariant de Lorentz, on a:

$$s = (P_\Lambda^L + P_{K_S^0}^L)^2 \quad (5)$$

La conservation du quadri-vecteur quantité de mouvement impose:

$$P_\Lambda^L + P_{K_S^0}^L = P_{\pi^-}^L + P_p^L \quad (6)$$

avec

$$P_{\pi^-}^L = (E_{\pi^-}, \mathbf{p}_{\pi^-}) \quad (7)$$

$$P_p^L = (m_p, \mathbf{0}) \quad (8)$$

Le proton étant immobile dans le laboratoire (collision en cible fixe).

Les relations (4) à (8) nous donnent:

$$(m_\Lambda + m_{K_S^0})^2 = (E_{\pi^-} + m_p)^2 - \mathbf{p}_{\pi^-}^2 \quad (9)$$

$$(m_\Lambda + m_{K_S^0})^2 = m_{\pi^-}^2 + m_p^2 + 2E_{\pi^-}m_p \quad (10)$$

D'où l'énergie du pion au seuil de réaction:

$$E_{\pi^-}^{\text{seuil}} = \frac{(m_\Lambda + m_{K_S^0})^2 - m_p^2 - m_{\pi^-}^2}{2m_p} \quad (11)$$

Application numérique:

$$m_\Lambda = 1115,6 \text{ MeV}/c^2 \quad (12)$$

$$m_{K_S^0} = 497,72 \text{ MeV}/c^2 \quad (13)$$

$$m_{\pi^-} = 139,57 \text{ MeV}/c^2 \quad (14)$$

$$m_p = 938,28 \text{ MeV}/c^2 \quad (15)$$

Le seuil de la réaction (1) vaut donc $E_{\pi^-} = 907,5 \text{ MeV}$

2. Soit la désintégration $A \rightarrow 1 + 2$ et P_A, P_1, P_2 les quadri-vecteurs quantité de mouvement des trois particules. On a toujours:

$$P_A = P_1 + P_2 \quad (16)$$

$$(P_A)^2 = m_A^2 \quad (17)$$

Donc

$$m_A^2 = (P_1 + P_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2P_1P_2 \quad (18)$$

or

$$P_1P_2 = E_1E_2 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 \quad (19)$$

$$P_1P_2 = \left((p_1^2 + m_1^2)(p_2^2 + m_2^2) \right)^{\frac{1}{2}} - p_1p_2 \cos \theta(1, 2) \quad (20)$$

d'où la masse de Λ :

$$m_\Lambda^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2 \left((p_1^2 + m_1^2)(p_2^2 + m_2^2) \right)^{\frac{1}{2}} - 2p_1p_2 \cos \theta(1, 2) \quad (21)$$

Applications:

(i) $\Lambda \rightarrow \pi^- + p$

$p_p = 721,27 \text{ MeV}/c$, $p_{\pi^-} = 133,96 \text{ MeV}/c$ et $\theta(\pi^-, p) = 54,18^\circ$

La relation (21) nous donne pour la masse du Λ : $m_\Lambda = 1115,63 \text{ MeV}/c^2$

(ii) $K_S^0 \rightarrow \pi^- + \pi^+$

$p_{\pi^+} = 1308,08 \text{ MeV}/c$, $p_{\pi^-} = 208,29 \text{ MeV}/c$ et $\theta(\pi^+, \pi^-) = 34,16^\circ$

La relation (21) nous donne pour la masse du K_S^0 : $m_{K_S^0} = 497,71 \text{ MeV}/c^2$

3. Le parcours L_j ($j = K_S^0, \Lambda$) est donné par:

$$L_j = c\beta_j t_j \quad (22)$$

Où t_j est le temps de vie de la particule dans le laboratoire. Le temps de vie propre (dans le centre de masse de la particule) est donné par:

$$t_j^* = \frac{t_j}{\gamma_j} \quad (23)$$

mais

$$\beta_j = \frac{p_j c}{E_j} \quad (24)$$

$$\gamma_j = \frac{E_j}{m_j c^2} \quad (25)$$

d'où

$$t_j^* = \frac{L_j m_j}{p_j} \quad (26)$$

La quantité de mouvement p_j est donnée par:

$$p_j^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2 \cos(180^\circ - \theta(1,2)) \quad (27)$$

Où p_1 , p_2 et $\theta(1,2)$ sont respectivement les quantités de mouvement des deux particules filles de j et l'angle entre \mathbf{p}_1 et \mathbf{p}_2

En utilisant les relations (26), (27) et les valeurs données au point 2 pour p_1 , p_2 et $\theta(1,2)$, on obtient les durées de vie suivantes:

- Λ : $L_\Lambda = 5,76 \text{ cm} \Rightarrow t_\Lambda^* = 2,65 \cdot 10^{-10} \text{ s}$
- K_S^0 : $L_{K_S^0} = 7,98 \text{ cm} \Rightarrow t_{K_S^0}^* = 0,89 \cdot 10^{-10} \text{ s}$

Série 11

Réactions et désintégrations en gros

Vérifier si les réactions suivantes sont possibles.

- (1) $p + p \rightarrow n + \pi^+ + p$
- (2) $p + p \rightarrow \bar{n} + p + p + \pi^0$
- (3) $p + p \rightarrow K^0 + \pi^+ + \pi^0 + n + \Sigma^+$
- (4) $\pi^+ + p \rightarrow \Sigma^+ + p$
- (5) $\pi^+ + p \rightarrow \Sigma^+ + K^+$
- (6) $\pi^+ + p \rightarrow \Sigma^+ + p + \pi^0$
- (7) $\pi^- + p \rightarrow \Xi^0 + ?$
- (8) $\pi^- + p \rightarrow \Sigma^+ + K^-$
- (9) $K^+ + p \rightarrow \bar{\Sigma}^+ + \pi^+$
- (10) $K^+ + \bar{p} \rightarrow \bar{\Sigma}^+ + \pi^-$
- (11) $\Sigma^+ + p \rightarrow \Lambda + \pi^+ + p$
- (12) $\Sigma^- + p \rightarrow \Xi^- + p$
- (13) $p + n \rightarrow K^- + \pi^+ + p + n$
- (14) $\pi^- + p \rightarrow \eta + n$
- (15) $\bar{p} + p \rightarrow \Lambda + \bar{\Lambda}$
- (16) $\nu_e + p \rightarrow n + e^-$ (faible)
- (17) $\nu_e + n \rightarrow p + e^+$
- (18) $\nu_\mu + n \rightarrow \mu^- + \Lambda + e^+ + \nu_\mu$
- (19) $\Sigma^+ + p \rightarrow \pi^+ + \pi^0 + p$
- (20) $p + \pi^- \rightarrow \Xi^0 + K^0 + K^0$
- (21) $\nu_\mu + p \rightarrow \Sigma^+ + \mu^+ + \mu^- + \nu_\mu$
- (22) $\Delta^{++} + \Sigma^- \rightarrow K^- + p + p$
- (23) $\Delta^+ + \pi^- \rightarrow K^- + p + n$
- (24) $\Xi^0 \rightarrow e^- + p + \bar{\nu}_e$
- (25) $\Xi^0 \rightarrow \Lambda + \pi^0$
- (26) $\Xi^- \rightarrow \Lambda + \pi^-$
- (27) $\Xi^- \rightarrow \Sigma^0 + \mu^- + \bar{\nu}_\mu$
- (28) $\Xi^- \rightarrow e^- + p + \bar{\nu}_e + \pi^-$
- (29) $\Omega^- \rightarrow \Lambda + \pi^-$
- (30) $\Omega^- \rightarrow \Lambda + K^-$

$e^- \nu_e \mu^- \nu_\mu \rightarrow e^- \nu_e$

lepton \Rightarrow { faible
E.M. si chargé

neutrino \Rightarrow faible

$$\Omega^- \rightarrow \Xi^0 + \pi^- \quad (31)$$

$$\Omega^- \rightarrow \Xi^0 + K^- \quad (32)$$

$$\Sigma^0 \rightarrow \Lambda + \gamma + \gamma \quad (33)$$

$$\Sigma^0 \rightarrow \Lambda + e^- + e^+ \quad (34)$$

$$K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \quad (35)$$

$$K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0 \quad (36)$$

$$K^+ \rightarrow \pi^0 + e^+ + \nu_e \quad (37)$$

$$K^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \quad (38)$$

$$K_S^0 \rightarrow \pi^0 + \pi^0 \quad (39)$$

$$K_S^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- \quad (40)$$

$$K_S^0 \rightarrow \mu^+ + \mu^- \quad (41)$$

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e \quad (42)$$

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \bar{\nu}_\mu \quad (43)$$

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \quad (44)$$

$$\eta \rightarrow \gamma + \gamma \quad (45)$$

$$\tau \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu + \bar{\nu}_\tau \quad (46)$$

$$\tau \rightarrow \pi^+ + \bar{\nu}_\tau \quad (47)$$

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad (48)$$

$$B^- \rightarrow D^0 + \pi^- \quad (49)$$

$$J/\psi(1S) \rightarrow \omega(783) + \pi^0 \quad (50)$$

Physique des Particules 3^{ème} Année / hiver 98-99⁽¹⁾
 Corrigé Série M

Un certain nombre de lois de conservation régissent les réactions et les désintégrations des particules. Ces lois autorisent ou interdisent certaines réactions. Passons en revue ces lois de conservations :

(1) Cinématique

E, P

L'énergie totale et la quantité de mouvement totale sont conservées (pour autant que le système est isolé). Le moment angulaire total est conservé également.

(2) Charge électrique

9

La charge électrique est toujours conservée.

(3) Le nombre baryonique

On définit le nombre baryonique B d'une particule par :

$$B = \frac{1}{3} (N(q) - N(\bar{q}))$$

où $N(q)$ = nombre de quarks
 $N(\bar{q})$ = " d'antiquarks

- Les baryons (p, n, Λ, \dots) sont composés de 3 quarks et ont donc $B = +1$, les antibaryons ont $B = -1$
- Les mésons (π^\pm, π^0, K, \dots) ont $B = 0$ car ils sont formés d'un quark et d'un antiquark

- Toutes les autres particules (Leptons, photons, ...) ont $B = 0$

Le nombre baryonique est toujours conservé

B

(4) Nombre Leptonique

À chaque Lepton ($e, \mu, \tau, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$) on associe un nombre L_α où α se réfère à la famille à laquelle appartient le lepton :

	e	ν_e	μ	ν_μ	τ	ν_τ
L_e	1	1	0	0	0	0
L_μ	0	0	1	1	0	0
L_τ	0	0	0	0	1	1

L'anti lepton \bar{l} aura un nombre leptonique $-L_\alpha$

L_α

Les nombres leptonique L_α sont toujours conservés a fortiori $L = \sum_\alpha L_\alpha$

Toutes les autres particules ont un nombre leptonique nul.

(5) Etrangeté

Nous avons vu que le nombre total de quarks était conservé, mais qu'en est-il de leur saveur ?

(les quarks ont 6 saveurs : up (u), down (d), Charm (c), Strange (s), top (t), bottom (b))

La règle est la suivante : dans les interactions fortes et électromagnétique les saveurs des quarks sont toujours conservées

Dans l'interaction faible, la saveur peut ne pas être conservée. (3)

On définit l'étrangeté S comme

$$S = -(N(s) - N(\bar{s}))$$

où $N(s)$ = nombre de quarks s

$N(\bar{s})$ = " " " \bar{s}

L'étrangeté est conservée dans les réactions fortes et électromagnétiques et n'est pas forcément conservée dans les réactions faibles.

5) Isospin

Dans les réactions fortes, l'isospin I et la 3^{ème} composante I_3 sont toujours conservés.

Remarque : on définit l'hypercharge d'une particule par

$$Y = B + S$$

La charge Q est donnée alors par

$$Q = \frac{Y}{2} + I_3$$

Donc si 3 des 4 "charges" Q, B, S, I_3 sont conservés, alors la 4^{ème} l'est forcément.

Regardons maintenant les réactions qui violent ces règles de conservations. Remarquons que pour les réactions de production ($a+b \rightarrow \dots$) la cinématique est toujours vérifiée. (4)

(2) Violé le nombre baryonique : +2 avant +1 après

(4) Nombre baryonique : +1 avant +2 après
Etrangeté : 0 avant -1 après

(6) idem que (4)

(7) ? est une (ou plusieurs) particule avec
 $Q = 0$; $B = 0$; $L = 0$; $S = +2$

par exemple : $K^0 + K^0$
 $\bar{\Sigma}^+ + \Sigma^-$

(8) Etrangeté : 0 avant ; -2 après

(9) Nombre baryonique : 1 avant ; -1 après

(12) Etrangeté : -1 avant ; -2 après

(13) Etrangeté : 0 avant ; -1 après

(16) Charge : +1 avant ; -1 après

(17) Charge : 0 avant ; +2 après
Nombre leptonique : +1 avant ; -1 après

(18) Etrangeté : 0 avant ; -1 après

Nombres leptoniques L_e : 0 avant -1 après

L_μ : +1 avant +2 après

(19) Nombre baryonique : +2 avant ; 1 après

(21) Etrangeté : 0 avant -1 après

(23) Nombre baryonique : +1 avant +2 après
Etrangeté : 0 avant , -1 après

(24) Etrangeté -2 avant , 0 après

(25) Etrangeté -2 avant , -1 après

(26) idem (25)

(27) idem (25)

(28) Etrangeté -2 avant , 0 après

(29) Etrangeté -3 avant , -1 après

(30) Etrangeté -3 avant , -2 après

(31) Etrangeté -3 avant , -2 après

(33) et (34) Isospin I=1 avant I=0 après

(35) (36) (37) Etrangeté, +1 avant , 0 après

(38) Etrangeté -1 avant , 0 après

(39) (40) (41) idem (35)

(42) Nombre leptonique L_μ : -1 avant , 0 après

(43) " " L_μ : 0 avant ; +2 après

(32) Cinématique $m_{\pi^0} + m_{K^-} > m_{\rho^-}$

(49) ici le meson B^- est composé d'un quark de saveur b, alors que les mesons D^0 et π^- n'ont pas de quarks b dans leur composition. A l'instar de l'étrangeté S, on peut définir

! il faut que l'interaction ne soit pas faible

Un nombre "beauté" comme

$N(b) - N(\bar{b})$; ce nombre est conservé dans les interactions fortes et électromagnétiques et peut ne pas être conservé lors des interactions faibles.

(50) Isospin I=0 avant I=1 après
 I_3 conservé (avant 0, après 0) $\Rightarrow I=1$ après

composition d'un upin 1 et 0 $\Rightarrow J_{\text{up}} = 1/2, J_{\text{down}} = 1/2 \Rightarrow J_{\text{tot}} = 1$
 $J_{\text{up}} = 1/2, J_{\text{down}} = 1/2 \Rightarrow J_{\text{tot}} = 1$

Remarques Beaucoup de désintégrations (24) à (50) ne conservent pas l'étrangeté, comme on l'a vu, l'interaction faible ne conserve pas nécessairement cette propriété. En fait violation de l'étrangeté ne signifie pas réaction interdite, c'est simplement la signature de l'interaction faible, tout comme la présence de neutrinos.

on peut avoir une int. faible
écrire le diagramme de Feynman
 \rightarrow int. faible!

$J/\psi \rightarrow \omega + \pi^0$

Série 12

Modèle de Sakata:

(modèle proposé avant le modèle des quarks, ne marche pas)

En 1956, Shoichi Sakata proposa un modèle dans lequel les hadrons étaient constitués de composants, selon les arrangements suivants:

$$\begin{aligned} \text{Mesons} &= q_i \bar{q}_j \\ \text{Baryons} &= q_i q_j \bar{q}_k \end{aligned}$$

Les composants ayant les caractéristiques suivantes:

	J	B	S	I	I ₃
q _n	1/2	1	0	1/2	1/2
q _d	1/2	1	0	1/2	-1/2
q _s	1/2	1	-1	0	0

Que valent la charge et l'hypercharge de chaque hadron ?

Retrouve-t-on les mêmes caractéristiques pour les supermultiplets de hadrons de Gell-Mann et Neeman ?

Corrigé série 12

Modèle de Sakata:

En 1956, Shoichi Sakata proposa un modèle dans lequel les hadrons n'étaient pas des particules élémentaires, mais faisaient constitués de composants, selon les arrangements suivants:

$$\begin{aligned} \text{Mesons} &= q_i \bar{q}_j \\ \text{Baryons} &= q_i q_j \bar{q}_k \end{aligned}$$

Les composants avaient les caractéristiques suivantes:

	J	B	S	I	I_3
q_n	1/2	1	0	1/2	1/2
q_d	1/2	1	0	1/2	-1/2
q_s	1/2	1	-1	0	0

On définit l'hypercharge par

$$Y = B + S$$

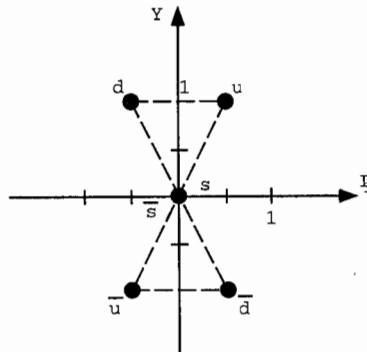
La charge étant donnée par

$$Q = \frac{Y}{2} + I_3$$

Ainsi, pour les constituants q_n , q_d et q_s , on a

	Y	Q
q_n	1	1
q_d	1	0
q_s	0	0

Les anti-composants \bar{q}_n , \bar{q}_d et \bar{q}_s ont des charges et hypercharges opposées. Reportons ces composants dans un plan $I_3 - Y$:

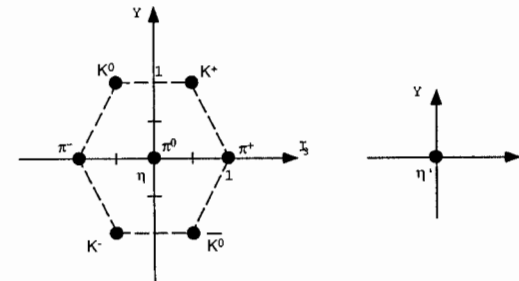
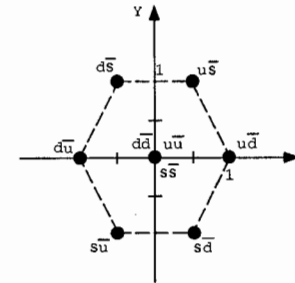


Mesons

Selon ce modèle, les mesons sont composés par $q_i \bar{q}_j$, où $q_i, q_j = q_n, q_d, q_s$; on peut ainsi former 9 mesons différents, le tableau ci-dessous donne la charge, l'hypercharge et la troisième composante de l'isospin pour ces 9 mesons:

	Y	Q	I_3
$q_n \bar{q}_n$	0	0	0
$q_n \bar{q}_d$	0	1	1
$q_n \bar{q}_s$	1	1	1/2
$q_d \bar{q}_n$	0	-1	-1
$q_d \bar{q}_d$	0	0	0
$q_d \bar{q}_s$	1	0	-1/2
$q_s \bar{q}_n$	-1	-1	-1/2
$q_s \bar{q}_d$	-1	0	1/2
$q_s \bar{q}_s$	0	0	0

Si l'on reporte ces 9 combinaisons dans un plan $I_3 - Y$, on retrouve bien la représentation des mesons en multiplet. En fait les 9 mesons sont représentés par un octet et par un singlet; ceci découle de la représentation irréductibles du groupe $SU(3)$ qui est le groupe de symétrie de l'interaction forte.

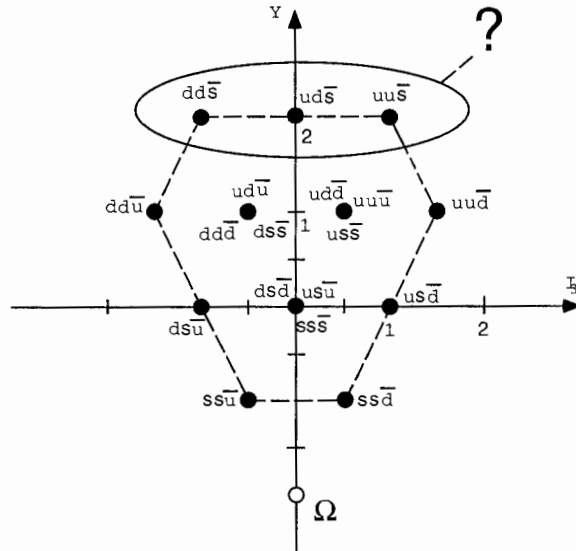


Baryons

Selon le modèle de Sakata, les baryons sont composés par $q_i q_j \bar{q}_k$, où $q_i, q_j, q_k = q_n, q_d, q_s$. 18 baryons différents sont ainsi formés:

	Y	Q	I_3		Y	Q	I_3		Y	Q	I_3
$q_n q_n \bar{q}_n$	1	1	1/2	$q_n q_s \bar{q}_s$	1	1	1/2	$q_d q_s \bar{q}_s$	1	0	-1/2
$q_n q_n \bar{q}_d$	1	2	3/2	$q_n q_s \bar{q}_n$	0	0	0	$q_d q_s \bar{q}_n$	0	-1	-1
$q_n q_n \bar{q}_s$	2	2	1	$q_n q_d \bar{q}_d$	0	1	1	$q_d q_s \bar{q}_d$	0	0	0
$q_n q_d \bar{q}_d$	1	1	1/2	$q_d q_d \bar{q}_d$	1	0	-1/2	$q_s q_s \bar{q}_s$	0	0	0
$q_n q_d \bar{q}_s$	2	1	0	$q_d q_d \bar{q}_s$	2	0	-1	$q_s q_s \bar{q}_n$	-1	-1	-1/2
$q_n q_d \bar{q}_n$	1	0	-1/2	$q_d q_d \bar{q}_n$	1	-1	-3/2	$q_s q_s \bar{q}_d$	-1	0	1/2

Si on reporte ces 18 baryons dans le plan $I_3 - Y$, on remarque un problème: d'une part ce modèle produit des baryons qui n'existent pas, à tout le moins qui n'ont jamais été observés ($q_d q_d \bar{q}_s, q_n q_d \bar{q}_s$ et $q_n q_n \bar{q}_s$); mais surtout, le modèle ne prévoit pas la particule Ω^- ($I_3 = 0, Y = -2$), qui elle, a bien été observée. Le modèle de Sakata doit donc être rejeté.



Gell-Mann et Zweig ont proposé un modèle (quark) dont le triplet de composant est:

	J	B	S	I	I_3	Y	Q
q_u	1/2	1/3	0	1/2	1/2	1/3	2/3
q_d	1/2	1/3	0	1/2	-1/2	1/3	-1/3
q_s	1/2	1/3	-1	0	0	-2/3	-1/3

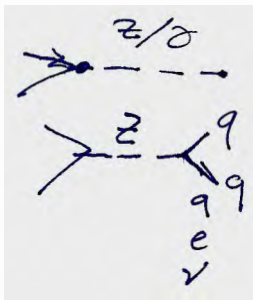
Selon ce modèle, les mesons sont formés par $q_i \bar{q}_j$ et les baryons par $q_i q_j q_k$. Ce modèle reproduit aussi bien les multiplets de mesons que les multiplets de baryons.

Série 13

Diagrammes de Feynman

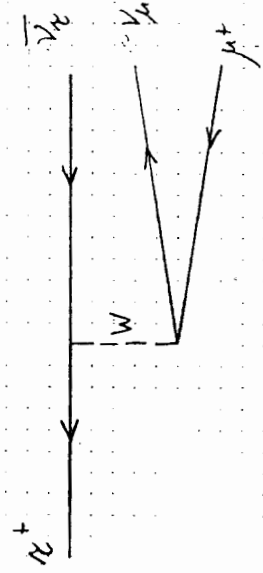
Esquisser les diagrammes de Feynman des processus suivants:

- $\tau^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu + \bar{\nu}_\tau$ (1)
- $\tau^+ \rightarrow \pi^+ + \bar{\nu}_\tau$ (2)
- $\pi^- + p \rightarrow \eta + n$ (3)
- $K_S^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ (4)
- $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$ (5)
- $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$ (6)
- $K^+ \rightarrow \pi^0 + e^+ + \nu_e$ (7)
- $K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ (8)
- $K_S^0 \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ (9)
- $\mu^- + e^- \rightarrow \mu^- + e^-$ (10)
- $\nu_\mu + e^- \rightarrow \mu^- + \nu_e$ (11)
- $\bar{\nu}_e + e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + \mu^-$ (12)
- $\Lambda \rightarrow \pi^- + p$ (13)
- $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda + \gamma + \gamma$ (14)
- $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda + e^- + e^+$ (15)
- $\Xi^0 \rightarrow e^- + p + \bar{\nu}_e$ (16)
- $\Xi^0 \rightarrow \Lambda + \pi^0$ (17)
- $\Xi^- \rightarrow \Lambda + \pi^-$ (18)
- $\Omega^- \rightarrow \Lambda + \pi^-$ (19)
- $\Omega^- \rightarrow \Lambda + K^-$ (20)
- $\Omega^- \rightarrow \Xi^0 + \pi^-$ (21)
- $\Omega^- \rightarrow \Xi^0 + K^-$ (22)
- $\Xi^- \rightarrow \Sigma^0 + \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ (23)
- $\Xi^- \rightarrow e^- + p + \bar{\nu}_e + \pi^-$ (24)
- $e^+ + e^- \rightarrow \Lambda + K^+ + \pi^0 + \pi^- + n \rightarrow \text{hadronization}$ (25)
- $\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-$ (26)
- $\gamma + e^- \rightarrow e^- + \nu_e + \bar{\nu}_e$ (27)
- $\nu_\mu + p \rightarrow \mu^- + \Delta^{++}$ (28)
- $D^+ \rightarrow \bar{K}^0 + \mu^+ + \nu_\mu$ (29)
- $B^+ \rightarrow \bar{D}^0 + \pi^+$ (30)
- $B^+ \rightarrow J/\psi(1S) + K^+$ (31)
- $\Upsilon(1S) \rightarrow B^0 + \bar{B}^0$ (32)
- $\phi \rightarrow K^+ + K^-$ (33)
- $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ (34)
- $e^+ + e^- \rightarrow W^+ + W^-$ (35)

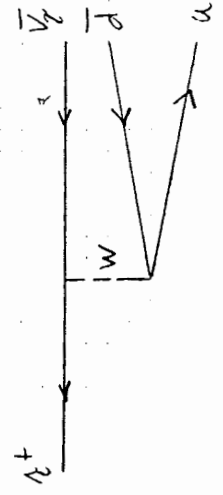


(1) $\tau^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu + \bar{\nu}_\tau$

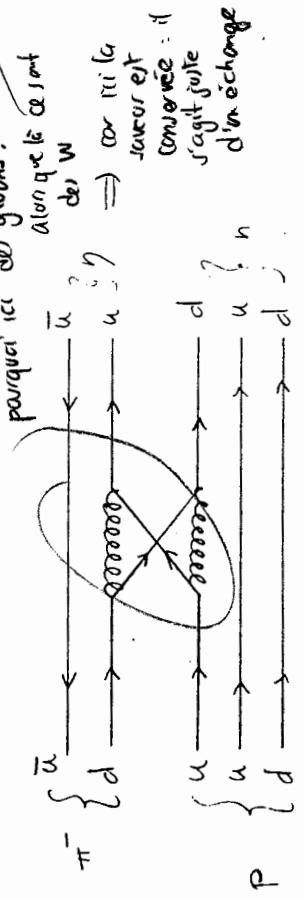
Présence de neutrinos \Rightarrow processus faible



(2) $\tau^+ \rightarrow \pi^+(d\bar{u}) + \bar{\nu}_\tau$

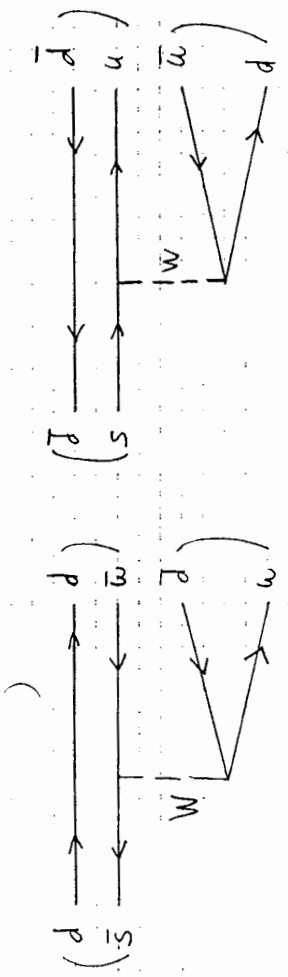


(3) $\pi^-(d\bar{u}) + p(uud) \rightarrow \eta(u\bar{u}) + n(udd)$

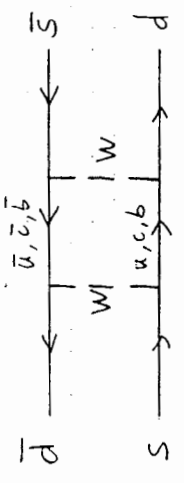


(4) $K_S^0 (d\bar{s} + \bar{d}s) \rightarrow \pi^+(d\bar{u}) + \pi^-(d\bar{u})$

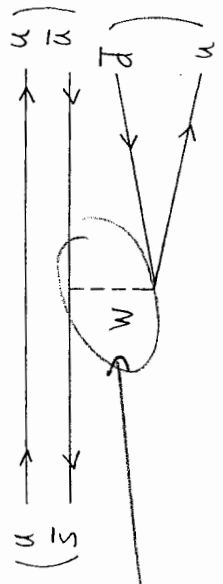
le K_S^0 est une combinaison linéaire de $K^0(d\bar{s})$ et $\bar{K}^0(\bar{d}s)$ $|K_S^0\rangle = \alpha|K^0\rangle + \beta|\bar{K}^0\rangle$



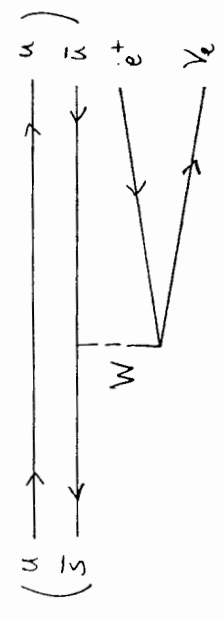
(5) $\bar{K}^0 \leftrightarrow K^0$



(6) $K^+(u\bar{s}) \rightarrow \pi^+(u\bar{d}) + \pi^0(u\bar{u})$

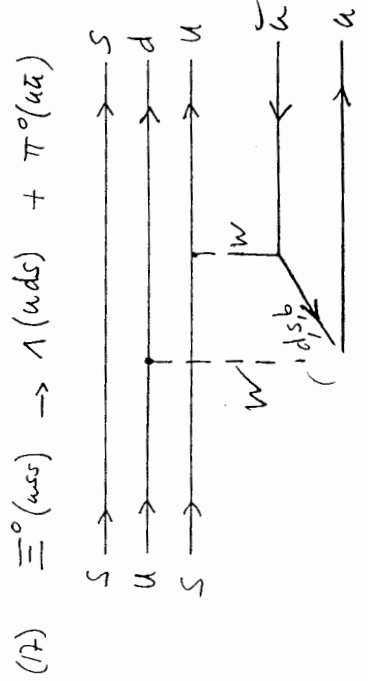
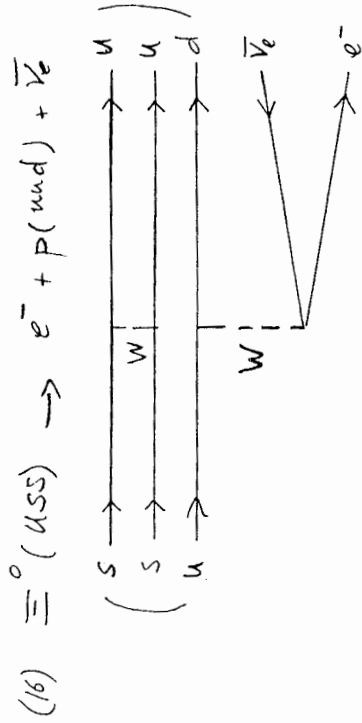
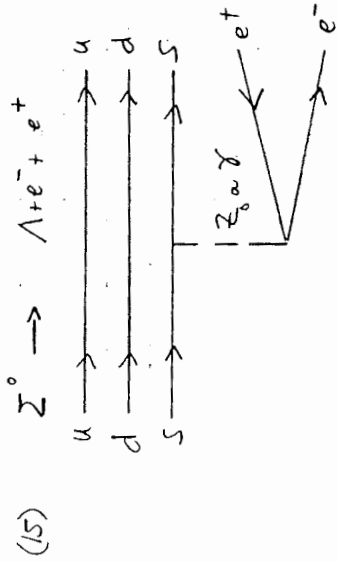
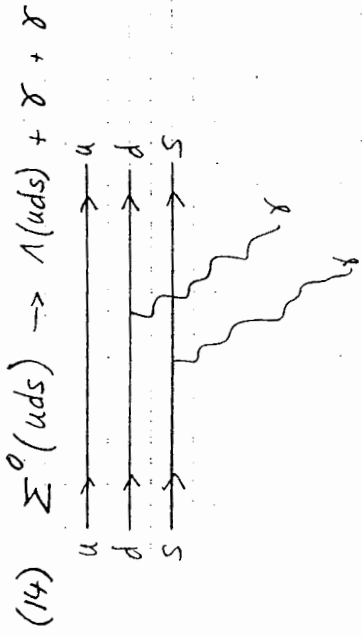
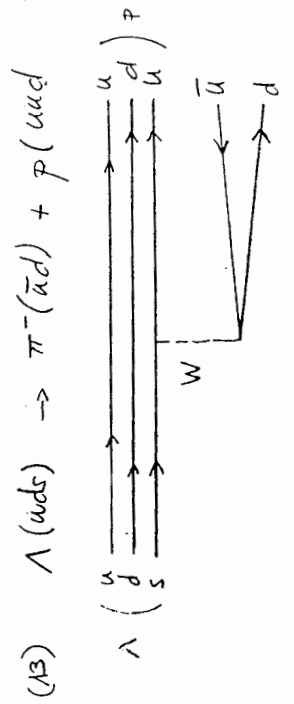
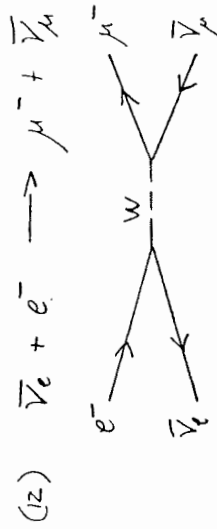
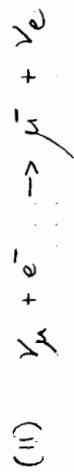
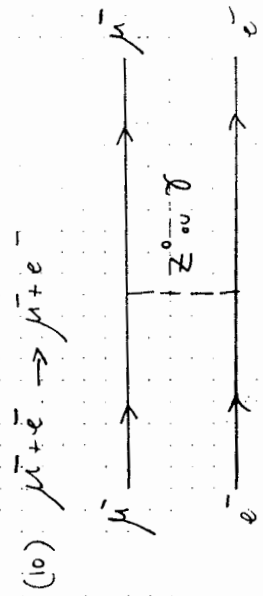
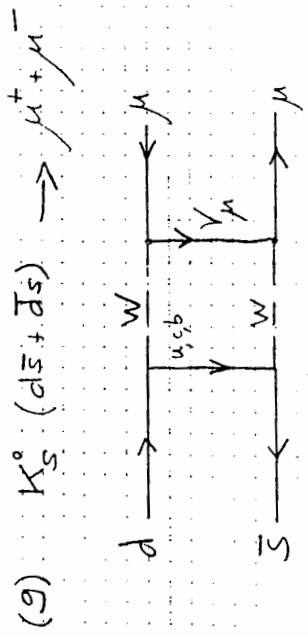


(7) $K^+(u\bar{s}) \rightarrow \pi^0(u\bar{u}) + e^+ + \nu_e$

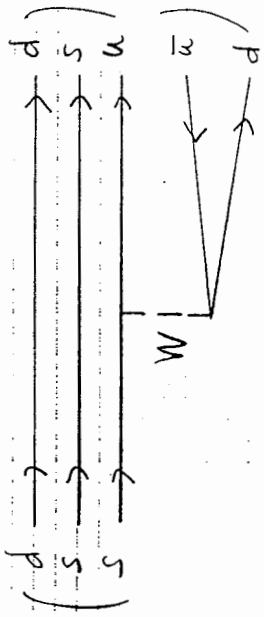


(8) $K^+(u\bar{s}) \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$

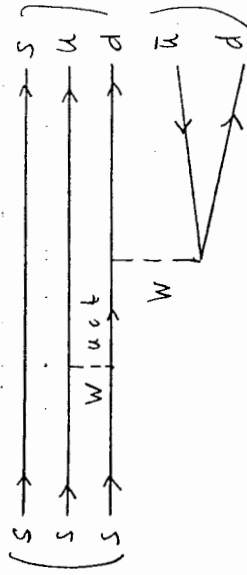




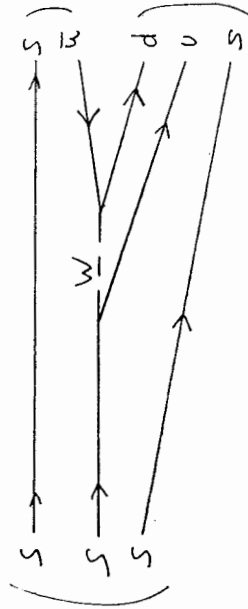
$$(18) \Xi^-(dss) \rightarrow \Lambda(uuds) + \pi^-(\bar{u}d)$$



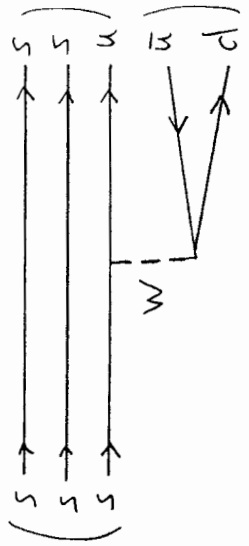
$$(19) \Xi^-(sss) \rightarrow \Lambda(uuds) + \pi^-(\bar{u}d)$$



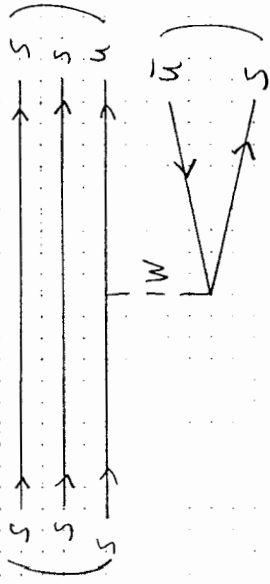
$$20) \Xi^-(sss) \rightarrow \Lambda(uuds) + K^-(\bar{u}s)$$



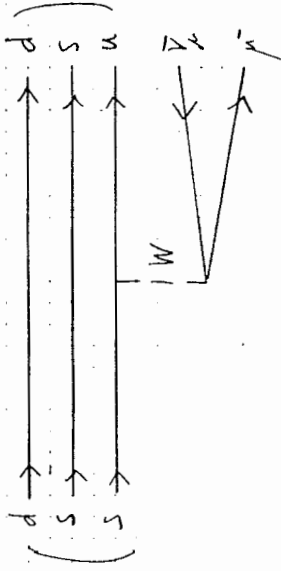
$$21) \Xi^-(sss) \rightarrow \Xi^0(uss) + \pi^-(\bar{u}d)$$



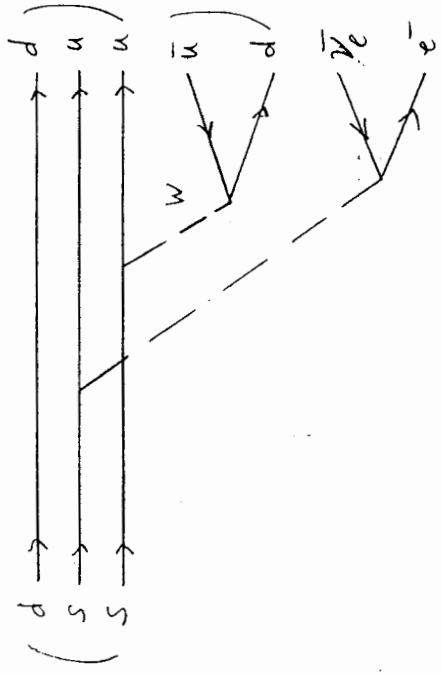
$$(22) \Xi^-(sss) \rightarrow \Xi^0(uss) + K^-(s\bar{u})$$



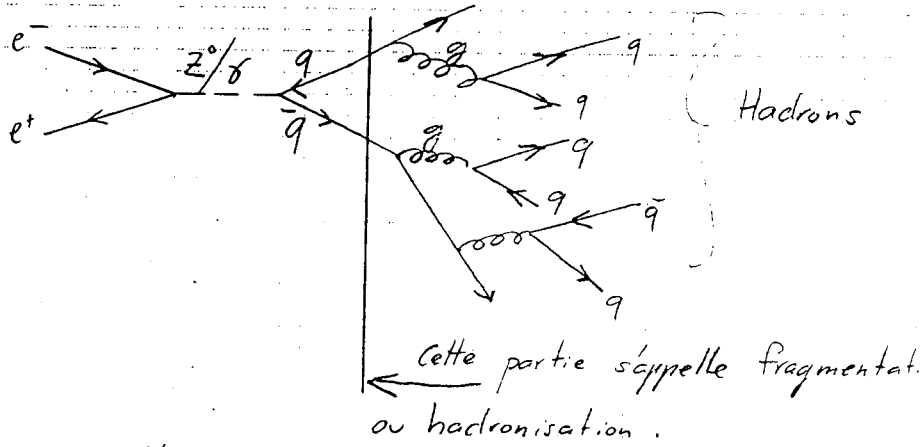
$$(23) \Xi^-(dss) \rightarrow \Sigma^0(uds) + p(\bar{u}) + \bar{\nu}_\mu$$



$$(24) \Xi^-(dss) \rightarrow p(uds) + e^- + \bar{\nu}_e + \pi^-(d\bar{u})$$



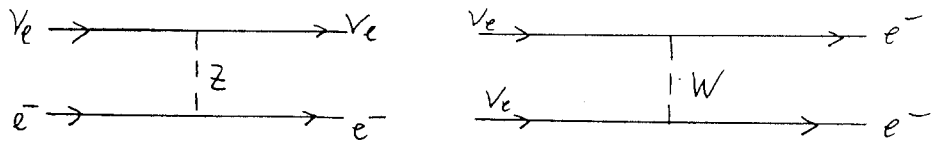
(25) $e^+e^- \rightarrow \Lambda + K^+ + \pi^0 + \pi^- + n$



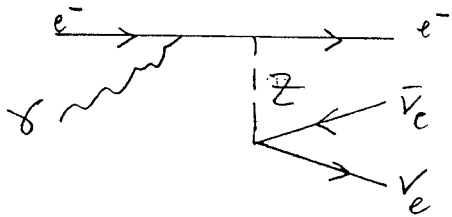
Au LEP on l'on produit des collision e^+e^- près de 7 collisions sur 10 (pour une énergie du centre de masse égale à la masse du Z^0) sont de ce type.

$e^+e^- \rightarrow q\bar{q} \rightarrow$ (hadronisation)

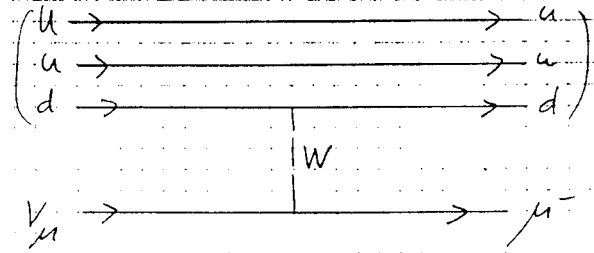
(26) $\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-$



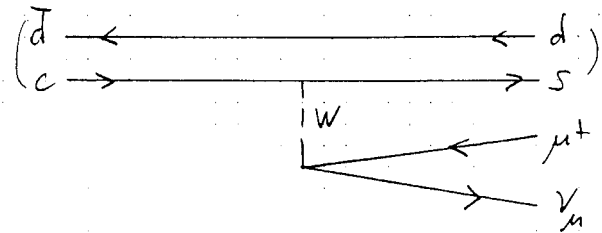
(27) $\gamma + e^- \rightarrow e^- + \nu_e + \bar{\nu}_e$



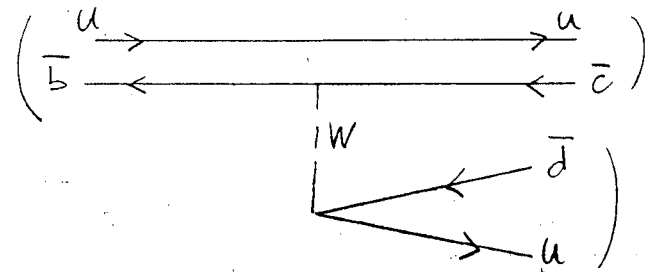
(28) $\nu_\mu + p(uud) \rightarrow \mu^- + \Delta^{++}(uuu)$



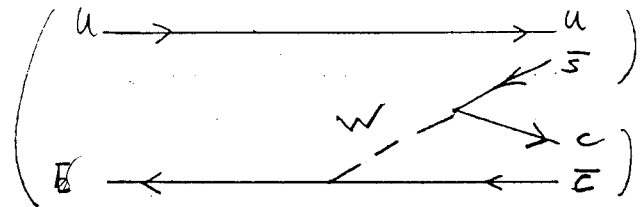
(29) $D^+(cd) \rightarrow \bar{K}^0(\bar{d}s) + \mu^+ + \nu_\mu$



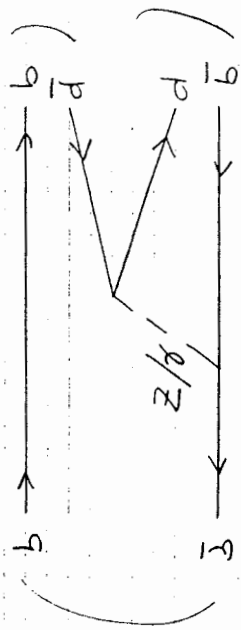
(30) $B^+(\bar{b}u) \rightarrow \bar{D}^0(u\bar{c}) + \pi^+(u\bar{d})$



(31) $B^+(\bar{b}u) \rightarrow J/\psi(c\bar{c}) + K^+(u\bar{s})$



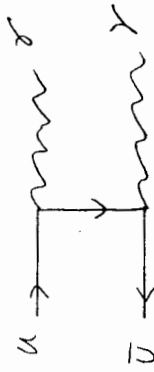
(32) $\mathcal{I}(b\bar{b}) \rightarrow B^0(b\bar{d}) + \bar{B}^0(\bar{b}d)$



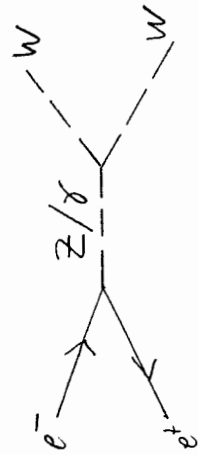
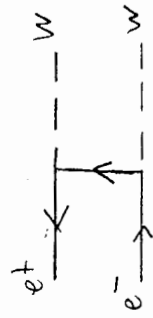
(33) $\phi(ss) \rightarrow K^+(s\bar{u}) + K^-(\bar{s}u)$

idem 32 or $s \leftrightarrow b$ et $u \leftrightarrow d$

(34) $\pi^0(u\bar{u}) \rightarrow \gamma\gamma$



(35) $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$



Série 14

Exercice 1:

Lequel de ces deux canaux de désintégration est le plus rare ?



Expliquer pourquoi.

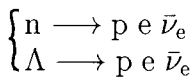
Exercice 2:

Pourquoi la désintégration $D^0 \longrightarrow K^+ \pi^-$ est-elle plus rare que $D^0 \longrightarrow K^- \pi^+$?

En supposant $\theta_c = 13.7^\circ$, estimer grossièrement le rapport des probabilités de ces deux désintégrations.

Exercice 3:

Estimer l'angle de Cabibbo θ_c en comparant les désintégrations β du neutron et du Λ .



On suppose que le facteur d'espace de phase est approximativement proportionnel à $(M - m_p)^5$ où M est la masse de la particule qui se désintègre.

Données:

$$m_p = 938.3 \text{ Mev}/c^2$$

$$m_n = 939.6 \text{ Mev}/c^2$$

$$m_\Lambda = 1115.7 \text{ Mev}/c^2$$

$$\tau_n = 887 \text{ s}$$

$$\tau_\Lambda = 2.63 \times 10^{-10} \text{ s}$$

$$\text{BR}(n \longrightarrow p e \bar{\nu}_e) = 1 \quad (\text{seul moyen de désintégration})$$

$$\text{BR}(\Lambda \longrightarrow p e \bar{\nu}_e) = 8.3 \times 10^{-4} \quad (= \text{proba. de désint. selon ce canal})$$

$$\uparrow \propto (M - m_p)^5 (c \cdot \text{e})^2$$

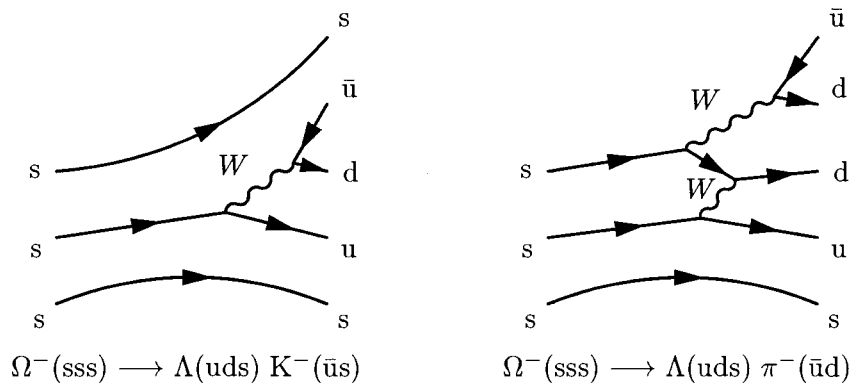
$$\text{Br} = \dots$$

$$\uparrow \propto \dots$$

Corrigé série 14

Exercice 1:

Dessignons d'abord pour chaque réaction le diagramme de feynman à l'ordre le plus bas:



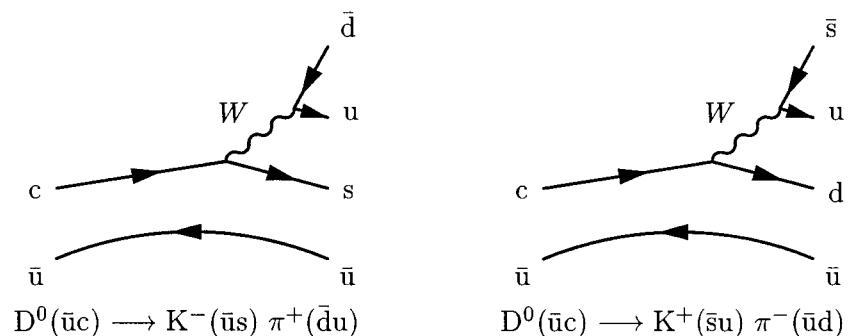
Pour la désintégration $\Omega^- \rightarrow \Lambda \pi^-$ il est impossible de dessiner un diagramme avec moins de quatre vertex.

Chaque vertex d'un diagramme fait intervenir un facteur inférieur à 1, e.g. le vertex $s \rightarrow uW$ fait intervenir un facteur $\frac{g_W \cos \theta_C}{2\sqrt{2}}$, avec $g_W = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sin \theta_W \sqrt{137}}$. La largeur d'un diagramme étant proportionnelle au carré du produit des facteurs de vertex présent dans le diagramme, on comprend qualitativement que la désintégration $\Omega^- \rightarrow \Lambda \pi^-$ est moins probable que $\Omega^- \rightarrow \Lambda K^-$.

Les mesures donnent: $BR(\Omega^- \rightarrow \Lambda K^-) = 0.678 \pm 0.007$, $BR(\Omega^- \rightarrow \Lambda \pi^-) < 1.9 \times 10^{-4}$.

Exercice 2:

Dessignons d'abord pour chaque réaction le diagramme de feynman à l'ordre le plus bas:



Les facteur de vertex sont:

$$c \rightarrow d W : g_W \cos \theta_C$$

$$c \rightarrow s W : g_W \sin \theta_C$$

$$u \rightarrow d W : g_W \cos \theta_C$$

$$u \rightarrow s W : g_W \sin \theta_C$$

Le rapport des facteurs de branchement des deux désintégrations vaut donc:

$$R = \frac{\text{BR}(D^0 \rightarrow K^+ \pi^-)}{\text{BR}(D^0 \rightarrow K^- \pi^+)} = \frac{\Gamma(D^0 \rightarrow K^+ \pi^-)}{\Gamma(D^0 \rightarrow K^- \pi^+)} \simeq \frac{\sin^4 \theta_C}{\cos^4 \theta_C} = \tan^4 \theta_C$$

En prenant $\theta_C \simeq 13.7^\circ$, on obtient:

$$R \simeq 3.1 \times 10^{-3}$$

Les mesures expérimentales donnent:

$$\text{BR}(D^0 \rightarrow K^- \pi^+) = (3.9 \pm 0.1)^{-2}$$

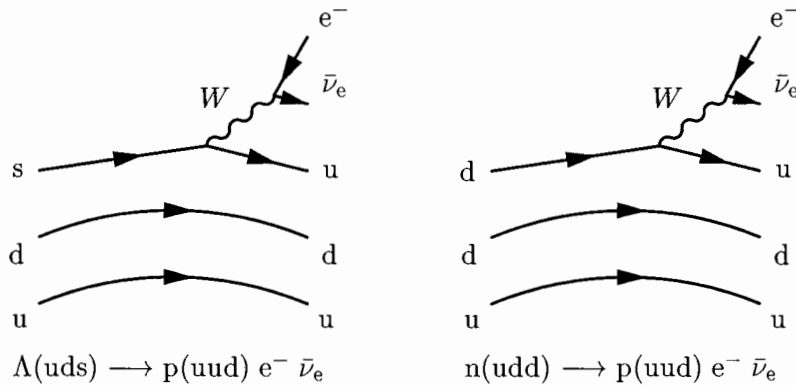
$$\text{BR}(D^0 \rightarrow K^+ \pi^-) = (2.8 \pm 0.9)^{-4}$$

Soit:

$$R \simeq 1.4 \times 10^{-2}$$

Exercice 3:

Dessignons d'abord pour chaque réaction le diagramme de feynman à l'ordre le plus bas:



Au vertex $d \rightarrow uW$ contribue un facteur $g_W \cos \theta_C$ alors qu'au vertex $s \rightarrow uW$ contribue un facteur $g_W \sin \theta_C$. nous avons donc

$$\Gamma(\Lambda \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e) \propto \sin^2 \theta_C \times (m_\Lambda - m_p)^5$$

$$\Gamma(n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e) \propto \cos^2 \theta_C \times (m_n - m_p)^5$$

Le facteur de branchement d'un canal de désintégration est défini par:

$$\text{BR}(a \rightarrow X) = \frac{\Gamma(a \rightarrow X)}{\Gamma_{tot}}$$

avec:

$$\Gamma_{tot} = \sum_Y \Gamma(a \rightarrow Y) = \frac{1}{\tau_a}$$

D'où:

$$\frac{\text{BR}(\Lambda \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e)}{\text{BR}(n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e)} = \frac{\Gamma(\Lambda \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e)}{\Gamma(n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e)} \times \frac{\tau_\Lambda}{\tau_n} = \frac{\tau_\Lambda}{\tau_n} \times \frac{\sin^2 \theta_C}{\cos^2 \theta_C} \times \left(\frac{m_\Lambda - m_p}{m_n - m_p} \right)^5$$

Finalement:

$$\tan^2 \theta_C = \frac{\text{BR}(\Lambda \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e)}{\text{BR}(n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e)} \times \frac{\tau_n}{\tau_\Lambda} \times \left(\frac{m_n - m_p}{m_\Lambda - m_p} \right)^5 = 0.059$$

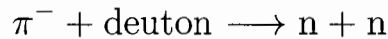
Soit:

$$\theta_C = 13.67^\circ$$

Série 15

Exercice 1:

Un pion négatif est capturé par un deuton (noyau de deutérium), sur l'orbite de Bohr de plus basse énergie. Il interagit alors fortement avec le deuton selon la réaction:



Utiliser la conservation de la parité et du moment cinétique total pour déterminer la parité du pion.

Données:

$$J^P(\text{deuton}) = 1^+$$

$$J^P(n) = \frac{1}{2}^+$$

$$J^P(\pi^-) = 0^?$$

Exercice 2:

La résonance $\Xi(1530)P_{13}$ ($I = 1/2$) se désintègre toujours en un système $\Xi \pi$ par interaction forte. Utiliser la conservation de l'isospin pour:

- Identifier les canaux de désintégration du $\Xi(1530)P_{13}^-$ ($I_3 = -1/2$) et du $\Xi(1530)P_{13}^0$ ($I_3 = 1/2$).
- Calculer le facteur de branchement de chaque canal.

Exercice de réflexion:

Pourquoi un miroir échange-t-il la droite avec la gauche, mais pas le haut avec le bas ?

Corrigé Série 15

Exercice 1

a) Conservation de la parité :

$$P_i = P_f \quad (1)$$

$$P_i = \text{parité initiale} = P_\pi \cdot P_d \cdot (-1)^{l_i}$$

$$P_f = \text{parité finale} = (P_n)^2 (-1)^{l_f}$$

où

$$P_\pi = \text{parité intrinsèque du } \pi$$

$$P_d = \text{" " du deuton} = +1$$

$$P_n = \text{" " du neutron} = +1$$

$$(-1)^{l_i} = \text{" de la fonction d'onde orbitale du système initial.}$$

$$(-1)^{l_f} = \text{parité de la fonction d'onde orbitale du système final.}$$

Le pion étant capturé sur l'orbite de Bohr de plus basse énergie, $l_i = 0$, donc (1) s'écrit :

$$P_\pi = (-1)^{l_f} \quad (2)$$

l_f sera déterminé par la conservation du moment cinétique total; $\vec{J}_i = \vec{J}_f$

Etat initial :

$$\vec{J}_i = \vec{J}_\pi \oplus \vec{J}_d \oplus \vec{l}_i$$

($\oplus \equiv$ Composition des moment cinétiques.)

mais $J_\pi = 0, l_i = 0$

$$\Rightarrow \vec{J}_i = \vec{J}_d \quad (3)$$

Etat final :

$$\vec{J}_f = \vec{J}_{nn} = \vec{S}_n \oplus \vec{S}_n \oplus \vec{l}_f \quad (4)$$

où \vec{S}_n est le spin du neutron ($S_n = \frac{1}{2}$)

or, on sait que $J_d = 1$, et

$$S \equiv S_n \oplus S_n = \frac{1}{2} \oplus \frac{1}{2} = \{0; 1\}$$

de (3) et (4), nous avons donc

$$J_f = J_i = 1 = \{0; 1\} \oplus l_f$$

il y a quatre cas possible :

- $S = 1, l_f = 0$
- $S = 1, l_f = 1$
- $S = 1, l_f = 2$
- $S = 0, l_f = 1$

Exercice 2.

(4)

Pour simplifier, écrivons $\Xi(153_0)P_{13} \equiv \Xi^*$.

L'isospin du Ξ^* est de $\frac{1}{2}$, le Ξ^* se présente sous deux états de charge :

$$\Xi^{*0} \equiv \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$\Xi^{*-} \equiv \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

Les canaux de désintégration possibles sont :

$$\Xi^{*0} \rightarrow \Xi^0 \pi^0$$

$$\Xi^{*0} \rightarrow \Xi^- \pi^+$$

$$\Xi^{*-} \rightarrow \Xi^0 \pi^-$$

$$\Xi^{*-} \rightarrow \Xi^- \pi^0$$

a) Désintégration du Ξ^{*0}

$$|\Xi^{*0}\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$|\Xi^0 \pi^0\rangle = |\Xi^0\rangle \otimes |\pi^0\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \otimes |1, 0\rangle$$

(l'isospin du Ξ est $\frac{1}{2} \Rightarrow$ 2 états de charges Ξ^0, Ξ^-
l'isospin du π est 1 \Rightarrow 3 états de charge π^+, π^0, π^-)

$$|\Xi^- \pi^+\rangle = |\Xi^-\rangle \otimes |\pi^+\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \otimes |1, 1\rangle$$

Le neutron étant un fermion, la fonction d'onde d'un état à n neutrons doit être antisymétrique.

On sait de la composition de deux spins $\frac{1}{2}$, que l'état $S=0$ est symétrique alors que l'état $S=1$ est antisymétrique ; la partie spinorielle de la fonction d'onde d'un système à 2 neutrons a donc la symétrie :

$$\psi_{\text{spin}}(n_1, n_2) = (-1)^{S+1} \psi_{\text{spin}}(n_2, n_1)$$

la partie orbitale de la fonction d'onde a une symétrie

$$\psi_{\text{orb}}(n_1, n_2) = (-1)^{l_f} \psi_{\text{orb}}(n_2, n_1)$$

d'où la fonction d'onde totale :

$$\psi(n_1, n_2) \equiv \psi_{\text{spin}} \otimes \psi_{\text{orb}} = (-1)^{l_f + S + 1} \psi(n_2, n_1)$$

mais $(-1)^{l_f + S + 1}$ doit être égal à -1

$\Rightarrow l_f + S$ doit être pair

le seul cas possible est $S=1$, $l_f=1$

d'où la parité du pion (2)

$$\underline{\underline{P_\pi = (-1)^{l_f} = -1}}$$

soit

(6)

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \frac{3}{2} \frac{1}{2} \left| [H, I^2] \right| \equiv^{*0} \right\rangle = \left\langle \frac{3}{2} \frac{1}{2} \left| [H, I^2] \right| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{3}{2} \frac{1}{2} \left| H I^2 \right| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle - \left\langle \frac{3}{2} \frac{1}{2} \left| I^2 H \right| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \left\langle \frac{3}{2} \frac{1}{2} \left| H \right| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle - \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} + 1 \right) \left\langle \frac{3}{2} \frac{1}{2} \left| H \right| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \\ \Leftrightarrow \left\langle \frac{3}{2} \frac{1}{2} \left| H \right| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle &= 0 \end{aligned}$$

(3) devient donc :

$$\left\langle \equiv^0 \pi^0 \left| H \right| \equiv^{*0} \right\rangle = -\sqrt{\frac{1}{3}} A_{1/2}$$

de même : (2)

$$\begin{aligned} \left\langle \equiv^{-} \pi^+ \left| H \right| \equiv^{*0} \right\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}} \underbrace{\left\langle \frac{3}{2} \frac{1}{2} \left| H \right| \equiv^{*0} \right\rangle}_{=0} + \sqrt{\frac{2}{3}} \underbrace{\left\langle \equiv^{*0} \left| H \right| \equiv^{*0} \right\rangle}_{=A_{1/2}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} A_{1/2} \end{aligned}$$

Donc :

$$\Gamma(\equiv^{*0} \rightarrow \equiv^0 \pi^0) = \frac{2\pi}{h} \frac{1}{3} A_{1/2}^2 \frac{dw}{dE}$$

$$\Gamma(\equiv^{*0} \rightarrow \equiv^{-} \pi^+) = \frac{2\pi}{h} \frac{2}{3} A_{1/2}^2 \frac{dw'}{dE}$$

En supposant les espaces de phases égaux :

$$\frac{dw}{dE} = \frac{dw'}{dE}$$

Exprimons les états $|\Xi^0 \pi^0\rangle$ et $|\Xi^- \pi^+\rangle$ dans la base $\{|\Xi^{*0}\rangle; |\Xi^{*-}\rangle; |\frac{3}{2} -\frac{3}{2}\rangle, |\frac{3}{2} -\frac{1}{2}\rangle, |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle, |\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle\}$

$$\begin{aligned}
|\Xi^0 \pi^0\rangle &= |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \otimes |1, 0\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \\
&= \sqrt{\frac{2}{3}} |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} |\Xi^{*0}\rangle \quad (1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\Xi^- \pi^+\rangle &= |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \otimes |1, 1\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \\
&= \sqrt{\frac{1}{3}} |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |\Xi^{*0}\rangle \quad (2)
\end{aligned}$$

La largeur des deux canaux sont donnés par la règle d'or de Fermi :

$$\begin{aligned}
\Gamma(\Xi^{*0} \rightarrow \Xi^0 \pi^0) &= \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \Xi^0 \pi^0 | H | \Xi^{*0} \rangle|^2 \frac{d\omega}{dE} \\
\Gamma(\Xi^{*0} \rightarrow \Xi^- \pi^+) &= \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \Xi^- \pi^+ | H | \Xi^{*0} \rangle|^2 \frac{d\omega'}{dE'}
\end{aligned}$$

Calculons $\langle \Xi^0 \pi^0 | H | \Xi^{*0} \rangle$, en utilisant (1) :

$$\begin{aligned}
\langle \Xi^0 \pi^0 | H | \Xi^{*0} \rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} \langle \frac{3}{2}, \frac{1}{2} | H | \Xi^{*0} \rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \underbrace{\langle \Xi^{*0} | H | \Xi^{*0} \rangle}_{\equiv A_{1/2}} \\
&\equiv A_{1/2} \quad (3)
\end{aligned}$$

utilisons le fait que l'isospin est conservé lors d'une interaction forte $\Leftrightarrow [H, \vec{I}] = 0 \Rightarrow [H, I^2] = 0$

On obtient les facteurs de branchement :

$$Br(\Xi^{*0} \rightarrow \Xi^0 \pi^0) = \frac{\Gamma(\Xi^{*0} \rightarrow \Xi^0 \pi^0)}{\Gamma(\Xi^{*0} \rightarrow \Xi^0 \pi^0) + \Gamma(\Xi^{*0} \rightarrow \Xi^- \pi^+)} =$$

$$= \frac{1/3}{1/3 + 2/3} = \frac{1}{3}$$

$$Br(\Xi^{*0} \rightarrow \Xi^- \pi^+) = \frac{2}{3}$$

- b) Désintégration du Ξ^{*-}

Par des calculs analogues, on trouve :

$$Br(\Xi^{*-} \rightarrow \Xi^- \pi^0) = \frac{1}{3}$$

$$Br(\Xi^{*-} \rightarrow \Xi^0 \pi^-) = \frac{2}{3}$$

Série 16

Exercice 1:

Le méson $\rho(770)$ se désintègre toujours en deux mésons π par interaction forte. On suppose connu le spin et la parité du $\rho(770)$ et du π , ainsi que l'isospin du π ($J^P(\rho(770)) = 1^-, J^P(\pi) = 0^-, I(\pi) = 1$).

- Examiner cette désintégration du point de vue de la conservation du moment cinétique total et de la parité.
- A quelle propriété de symétrie un état à deux mésons π doit-il satisfaire ?
- Écrire tous les états propres de l'isospin total d'un système à deux π et donner ceux qui peuvent résulter de la désintégration du $\rho(770)$.
- En déduire l'isospin du $\rho(770)$ et les modes de désintégration de chaque état de charge.
- Les différents états de charge du $\rho(770)$ sont-ils états propres de l'opérateur de conjugaison de charge ? Si oui, pour quelles valeurs propres ?

Exercice 2:

Montrer que l'existence d'une particule avec un moment électrique dipolaire non nul impliquerait que l'interaction électromagnétique viole à la fois l'invariance par renversement du temps et l'invariance par renversement de l'espace.

Montrer que l'existence d'une particule avec un moment magnétique dipolaire non nul est compatible avec ces invariances.

Ex 1 $\rho \rightarrow \pi\pi$

On donne :

$$J^P(\rho) = 1^-$$

$$J^P(\pi) = 0^-$$

$$I(\pi) = 1$$

Le π se trouve sous trois états de charge :

$$|\pi^+\rangle = |1, 1\rangle$$

$$|\pi^0\rangle = |1, 0\rangle$$

$$|\pi^-\rangle = |1, -1\rangle$$

(a) Conservation du moment cinétique total

$$\vec{J}_\rho = \vec{J}_\pi \oplus \vec{J}_\pi \oplus \vec{L}$$

\vec{L} = moment cinétique orbital de l'état final à deux π .

$$J_S = 1, \quad J_\pi = 0$$

$$\Rightarrow L = 1$$

Cela est en accord avec la conservation de la parité :

$$P_S = -1 = (P_\pi)^2 (-1)^L = -1$$

(b) Conservation de l'isospin

En composant deux états d'isospin 1, on obtient 9 états d'isospin total :

$$I=0 \quad |0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(|\pi^+\pi^-\rangle - |\pi^0\pi^0\rangle + |\pi^-\pi^+\rangle \right)$$

$$I=1 \quad \begin{cases} |1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\pi^+\pi^0\rangle - |\pi^0\pi^+\rangle \right) \\ |1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\pi^+\pi^-\rangle - |\pi^-\pi^+\rangle \right) \\ |1,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\pi^0\pi^-\rangle - |\pi^-\pi^0\rangle \right) \end{cases}$$

$$I=2 \quad \begin{cases} |2,2\rangle = |\pi^+\pi^+\rangle ; |2,-2\rangle = |\pi^-\pi^-\rangle \\ |2,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\pi^+\pi^0\rangle + |\pi^0\pi^+\rangle \right) \\ |2,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(|\pi^+\pi^-\rangle + 2|\pi^0\pi^0\rangle + |\pi^-\pi^+\rangle \right) \\ |2,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\pi^0\pi^-\rangle + |\pi^-\pi^0\rangle \right) \end{cases}$$

Nous avons donc un singulet symétrique (I=0)
un triplet antisymétrique (I=1) et un
quintuplet symétrique (I=2)

Les pions sont des bosons, ils obéissent à
la statistique de Bose-Einstein, et la
fonction d'un système à n pions doit
être complètement symétrique ie si n=2

$$\psi^{tot}(\pi_1, \pi_2) = \psi^{tot}(\pi_2, \pi_1)$$

mais

$$\psi^{tot}(\pi_1, \pi_2) = \psi^{espace}(\pi_1, \pi_2) \otimes \psi^{Spin}(\pi_1, \pi_2) \otimes \psi^{IsoSpin}(\pi_1, \pi_2)$$

et

$$\psi^{espace}(\pi_1, \pi_2) = (-1)^L \psi^{espace}(\pi_2, \pi_1)$$

$$\psi^{Spin}(\pi_1, \pi_2) = (+1) \psi^{Spin}(\pi_2, \pi_1)$$

$$\psi^{IsoSpin}(\pi_1, \pi_2) = (-1)^I \psi^{IsoSpin}(\pi_2, \pi_1)$$

$$\text{donc } \psi^{tot} = (-1)^{L+I} \psi^{tot}$$

$$\text{et on veut } (-1)^{L+I} = 1$$

on a vu de L=1 d'où I=1

(4)

Les seuls états à deux pions possibles provenant de la désintégration du ρ sont :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\pi^+\pi^0\rangle - |\pi^0\pi^+\rangle \right) \equiv |\rho^+\rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\pi^+\pi^-\rangle - |\pi^-\pi^+\rangle \right) \equiv |\rho^0\rangle$$

$$\frac{1}{2} \left(|\pi^0\pi^-\rangle - |\pi^-\pi^0\rangle \right) \equiv |\rho^-\rangle$$

Conclusions : le ρ a trois états de charge ρ^-, ρ^0, ρ^+ qui se désintègrent selon :

$$\rho^+ \rightarrow \pi^+\pi^0$$

$$\rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$$

$$\rho^- \rightarrow \pi^-\pi^0$$

Ex 2

Soit une particule neutre ou chargée, on définit le moment électrique dipolaire par

$$\mu_e = \int \rho z dV$$

où z est pris le long de l'axe défini par le spin de la particule.

L'opérateur moment magnétique dipolaire est défini par

$$\vec{\mu}_e = \mu_e \vec{S}$$

où \vec{S} est le spin.

On définit de même l'opérateur moment magnétique

$$\vec{\mu}_m = \mu_m \vec{S}$$

En présence d'un champ électromagnétique, l'hamiltonien d'interaction est :

$$H = \vec{\mu}_m \cdot \vec{B} + \vec{\mu}_e \cdot \vec{E}$$

Regardons comment se transforment $\vec{\mu}_m$, $\vec{\mu}_e$, \vec{E} et \vec{B} sous les opérations P et T

$$\begin{array}{l} \vec{E} \xrightarrow{T} \vec{E} \\ \vec{E} \xrightarrow{P} -\vec{E} \end{array} ; \quad \begin{array}{l} \vec{B} \xrightarrow{T} -\vec{B} \\ \vec{B} \xrightarrow{P} \vec{B} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \vec{S} \xrightarrow{T} -\vec{S} \\ \vec{S} \xrightarrow{P} \vec{S} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \vec{\mu}_{e/m} \xrightarrow{T} -\vec{\mu}_{e/m} \\ \vec{\mu}_{e/m} \xrightarrow{P} \vec{\mu}_{e/m} \end{array}$$

Donc

$$\vec{\mu}_m \cdot \vec{B} \xrightarrow{P; T} \vec{\mu}_m \cdot \vec{B}$$

$$\vec{\mu}_e \cdot \vec{E} \xrightarrow{T} -\vec{\mu}_e \cdot \vec{E}$$

$$\vec{\mu}_e \cdot \vec{E} \xrightarrow{P} -\vec{\mu}_e \cdot \vec{E}$$

donc si $\vec{\mu}_e \neq 0$; l'interaction e-m viole à la fois P et T.

Série 17

Le méson $B^0 (= \bar{b}d)$ peut se transformer en $\bar{B}^0 (= b\bar{d})$ par interaction faible. Le système $B^0 - \bar{B}^0$ présente donc des propriétés analogues (mélange, oscillations, ...) à celles du système $K^0 - \bar{K}^0$. Il en va de même du système $B_s^0 - \bar{B}_s^0$ où le méson $B_s^0 (= \bar{b}s)$ est la version étrange du méson B^0 .

Dans les exercices ci-dessous, on considère les désintégrations semileptoniques de ces mésons, c'est-à-dire celles dues aux transitions $b \rightarrow c\ell^- \bar{\nu}_\ell$ et $\bar{b} \rightarrow \bar{c}\ell^+ \nu_\ell$. Dans ces désintégrations, le signe de la charge du lepton ℓ^\pm ($= e^\pm, \mu^\pm$ ou τ^\pm indique si la particule qui se désintègre contient un quark b ou \bar{b}).

Exercice 1:

Soit un B^0 produit par interaction forte au temps t_0 et se désintégrant semileptoniquement.

- quelle est la probabilité d'émission d'un lepton négatif (plutôt que positif) dans cette désintégration si elle a lieu à un temps propre $t_1 > t_0$?
- quelle est cette probabilité dans le cas où l'on ne sait pas quand cette désintégration a eu lieu ?
- même question qu'en b), mais pour un B_s^0 produit au temps t_0 .

On fera l'hypothèse que la violation de CP peut être négligée et que les temps de vie des états propres du système $B^0 - \bar{B}^0$ sont égaux entre eux et égaux à ceux du système $B_s^0 - \bar{B}_s^0$. Ce temps de vie commun vaut $\tau_b = 1.55$ ps. La différence de masse entre les états propres de CP est de $\Delta m_d = 0.3 \times 10^{-3}$ eV/ c^2 pour le B^0 et de $\Delta m_s > 6 \times 10^{-3}$ eV/ c^2 pour le B_s^0 ($\hbar = 6.582 \times 10^{-22}$ MeV s).

Exercice 2:

La production d'un quark b par interaction forte est toujours accompagnée de la production d'un quark \bar{b} . Le processus d'hadronisation est tel que le quark b (ou le quark \bar{b}) se retrouve dans:

- un méson \bar{B}^0 (ou B^0) avec une probabilité $f_d \sim 40\%$;
- un méson \bar{B}_s^0 (ou B_s^0) avec une probabilité $f_s \sim 10\%$;
- un méson chargé ou un baryon (ou un anti-baryon) avec une probabilité $1 - f_d - f_s$.

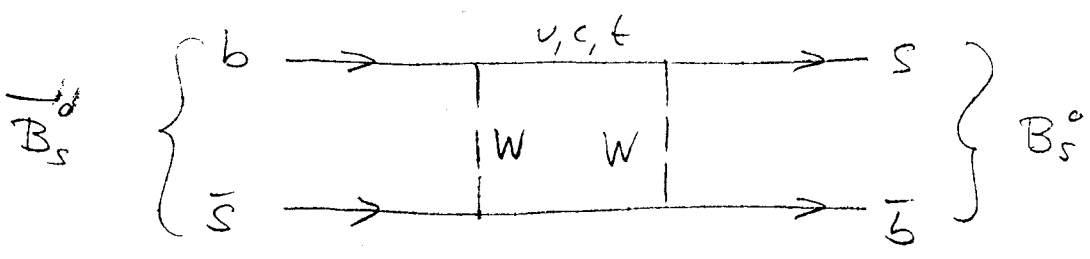
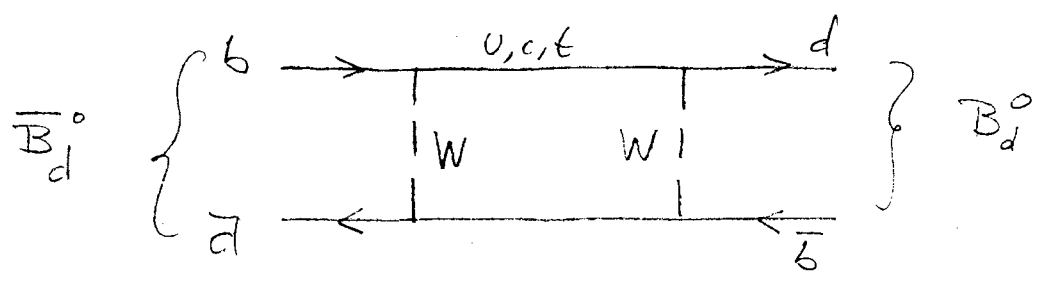
Dans une expérience auprès d'un collisionneur à haute énergie, on sélectionne des événements où les deux hadrons contenant un quark b ou \bar{b} se désintègrent semileptoniquement.

Quelle est la proportion de ces événements où les deux leptons chargés ont le même signe ?

Corrigé série 17

Ex 1

Tout comme le K^0 , le meson B^0 peut osciller $\bar{B}^0 \leftrightarrow B^0$ sous l'interaction faible.



En partant d'un pur état B^0 , on a (par analogie avec le système $K^0 - \bar{K}^0$) la probabilité d'observer un \bar{B}^0 à un temps $t > 0$:

$$P \equiv |\langle \bar{B}^0 | \psi(t) \rangle|^2 = \frac{1}{4} \left(e^{-\Gamma_1 t} + e^{-\Gamma_2 t} + 2e^{-\frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} t} \cos(\Delta m t) \right)$$

où $\Delta m = m_2 - m_1$

Contrairement au système $K^0 - \bar{K}^0$, ici

$$\Gamma_1 \approx \Gamma_2 \equiv \Gamma$$

d'où

(2)

$$\bar{P}(t) = \frac{1}{2} \left(e^{-\Gamma t} (1 \pm \cos(\Delta m t)) \right)$$

(a) La probabilité d'émission d'un lepton négatif (plutôt que positif) au temps t_1 est :

$$\begin{aligned} \chi(t_1) &\equiv \frac{\bar{P}(t_1)}{P(t_1) + \bar{P}(t_1)} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} e^{-\Gamma t} (1 - \cos(\Delta m t))}{\frac{1}{2} e^{-\Gamma t} (1 + \cos(\Delta m t)) + \frac{1}{2} e^{-\Gamma t} (1 - \cos(\Delta m t))} = \end{aligned}$$

$$\chi = (1 + \cos \Delta m t)$$

(b) dans le cas où l'on ne sait pas quand a lieu la désintégration, on a

$$\chi \equiv \frac{\int_0^{\infty} \bar{P}(t) dt}{\int_0^{\infty} P(t) dt + \int_0^{\infty} \bar{P}(t) dt}$$

à calculer

$$A^{\pm} = \int_0^{\infty} dt \frac{1}{2} e^{-\Gamma t} (1 \pm \cos(\Delta m t)) =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int_0^{\infty} dt e^{-\Gamma t} \pm \int_0^{\infty} dt e^{-\Gamma t} \cos(\Delta m t) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\Gamma} \pm I \right]$$

$$I = \int_0^{\infty} dt e^{-\Gamma t} \cos(\Delta m t) =$$

$$= -\frac{1}{\Gamma} e^{-\Gamma t} \cos(\Delta m t) \Big|_{t=0}^{t=\infty} - \int_0^{\infty} dt e^{-\Gamma t} \frac{1}{\Gamma} \sin(\Delta m t) \Delta m =$$

$$= \frac{1}{\Gamma} - \frac{\Delta m}{\Gamma} \int_0^{\infty} dt e^{-\Gamma t} \sin(\Delta m t) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma} - \left(\frac{\Delta m}{\Gamma}\right)^2 \int_0^{\infty} dt e^{-\Gamma t} \cos(\Delta m t) = \frac{1}{\Gamma} - \left(\frac{\Delta m}{\Gamma}\right)^2 I$$

$$\Rightarrow I = \frac{\Gamma}{\Gamma^2 + \Delta m^2}$$

Finalemant

$$A^+ = \frac{2+x^2}{2+2x^2} ; A^- = \frac{x^2}{2+2x^2}$$

$$\text{avec } x = \frac{\Delta m}{\Gamma}$$

Donc

$$\chi = \frac{A^-}{A^+ + A^-} = \frac{1}{2} \frac{\chi^2}{1 + \chi^2}$$

Application numérique :

(i) Systeme $B_d^0 - \bar{B}_d^0$

$$\triangle \quad \Delta m \xrightarrow[\hbar]{\substack{\hbar=1 \\ c=1}} \frac{\Delta m c^2}{\hbar}$$

$$\chi_d = \frac{0.3 \cdot 10^{-3} \times 1.55 \cdot 10^{-12}}{6.582 \cdot 10^{-16}} = 0,706$$

$$\Rightarrow \chi_d = \frac{1}{2} \frac{0,706^2}{1 + 0,706^2} = 0,166$$

(ii) Systeme $B_s^0 - \bar{B}_s^0$

$$\Delta m_s > 6 \cdot 10^{-3} \text{ eV}/c^2$$

$$\chi_s > \frac{6 \cdot 10^{-3} \times 155 \cdot 10^{-12}}{6.582 \cdot 10^{-16}} = 14.1$$

$$\Rightarrow \chi_s = 0,497$$

Ex 2

(5)

Un quark b peut produire :

f_d meson B_d^0

f_s meson B_s^0

$1 - f_d - f_s$ hadron X_b

B_d^0 a une probabilité d'osciller χ_d

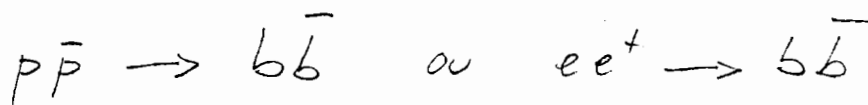
B_s^0 a " " " χ_s

X_b " " " 0

\Rightarrow un quark b a une probabilité $\bar{\chi}$ d'osciller, avec

$$\bar{\chi} = f_d \chi_d + f_s \chi_s$$

dans une réaction :



les cas où l'on a 2 leptons de même charge sont :

- B^0 n'oscille pas, \bar{B}^0 oscille $\rightarrow (1 - \bar{\chi}) \bar{\chi}$
- B^0 " " , B^0 oscille $\rightarrow \bar{\chi} (1 - \bar{\chi})$

Soit la proportion d'événement à 2 leptons de même charge.

$$R = 2(\bar{x} - \bar{x}^2)$$

$$\text{avec } \bar{x} = f_d x_d + f_s x_s =$$

$$= 0,4 \times 0,166 + 0,1 \times 0,497$$

$$= 0,12$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{R = 0,21}}$$

Série 18

1) Fission spontanée

A partir de la formule de masse, calculer l'énergie libérée dans la fission symétrique des isobares les plus liés. On négligera les effets d'appariement. Dans quelles conditions peut-on avoir une fission spontanée ?

2) Étoile à neutrons

Estimer le rayon d'une étoile à neutrons en utilisant la formule de masse complétée d'un terme d'énergie gravitationnelle.

Constante de gravitation universelle: $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$

Masse du neutron : $m_n = 1.675 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

3) Gaz de Fermi

Dans le modèle du gaz de Fermi, comment varie la différence d'énergie moyenne entre les niveaux, en fonction de la masse atomique A?

4) Noyaux miroirs

L'isotope 11 du carbone est instable. Comment se désintègre-t-il? Pourquoi appelle-t-on l'isotope 11 du bore: noyau miroir du ^{11}C ? Déterminer la valeur du paramètre r_0 de la loi $R = r_0 \cdot A^{1/3}$ à partir d'un graphique du Q des désintégrations des noyaux ^{11}C , ^{13}N , ^{15}O , ^{19}Ne , ^{23}Mg et ^{27}Si en fonction de $A^{2/3}$ (tous ces noyaux se désintègrent selon le même mode).

On donne les excès de masse $\Delta(^A X) = M(^A X) - Au$ (u =unité de masse atomique, $c = 1$):

$\Delta(^{11}\text{C}) = 0.011433 \text{ u}$	$\Delta(^{11}\text{B}) = 0.009305 \text{ u}$
$\Delta(^{13}\text{N}) = 0.005739 \text{ u}$	$\Delta(^{13}\text{C}) = 0.003355 \text{ u}$
$\Delta(^{15}\text{O}) = 0.003065 \text{ u}$	$\Delta(^{15}\text{N}) = 0.000109 \text{ u}$
$\Delta(^{19}\text{Ne}) = 0.001880 \text{ u}$	$\Delta(^{19}\text{F}) = -0.001597 \text{ u}$
$\Delta(^{23}\text{Mg}) = -0.005876 \text{ u}$	$\Delta(^{23}\text{Na}) = -0.010232 \text{ u}$
$\Delta(^{27}\text{Si}) = -0.013296 \text{ u}$	$\Delta(^{27}\text{Al}) = -0.018461 \text{ u}$

$$m_e = 511 \text{ keV}/c^2$$

$$\hbar c = 197.33 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137.0}$$

$$1 \text{ u} \equiv 931.494 \text{ MeV}/c^2$$

Corrigé série 18

1 Fission spontanée

Dans le modèle nucléaire du gaz de Fermi, la masse d'un noyau ${}^A_Z X$ est donnée par relation semi-empirique suivante ($c = 1$):

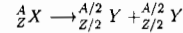
$$m(Z, A) = Zm_p + (A - Z)m_n - B(Z, A) \quad (1.1)$$

Où m_p est la masse du proton, m_n la masse du neutron et B est l'énergie de liaison du noyau, donnée par:

$$B(Z, A) = a_v A - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_a \frac{(A - 2Z)^2}{A} - a_s A^{2/3} + \delta \quad (1.2)$$

Par la suite, on négligera le terme de "pairing" δ .

Considérons la fission symétrique du noyau ${}^A_Z X$, i.e.:



Le bilan énergétique de cette réaction s'écrit:

$$Q = m(Z, A) - 2m\left(\frac{Z}{2}, \frac{A}{2}\right) \quad (1.3)$$

Q étant l'énergie libérée (ou absorbée) lors de la réaction. Si $Q > 0$, la réaction peut être spontanée.

D'après (1.1) et (1.2), Q s'écrit:

$$Q = a_s A^{2/3} (1 - 2^{1/3}) + a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} (1 - 2^{-2/3}) > 0 \quad (1.4)$$

soit

$$\frac{Z^2}{A} > \alpha \quad (1.5)$$

Où l'on a posé

$$\alpha = \frac{a_s(2^{1/3} - 1)}{a_c(1 - 2^{-2/3})} \cong 16.88 \quad (a_s = 17.23 \text{ MeV}, a_c = 0.717 \text{ MeV}) \quad (1.6)$$

Si le noyau ${}^A_Z X$ est l'isobare le plus lié, on a la relation (cf. cours):

$$Z \cong \frac{A}{2 + \beta A^{2/3}} \quad (1.7)$$

où

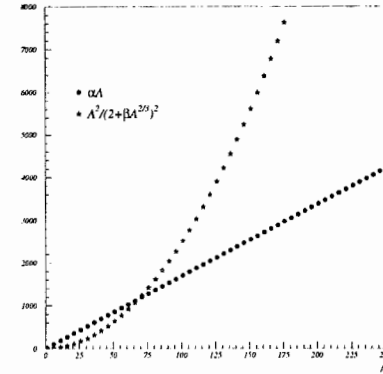
$$\beta = \frac{a_c}{2a_s} \cong 0,0152 \quad (a_s = 23.6 \text{ MeV}) \quad (1.8)$$

Donc, pour que l'isobare ${}^A_Z X$ le plus lié puisse se fragmenter spontanément en deux noyaux ${}^{A/2}_{Z/2} Y$, il faut que

$$\left(\frac{A}{2 + \beta A^{2/3}}\right)^2 > \alpha A \quad (1.9)$$

Avec $\alpha \cong 16.88$ et $\beta \cong 0.0152$.

Sur la figure ci-dessous, on voit que la condition (1.9) est satisfaite pour $A \geq 69$



La probabilité d'une telle fission spontanée est très faible et n'est observable que pour les noyaux lourds. On donne à titre d'exemple quelques durées de vie vis-à-vis de la fission: ${}^{235}_{92}U$: 10^{17} ans, ${}^{238}_{94}Pu$: 10^{11} ans; pour des noyaux très lourds (${}^{254}_{98}Cf$, ${}^{258}_{100}Fm$), la fission est le principal mode de désintégration, avec des durées de vie de quelques heures.

2 Etoile à neutrons

Une étoile à neutrons est un astre issu de l'effondrement gravitationnel des restes d'une supernova (explosion résultant de la mort d'une étoile). Dans cet astre, les pressions et les températures sont si élevées, que les électrons se combinent aux protons pour former des neutrons. Dans cet exercice, on va utiliser le modèle de Fermi du noyau pour estimer les caractéristiques d'une étoile à neutrons.

On fait donc l'hypothèse que l'étoile à neutrons constitue un énorme "noyau" composé de $N = A$ neutrons et de $Z = 0$ protons. Selon le modèle de Fermi, l'énergie de liaison d'un noyau est donnée par:

$$B(Z, A) = a_v A - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_a \frac{(A - 2Z)^2}{A} - a_s A^{2/3} \quad (2.1)$$

Pour le modèle de l'étoile à neutron, on va ajouter à B un terme positif d'énergie gravifique (positif, car la force de gravitation étant attractive, elle tend à augmenter l'énergie de liaison). Cet ajout se justifie par le nombre élevé de neutrons constituant l'étoile.

L'énergie potentielle gravifique entre deux masses m_1, m_2 séparées d'une distance r est donnée par:

$$E_g = G \frac{m_1 m_2}{r} \quad (2.2)$$

Considérons l'étoile comme un milieu continu et homogène de densité ρ . Soit une coquille sphérique de rayon r et d'épaisseur dr entourant une sphère de rayon r . L'énergie potentielle gravifique entre la coquille et la sphère vaut:

$$dE_g = G \frac{(4\pi r^2 dr \rho) (\frac{4}{3}\pi r^3 \rho)}{r} = \frac{16G\pi^2 \rho^2}{3} r^4 dr \quad (2.3)$$

En intégrant cette dernière relation de 0 à R (rayon de l'étoile), on obtient l'énergie potentielle gravifique de l'étoile:

$$E_g = \frac{16G\pi^2 \rho^2 R^5}{15} \quad (2.4)$$

mais

$$\rho = \frac{Am_n}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad (2.5)$$

et

$$R = r_0 A^{1/3} \quad (2.6)$$

d'où

$$E_g = a_g A^{5/3}, \quad a_g = \frac{3Gm_n^2}{5r_0} \quad (2.7)$$

Pour l'étoile à neutrons, l'énergie de liaison devient:

$$B(0, A) = (a_v - a_a)A - a_s A^{2/3} + a_g A^{5/3} \quad (2.8)$$

La stabilité de l'étoile implique que $B > 0$, soit:

$$(a_v - a_a) - a_s A^{-1/3} + a_g A^{2/3} > 0 \quad (2.9)$$

Comme A est grand, on peut négliger le terme $a_s A^{-1/3}$, ainsi:

$$A > \left(\frac{a_a - a_v}{a_g} \right)^{3/2} \quad (2.10)$$

Application numérique:

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

$$m_n = 1.675 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$r_0 = 1.12 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

$$a_a = 23.6 \text{ MeV}$$

$$a_v = 15.56 \text{ MeV}$$

d'où:

$$a_g = 1.00 \cdot 10^{-49} \text{ J}$$

$$a_a - a_v = 1.29 \cdot 10^{-12} \text{ J}$$

Donc

$$A > 4.6 \cdot 10^{55}$$

et le rayon de l'étoile:

$$R = r_0 A^{1/3} > 4'000 \text{ m}$$

La masse de l'étoile étant approximativement donnée par $Am_n = 6 \cdot 10^{28} \text{ kg}$, une étoile à neutrons représente donc environ 10'000 masses terrestres (0.2 masse solaire) concentrées dans une sphère de 4 km de diamètre !

3 Gaz de Fermi

Dans le modèle de Fermi, les différences d'énergie entre les niveaux dépendent de A , mais aussi de n_x, n_y, n_z . On peut faire une évaluation grossière de la dépendance en A , en considérant une différence d'énergie moyenne $\langle \Delta T \rangle$.

Pour tous les noyaux, le dernier niveau d'énergie correspond à l'énergie de Fermi $T_F = 38 \text{ MeV}$, on aura donc $\langle \Delta T \rangle = \frac{T_F}{u}$, où $u = \frac{A}{4}$ est le nombre d'états (pour un noyau symétrique). Finalement $\langle \Delta T \rangle = \frac{4T_F}{A}$, les niveaux d'énergie se resserrent si A croît.

Exercice 3

Pour un isotope instable, le nombre de noyaux de l'isotope évolue exponentiellement avec le temps:

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$$

Où τ est la période (ou le temps de vie moyen) de l'isotope.

En général, à la place de la période, on donne la demi-vie $t_{1/2}$, définie par:

$$\frac{N(t_{1/2})}{N_0} = \frac{1}{2} = e^{-t_{1/2}/\tau}$$

on en tire facilement la relation entre τ et $t_{1/2}$:

$$t_{1/2} = \ln(2) \tau \cong 0.693 \tau$$

Pour $A = 14$, le Z pour l'isobare le plus lié vaut:

$$Z \cong \frac{A/2}{1 + (a_c A^{2/3})/(4a_a)} = 6.7 \cong 7$$

L'isobare $A = 14$ le plus lié est donc l'isotope ${}^7_7\text{N}$, qui est stable. Le carbone 14 se désintègre donc en azote 14 par β^- .

On définit l'activité A d'une source radioactive, par le nombre de désintégrations par unité de temps, soit pour un échantillon pur d'un isotope donné:

$$A(t) = \left| \frac{d}{dt} N(t) \right| = \frac{N_0}{\tau} e^{-t/\tau} = A_0 e^{-t/\tau}$$

L'activité décroît également exponentiellement avec le temps.

Pour dater un échantillon de carbone de masse m , on mesure son activité au temps t (activité qui provient essentiellement du carbone 14), et on la compare à l'activité au temps 0 :

$$t = -\tau \ln \left(\frac{A(t)}{A_0} \right)$$

Or l'activité A_0 est proportionnelle aux nombre de noyaux de carbone 14 présents dans l'échantillon au temps 0. La fraction de ${}^{14}\text{C}$ étant très faible, leur désintégration n'influence pas la masse de l'échantillon; on peut donc calculer aisément le nombre de noyaux de carbone au temps 0:

$$N_C = \frac{m N_A}{12}$$

et le nombre de noyaux de carbone 14:

$$N_0 = 1.3 \cdot 10^{-12} N_C$$

Où m est donné en grammes et $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$ est le nombre d'Avogadro. Finalement on obtient l'âge de l'échantillon:

$$t = -\tau \ln \left(\frac{A(t) \tau 12}{m 1.3 \cdot 10^{-12} N_A} \right)$$

Application numérique: $\tau = 5730/0.693$, $m = 1$ g, $A(t) = 0.5 \mu\text{Ci} \Rightarrow t \cong 50000$ ans.

Série 19

Exercice 1

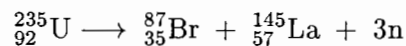
L'isotope 11 du carbone est instable. Comment se désintègre-t-il? Pourquoi appelle-t-on l'isotope 11 du bore: noyau miroir du ${}^{11}_6\text{C}$? Déterminer la valeur du paramètre r_0 de la loi $R = r_0 \cdot A^{1/3}$ à partir d'un graphique du Q des désintégrations des noyaux ${}^{11}\text{C}$, ${}^{13}\text{N}$, ${}^{15}\text{O}$, ${}^{19}\text{Ne}$, ${}^{23}\text{Mg}$ et ${}^{27}\text{Si}$ en fonction de $A^{2/3}$ (tous ces noyaux se désintègrent selon le même mode). On donne les excès de masse $\Delta({}^AX) = M({}^AX) - Au$ (u =unité de masse atomique, $c = 1$):

$$\begin{array}{ll} \Delta({}^{11}\text{C}) = 0.011433 \text{ u} & \Delta({}^{11}\text{B}) = 0.009305 \text{ u} \\ \Delta({}^{13}\text{N}) = 0.005739 \text{ u} & \Delta({}^{13}\text{C}) = 0.003355 \text{ u} \\ \Delta({}^{15}\text{O}) = 0.003065 \text{ u} & \Delta({}^{15}\text{N}) = 0.000109 \text{ u} \\ \Delta({}^{19}\text{Ne}) = 0.001880 \text{ u} & \Delta({}^{19}\text{F}) = -0.001597 \text{ u} \\ \Delta({}^{23}\text{Mg}) = -0.005876 \text{ u} & \Delta({}^{23}\text{Na}) = -0.010232 \text{ u} \\ \Delta({}^{27}\text{Si}) = -0.013296 \text{ u} & \Delta({}^{27}\text{Al}) = -0.018461 \text{ u} \end{array}$$

$$\begin{aligned} m_e &= 511 \text{ keV}/c^2 \\ \hbar c &= 197.33 \text{ MeV} \cdot \text{fm} \\ \alpha &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137.0} \\ 1 \text{ u} &\equiv 931.494 \text{ MeV}/c^2 \end{aligned}$$

Exercice 2

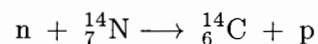
Estimer l'énergie libérée dans le processus de fission spontanée suivant:



Quelle est la source principale de cette énergie ?

Exercice 3

Le noyau ${}^{14}_6\text{C}$ est instable, avec un temps de demi-vie de 5730 ans. (c'est le temps nécessaire pour que la moitié d'un échantillon de carbone 14 se désintègre). Cependant, cet isotope est continuellement créé dans l'atmosphère terrestre grâce à la réaction nucléaire



induite par les neutrons lents produits dans les interactions des rayons cosmiques sur les noyaux de l'atmosphère. Il s'établit ainsi un équilibre avec une concentration ${}^{14}_6\text{C}$ approximativement constante (les variations récentes sont essentiellement dues aux essais nucléaires atmosphériques et à la combustion massive d'hydrocarbures). Cette concentration est proche de 1.3×10^{-12} fois la concentration de ${}^{12}_6\text{C}$, l'isotope stable du carbone le plus abondant. Par l'échange de composés carboniques (par exemple l'absorption de CO_2 par les végétaux), ce même rapport ${}^{14}_6\text{C}/{}^{12}_6\text{C}$ se retrouve à l'intérieur des organismes vivants. Cet échange s'interrompt avec la mort de l'organisme.

- Quel est le temps de vie moyen d'un noyau de carbone 14 ?

- Quel est le mode de désintégration du carbone 14 ?
- Ses produits de désintégration sont-ils stables ?
- Une relique trouvée dans une tombe égyptienne contient un gramme de carbone ayant une activité de $0.5 \mu\text{Ci}$. De quand date-t-elle ?

$$1 \text{ Ci} = 3.7 \times 10^{10} \text{ s}^{-1}$$

Corrigé série 18/9

Exercice 1

L'isotope $^{11}_6C$ du carbone est instable. Cherchons quels peuvent être ses canaux de désintégration.

a) Désintégration α :

Le carbone 11 ne peut pas se désintégrer α (i.e. $^{11}_6C \rightarrow ^4_2He + ^7_4Be$), car le bilan énergétique Q_α d'une telle réaction est négatif. En effet,

$$Q_\alpha = M(^{11}C) - M(^7Be) - M(^4He)$$

avec

$$M(^{11}C) = 10'256.904 \text{ MeV}$$

$$M(^7Be) = 6'536.088 \text{ MeV}$$

$$M(^4He) = 3'728.334 \text{ MeV}$$

on a

$$Q_\alpha = -7,518 \text{ MeV}$$

b) Désintégration β^- :

Le carbone 11 ne peut pas non plus se désintégrer β^- (i.e. $^{11}_6C \rightarrow ^{11}_7N + e^- + \bar{\nu}_e$), car l'isotope $^{11}_7N$ n'existe pas. En effet, dans l'expression de l'énergie de liaison de cet isotope, le terme d'asymétrie $a_a \frac{(N-Z)^2}{A}$ est trop important, or c'est un terme d'instabilité qui tend à diminuer l'énergie de liaison.

Les seuls canaux possibles de désintégration du carbone 11 sont donc:

- β^+ : $^{11}_6C \rightarrow ^{11}_5B + e^+ + \nu_e$
- Capture électronique (CE): $^{11}_6C + e^- \rightarrow ^{11}_5B + \nu_e$

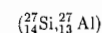
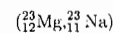
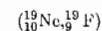
En fait, la capture électronique étant, d'un point de vue énergétique, favorisée par rapport la désintégration β^+ , c'est le principal mode de désintégration du $^{11}_6C$.

Si l'on calcule Z_A , le numéro atomique de l'isobare le plus lié, d'après la relation du cours:

$$Z_A = \frac{A}{2 + \frac{a_c A^{2/3}}{4a_a}} \text{ avec } a_a = 23.6 \text{ MeV}, a_c = 0.717 \text{ MeV}$$

On obtient, pour $A = 11$: $Z_A = 5.3 \simeq 5$. Autrement dit, le $^{11}_5B$ est l'isobare $A = 11$ le plus lié (stable).

Deux noyaux $^A_{Z_X}X$ et $^A_{Z_Y}Y$ sont dit "noyaux miroirs", si le nombre de protons de l'un est égal au nombre de neutrons de l'autre, i.e. $Z_X = A - Z_Y$ et $Z_Y = A - Z_X$. Par exemple, les couples



forment des couples de noyaux miroirs de type $(^A_{Z_+}X, ^A_{Z_-}Y)$, avec $Z_\pm = \frac{A \pm 1}{2}$ et X se désintègre en Y par processus CE.

Calculons l'énergie Q libérée lors de la désintégration CE des noyaux donnés ci-dessus:

$$Q = M(^A_{Z_+}X) - M(^A_{Z_-}Y)$$

avec la formule de masse:

$$M(Z, A) = ZM_H + (A - Z)m_n - a_v A + a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_a \frac{(A - 2Z)^2}{A} + a_s A^{2/3} + \delta$$

Comme on va calculer Q pour $A = 11, 13, 15, 19, 23, 27$, on aura $\delta = 0$. Donc:

$$Q = M_H(Z_+ - Z_-) - m_n(Z_+ - Z_-) + a_c \frac{Z_+^2 - Z_-^2}{A^{1/3}} + a_a \frac{(A - 2Z_+)^2 - (A - 2Z_-)^2}{A}$$

avec

$$Z_\pm = \frac{A \pm 1}{2}$$

Cela nous donne:

$$Q = M_H - m_n + a_c A^{2/3}$$

Or (c.f. cours):

$$a_c = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0}$$

D'où

$$Q = C_1 + C_2 A^{2/3}$$

avec

$$C_1 = M_H - m_n$$

$$C_2 = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0}$$

On voit donc qu'un ajustement linéaire des mesures expérimentales de Q en fonction de $A^{2/3}$ donne une estimation de r_0 .

En utilisant les excès de masse $\Delta(^A X) = M(^A X) - Au$, l'expression de Q devient:

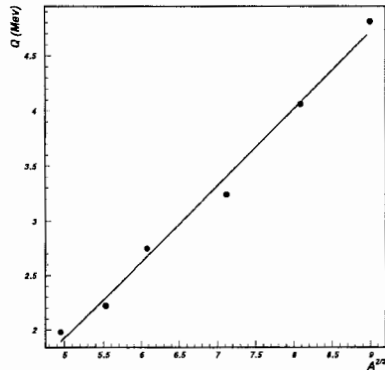
$$Q = \Delta(\frac{A}{Z_+} X) - \Delta(\frac{A}{Z_-} Y)$$

En utilisant la relation ci-dessus, calculons Q pour les réaction CE suivantes:

- (1) $^{11}C \rightarrow ^{11}B$
- (2) $^{13}N \rightarrow ^{13}C$
- (3) $^{15}O \rightarrow ^{15}N$
- (4) $^{19}Ne \rightarrow ^{19}F$
- (5) $^{23}Mg \rightarrow ^{23}Na$
- (6) $^{27}Si \rightarrow ^{27}Al$

réaction	A	A ^{2/3}	Δ_X [u]	Δ_Y [u]	Q [Mev]
$^{11}C \rightarrow ^{11}B$	11	4.95	0.011433	0.009305	1.98
$^{13}N \rightarrow ^{13}C$	13	5.53	0.005739	0.003355	2.22
$^{15}O \rightarrow ^{15}N$	15	6.08	0.003065	0.000109	2.75
$^{19}Ne \rightarrow ^{19}F$	19	7.12	0.001880	-0.001597	3.24
$^{23}Mg \rightarrow ^{23}Na$	23	8.09	-0.005876	-0.010232	4.06
$^{27}Si \rightarrow ^{27}Al$	27	9.00	-0.013296	-0.018461	4.81

La figure ci-dessous représente Q en fonction de $A^{2/3}$



Un ajustement linéaire nous donne pour la pente: $C_2 = 0.698 \pm 0.198$ MeV.
Comme:

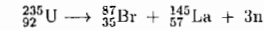
$$C_2 = \frac{3}{5} \frac{c^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} \frac{1}{137.0}$$

en utilisant $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137.0}$ et $\hbar c = 197.33$ MeV · fm, on en tire:

$$r_0 = 1.24 \pm 0.35 \text{ fm}$$

Exercice 2

L'énergie libérée dans la fission spontanée de l'uranium 235:



est donnée par:

$$Q = M(92, 235) - M(35, 87) - M(57, 145) - 3m_n$$

où $M(Z, A)$ est la masse atomique d'un noyau $\frac{A}{Z}X$, donnée par la formule semi-empirique:

$$M(Z, A) = Z M_H + (A - Z) m_n - a_v A + a_s A^{2/3} + a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_a \frac{(A - 2Z)^2}{A} - \delta$$

dans notre cas $\delta = 0$ pour tous les noyaux. Q s'écrit donc:

$$Q = (92 - 35 - 57) M_H + (235 - 92 - 87 + 35 - 145 + 57 - 3) m_n - a_v (235 - 87 - 145) + a_s (235^{2/3} - 87^{2/3} - 145^{2/3}) + a_c \left(\frac{92^2}{235^{1/3}} - \frac{35^2}{87^{1/3}} - \frac{57^2}{145^{1/3}} \right) + a_a \left(\frac{(235 - 184)^2}{235} - \frac{(87 - 70)^2}{87} - \frac{(145 - 107)^2}{145} \right)$$

Avec $a_v = 15.75$ MeV, $a_s = 17.8$ MeV, $a_c = 0.71$ MeV et $a_a = 23.7$ MeV; on a:

$$\begin{aligned} -a_v (235 - 87 - 145) &= -47.25 \text{ MeV} \\ a_s (235^{2/3} - 87^{2/3} - 145^{2/3}) &= -162.92 \text{ MeV} \\ a_c \left(\frac{92^2}{235^{1/3}} - \frac{35^2}{87^{1/3}} - \frac{57^2}{145^{1/3}} \right) &= 338.44 \text{ MeV} \\ a_a \left(\frac{(235 - 184)^2}{235} - \frac{(87 - 70)^2}{87} - \frac{(145 - 107)^2}{145} \right) &= -23.7 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Soit:

$$Q = 104.6 \text{ MeV}$$

Curieusement, on remarque c'est l'énergie coulombienne qui contribue à la fission du noyau d'uranium 235. L'énergie nucléaire n'est rien d'autre que de l'énergie électrique !

Série 20

Exercice 1

Expliquer pourquoi les noyaux lourds se désintègrent par émission d'une particule α plutôt que d'un nucléon.

Exercice 2

Un pur échantillon de noyaux radioactifs X se désintègre avec un temps de vie moyen τ_X en noyaux Y . Ces derniers sont eux-mêmes instables et ont un temps de vie τ_Y .

Comment l'activité des noyaux Y de l'échantillon varie-t-elle en fonction du temps ? A quel moment est-elle maximale ?

Étudier les cas limites $\tau_Y \ll \tau_X$, $\tau_Y = \tau_X$, $\tau_Y \gg \tau_X$.

Exercice 3: Abondance naturelle et équilibre séculaire

Le tableau ci-dessous donne la liste des isotopes radioactifs naturels avec $A = 4n + 2$, où n est un entier positif. Estimer les abondances relatives de ces isotopes dans notre système solaire.

Isotope	Temps de demi-vie [†]	Mode principal de désintégration	Autre mode de désintégration et fraction correspondante
$^{238}_{92}\text{U}$	$4.468 \cdot 10^9$ a	α	
$^{234}_{90}\text{Th}$	24.10 j	β^-	72% en Pa^* , 28 % en Pa
$^{234}_{91}\text{Pa}^*$	1.175 m	β^-	γ , $1.3 \cdot 10^{-3}$
$^{234}_{91}\text{Pa}$	6.75 h	β^-	
$^{234}_{92}\text{U}$	$2.45 \cdot 10^5$ a	α	
$^{230}_{90}\text{Th}$	$8.0 \cdot 10^4$ a	α	
$^{226}_{88}\text{Ra}$	$1.6 \cdot 10^3$ a	α	
$^{222}_{86}\text{Rn}$	3.8235 j	α	
$^{218}_{84}\text{Po}$	3.05 m	α	β^- , $1.8 \cdot 10^{-4}$
$^{218}_{85}\text{At}$	~ 2 s	α	
$^{214}_{82}\text{Pb}$	26.8 m	β^-	
$^{214}_{83}\text{Bi}$	19.7 m	β^-	α , $2.1 \cdot 10^{-4}$
$^{214}_{84}\text{Po}$	164 μs	α	
$^{210}_{81}\text{Tl}$	1.30 m	β^-	
$^{210}_{82}\text{Pb}$	22.3 a	β^-	α , $1.7 \cdot 10^{-8}$
$^{210}_{83}\text{Bi}$	5.01 j	β^-	α , $1.3 \cdot 10^{-6}$
$^{210}_{84}\text{Po}$	138.38 j	α	
$^{206}_{80}\text{Hg}$	8.1 m	β^-	
$^{206}_{81}\text{Tl}$	4.20 m	β^-	

[†] a=année, j=jour, h=heure, m=minute, s=seconde

Source: Lederer, Shirley et al.; Table of isotopes, 7th edition; Wiley,1978

Corrigé série 20

1. Emission alpha

Le tableau suivant donne l'énergie cinétique des différentes particules que pourrait émettre le ^{232}Th .

Particule émise	Energie cin. (MeV)	Particule émise	Energie cin. (MeV)
n	-7.15	^4He	+5.38
^1H	-6.05	^5He	-2.28
^2H	-10.5	^6He	-5.82
^3H	-10.1	^6Li	-3.78
^3He	-9.6	^7Li	-1.83

On voit que du point de vue énergétique, seule l'émission d'une particule α est possible. En fait elle est due à un effet de répulsion coulombienne qui devient importante pour les noyaux lourds (la force de coulomb croît comme z^2). De plus la particule α est très stable et a une structure fortement liée: elle a donc une masse petite comparée à la somme des masses de ses constituants. Ainsi la somme des masses des deux produits de désintégration est minimum et par conséquent l'énergie libérée maximum. Les noyaux stable possédant un $A > 160$ peuvent du point de vue énergétique se désintégrer par émission α . On observe un premier groupe d'émetteur α pour $144 < A < 160$, le premier étant le ^{144}Nd .

2. La désintégration en chaîne

Dans les désintégrations en chaîne l'équation $N = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ n'est valable que pour le premier élément.

Le premier élément se désintègre avec le temps de vie moyen τ_x pour donner le second élément. Celui-ci se désintègre à son tour avec le temps de vie moyen τ_y pour donner un troisième élément.

Soit N_x et N_y le nombre d'atomes des deux premiers éléments à l'instant t , pour N_x on a:

$$N_x = N_{x,0} e^{-\frac{t}{\tau_x}}$$

La variation de l'élément y est la différence entre l'activité de x (production de y) et la désintégration de y :

$$dN_y = \frac{N_x}{\tau_x} e^{-\frac{t}{\tau_x}} dt - \frac{N_y}{\tau_y} dt$$

La résolution de cette équation différentielle en N_y , avec la condition initiale $N_y = 0$ pour $t = 0$ donne:

$$N_y = \frac{\tau_y}{\tau_x - \tau_y} N_{x,0} (e^{-\frac{t}{\tau_x}} - e^{-\frac{t}{\tau_y}}) \quad (1)$$

Considérons le cas où l'élément x a une vie beaucoup plus courte que l'élément y ($\tau_y \ll \tau_x$). Pour un temps suffisamment grand, l'équation 1 devient:

$$N_y = N_{x,0} e^{-\frac{t}{\tau_y}} \quad (2)$$

L'élément x est alors entièrement détruit, ne subsiste que l'élément y dont la quantité restante satisfait l'équation 2.

Pour l'autre cas où l'élément x a une vie beaucoup plus longue que l'élément y ($\tau_y \gg \tau_x$). Après un temps suffisamment long, nous pouvons négliger $e^{-\frac{t}{\tau_y}}$ devant $e^{-\frac{t}{\tau_x}}$, l'équation 1 devient:

$$N_y = \frac{\tau_x}{\tau_x - \tau_y} N_{x,0} e^{-\frac{t}{\tau_x}}$$

De plus si la période de x est également grande par rapport au temps que durent nos observations, $e^{-\frac{t}{\tau_x}}$ sera pratiquement constant pendant toute la durée de l'expérience, et N_y gardera une valeur constante $N_{y,\infty}$, c'est ce que l'on appelle l'équilibre séculaire.

$$N_{y,\infty} = N_x \frac{\tau_y}{\tau_x} \quad (3)$$

L'équilibre séculaire s'établit chaque fois qu'une substance radioactive est produite à vitesse constante soit par la décroissance radioactive d'un élément à vie longue, soit par bombardement d'une cible par un flux constant de particules. Dans les deux cas et après un temps de l'ordre de quelques périodes, N_y approche de sa valeur d'équilibre. la vitesse de désintégration compense la vitesse de production.

3. Abondance naturelle et équilibre séculaire

D'après le tableau donné dans l'énoncé, on voit que le premier élément $^{238}_{92}\text{U}$ possède un temps de demi-vie beaucoup plus grand que tous les éléments issus de sa désintégration. On se trouve alors exactement dans le cas de l'équilibre séculaire décrit dans l'exercice précédent.

Les abondances relative peuvent être alors estimées à l'aide de l'équation 3:

$$N_{(238\text{U})} = N_{(234\text{Th})} \frac{\tau_{(238\text{U})}}{\tau_{(234\text{Th})}} = N_{(234\text{Pa}^*)} \frac{\tau_{(238\text{U})}}{\tau_{(234\text{Pa}^*)}} + N_{(234\text{Pa})} \frac{\tau_{(238\text{U})}}{\tau_{(234\text{Pa})}} \quad (4)$$

$$= N_{(234U)} \frac{\tau_{(238U)}}{\tau_{(234U)}} = \dots$$

avec: $\frac{N_{(234Pa)}}{N_{(234Pa^*)}} = \frac{0.28}{0.72}$

Finalement on obtient:

$N_{(234Th)} = 0.1478.10^{-10} N_{(238U)}$	$N_{(234Pa^*)} = 0.6776.10^{-13} N_{(238U)}$
$N_{(234Pa)} = 0.1737.10^{-12} N_{(238U)}$	$N_{(234U)} = 0.5483.10^{-4} N_{(238U)}$
$N_{(230Th)} = 0.1791.10^{-5} N_{(238U)}$	$N_{(230Ra)} = 3.5812.10^{-7} N_{(238U)}$
$N_{(222Rn)} = 2.3445.10^{-12} N_{(238U)}$	$N_{(218Po)} = 1.2988.10^{-15} N_{(238U)}$
$N_{(218At)} = 0.1419.10^{-16} N_{(238U)}$	$N_{(214Pb)} = 1.1413.10^{-14} N_{(238U)}$
$N_{(214Bi)} = 0.8389.10^{-14} N_{(238U)}$	$N_{(214Po)} = 0.1161.10^{-20} N_{(238U)}$
$N_{(210Tl)} = 0.5536.10^{-13} N_{(238U)}$	$N_{(210Pb)} = 0.4991.10^{-8} N_{(238U)}$
$N_{(210Bi)} = 0.3072.10^{-11} N_{(238U)}$	$N_{(210Po)} = 0.8485.10^{-10} N_{(238U)}$
$N_{(206Tl)} = 0.3449.10^{-14} N_{(238U)}$	$N_{(206Tl)} = 0.1788.10^{-14} N_{(238U)}$

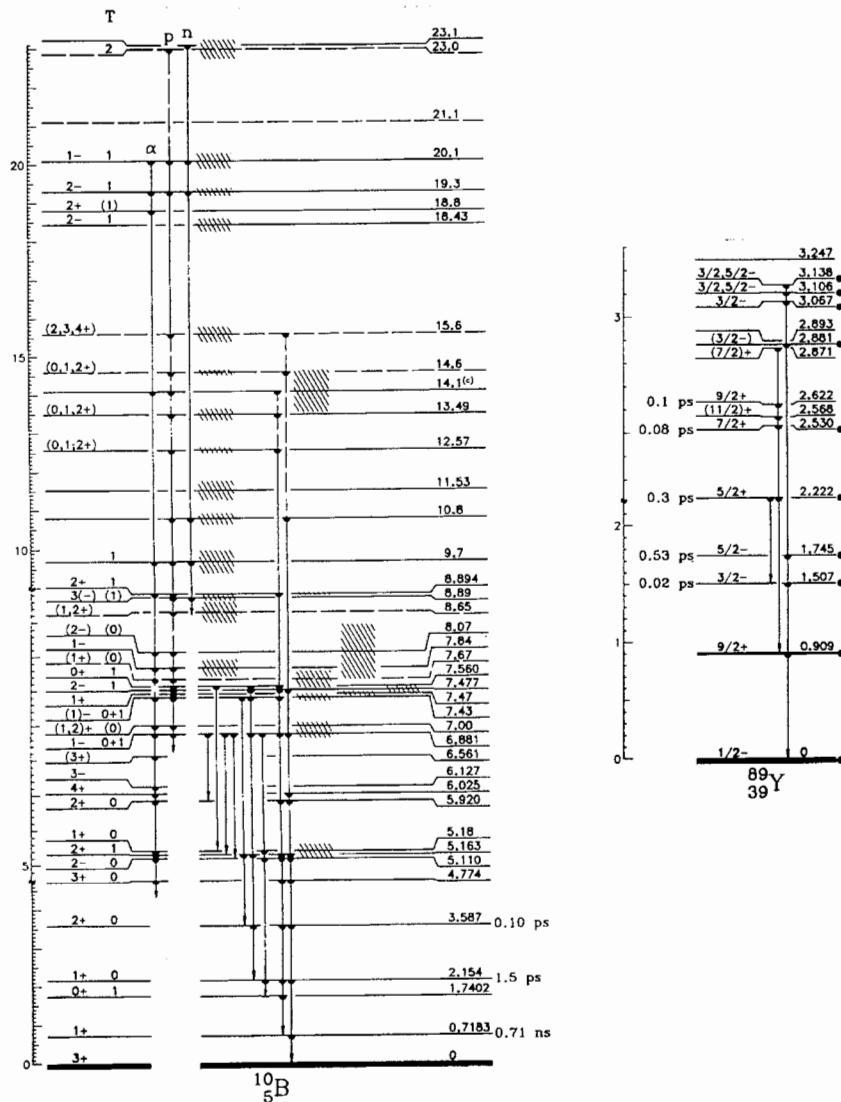
Quelque soit le temps de demi-vie d'un élément issu de cette réaction, son abondance restera constante. Le $^{214}_{84}Po$ qui possède un petit temps de vie (164 μs) sera toujours présent mais en très petite quantité par rapport la quantité de $^{238}_{92}U$.

Série 21

Exercice 1: Niveaux énergétiques et modèle en couches.

Les valeurs du spin et de la parité des premiers niveaux du noyau $^{89}_{39}\text{Y}$ (figure) peuvent-elles être expliquées dans le cadre du modèle en couches à particules indépendantes ?

Même question pour le noyau $^{10}_5\text{B}$



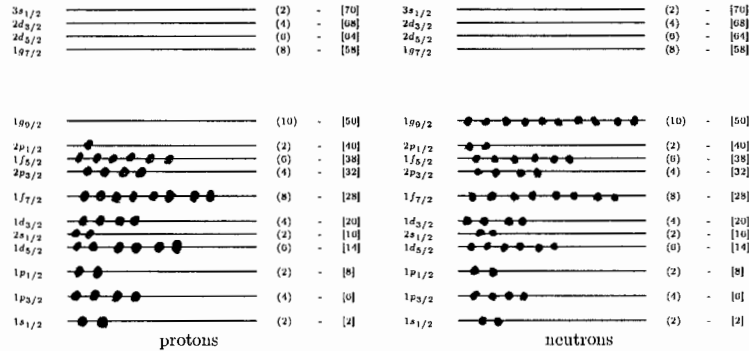
Exercice 2: Energie de séparation du dernier neutron

L'énergie de séparation du neutron le moins lié vaut approximativement 11 MeV pour le noyau $^{53}_{26}\text{Fe}$ et 5.5 MeV pour le noyau $^{61}_{26}\text{Fe}$. D'où provient cette différence ? Que peut-on en déduire concernant le potentiel du modèle en couches ?

Corrigé série 21

1 Niveaux énergétiques du $^{89}_{39}Y$ et du $^{10}_5B$

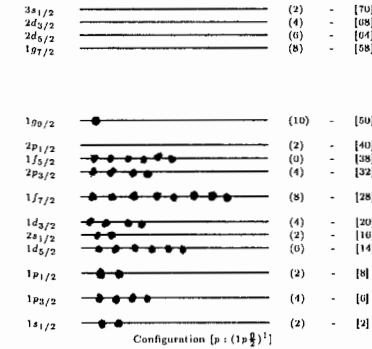
Le noyau $^{89}_{39}Y$ est constitué de 39 protons et de 50 neutrons (nombre magique). En remplissant successivement les niveaux énergétiques, depuis le niveau le plus bas (niveau $1s$), on obtient la configuration suivante pour le niveau fondamental:



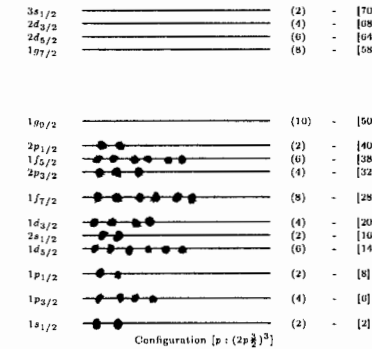
Comme on l'a vu au cours, le spin nucléaire J et la parité Π d'un noyau (dans l'état fondamental ou dans un état excité), sont déterminés par le moment cinétique j et le nombre quantique orbital l du niveau où se trouve le nucléon célibataire: $J^\Pi \equiv j^{(-1)^l}$. Dans le cas du niveau fondamental du noyau $^{89}_{39}Y$, le spin et la parité sont déterminés par le proton célibataire qui se trouve sur le niveau $nd_j = 2p_{1/2}$; autrement dit $J^\Pi = \frac{1}{2}^{(-1)^1} = \frac{1}{2}^+$.

Dans le modèle en couche, un état excité du noyau est obtenu en déplaçant un nucléon d'un niveau, vers un niveau plus élevé et non remplis. Dans le cas du noyau $^{89}_{39}Y$, seuls les niveaux supérieurs au niveau $1g_{9/2}$ sont accessibles par les neutrons; l'intervalle entre ces niveaux est élevé (le nombre de neutrons est magique). De plus, pour les protons, les niveaux inférieurs au niveau $1g_{9/2}$ sont accessibles. On peut donc facilement conclure qu'il est énergétiquement plus favorable de déplacer des protons que des neutrons; donc les premiers états excités du $^{89}_{39}Y$ seront déterminés par la configuration des protons.

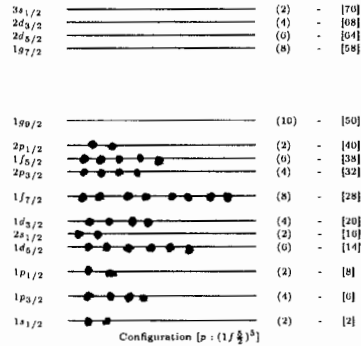
(i) Premier état excité: $J^\Pi = \frac{9}{2}^+$.
 $l = 4$ ou 5 , la parité de l'état implique que l soit pair, d'où $l = 4$. Le proton célibataire se trouve donc sur un niveau $ng_{9/2}$; le plus bas étant le $1g_{9/2}$. La configuration du premier état excité du noyau $^{89}_{39}Y$ est donc $[p : (1p_{3/2})^1]$:



(ii) Second état excité: $J^\Pi = \frac{3}{2}^-$.
 $l = 1$, le proton célibataire se trouve sur un niveau $np_{3/2}$. La configuration $[p : (2p_{3/2})^1]$ est énergétiquement la plus favorable:



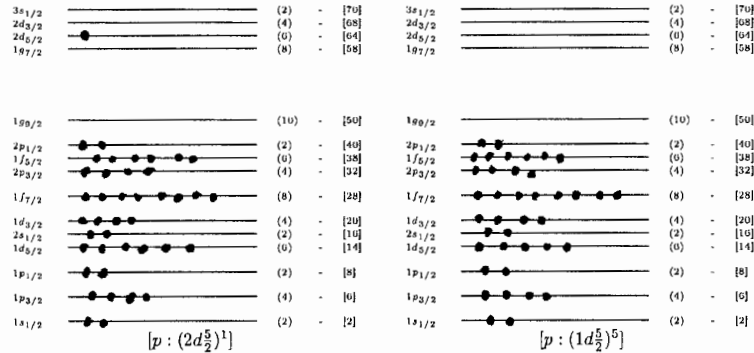
(iii) Troisième état excité: $J^\Pi = \frac{5}{2}^-$.
 $l = 3$, le proton célibataire se trouve sur un niveau $nf_{5/2}$. La configuration $[p : (1f_{5/2})^1]$ est la plus favorable:



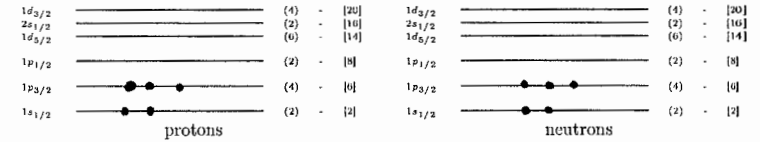
(iv) Quatrième état excité: $J^\Pi = \frac{5}{2}^+$.

$l = 2$, le proton célibataire se trouve sur un niveau $nd_{5/2}$. Ici deux configuration son possibles:

$[p : (2d_{5/2})^1]$ et $[p : (1d_{5/2})^5]$:



Le noyau de 10_6B est un noyau impair-impair, il est constitué de 5 protons et 5 neutrons. Le niveau fondamental (3^+) aura la configuration suivante:



Le spin nucléaire J est donné par la composition du spin du neutron j_n avec celui du proton j_p , où ici on $j_n = j_p = \frac{3}{2}$.

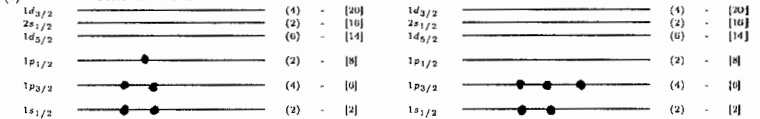
$$J = \frac{3}{2} \otimes \frac{3}{2} = 3, 2, 1, 0 \quad (1)$$

La parité est donnée par:

$$P = (-1)^{l_p+l_n} = (-1)^{1+1} = +1 \quad (2)$$

\Rightarrow la mesure 3^+ est cohérente avec la modèle en couche.

(i) Premier état excité 1^+

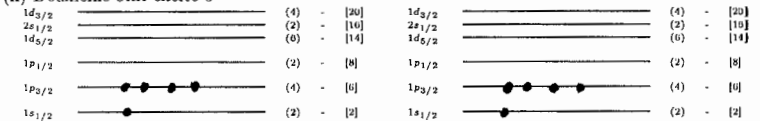


$$J = \frac{3}{2} \otimes \frac{1}{2} = 2, 1 \quad (3)$$

$$P = (-1)^{1+1} = +1 \quad (4)$$

\Rightarrow la mesure 1^+ est cohérente avec la modèle en couche.

(ii) Deuxième état excité 0^+

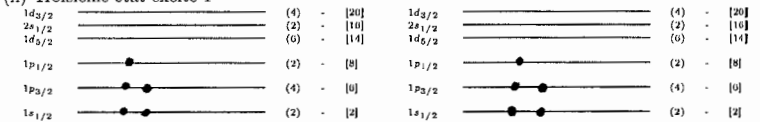


$$J = \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 1, 0 \quad (5)$$

$$P = (-1)^{0+0} = +1 \quad (6)$$

\Rightarrow la mesure 0^+ est cohérente avec la modèle en couche.

(ii) Troisième état excité 1^+

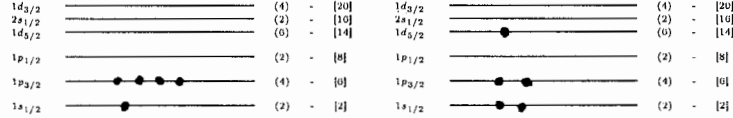


$$J = \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 1, 0 \quad (7)$$

$$P = (-1)^{1+1} = +1 \quad (8)$$

⇒ la mesure 1⁺ est cohérente avec la modèle en couche.

(iv) Quatrième état excité 2⁺

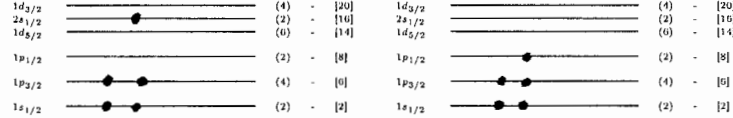


$$J = \frac{5}{2} \otimes \frac{1}{2} = 3, 2 \quad (9)$$

$$P = (-1)^{0+2} = +1 \quad (10)$$

⇒ la mesure 2⁺ est cohérente avec la modèle en couche.

(v) Cinquième état excité 3⁺

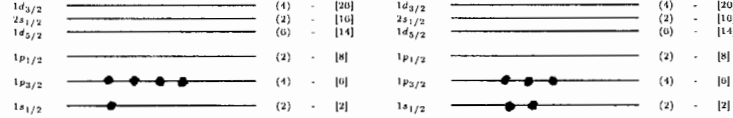


$$J = \frac{5}{2} \otimes \frac{1}{2} = 3, 2 \quad (11)$$

$$P = (-1)^{0+2} = +1 \quad (12)$$

⇒ la mesure 3⁺ est cohérente avec la modèle en couche.

(vi) Sixième état excité 2⁻

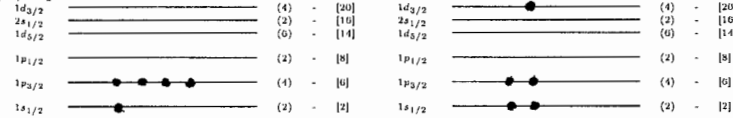


$$J = \frac{3}{2} \otimes \frac{1}{2} = 1, 2 \quad (13)$$

$$P = (-1)^{0+1} = -1 \quad (14)$$

⇒ la mesure 2⁻ est cohérente avec la modèle en couche.

(iv) Septième état excité 2⁺



$$J = \frac{3}{2} \otimes \frac{1}{2} = 1, 2 \quad (15)$$

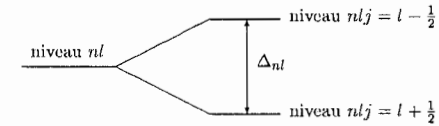
$$P = (-1)^{0+2} = +1 \quad (16)$$

⇒ la mesure 2⁺ est cohérente avec la modèle en couche.

2 Energie de séparation du dernier neutron

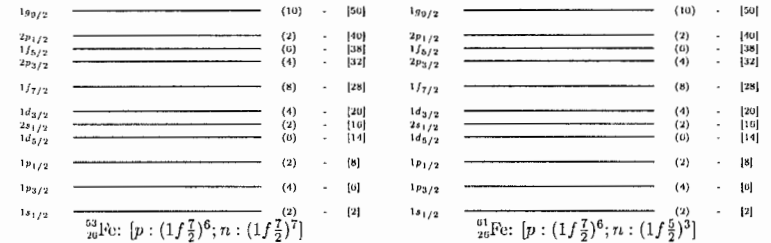
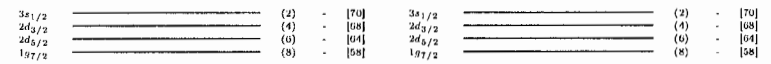
On a vu au cours, que l'introduction d'un terme d'interaction spin-orbite $\epsilon(r) \cdot s$, dans le modèle à particules indépendantes, permet d'une part de lever partiellement la dégénérescence d'un niveau nl , en le séparant en deux niveaux $nlj = l - \frac{1}{2}$ et $nlj = l + \frac{1}{2}$. En supposant $\epsilon(r) \equiv f$, la différence d'énergie entre ces deux niveaux est:

$$\Delta_{nl} \equiv E_{nlj=l-\frac{1}{2}} - E_{nlj=l+\frac{1}{2}} = \frac{\hbar^2}{2} f(2l+1)$$



D'autre part cela permet d'expliquer les saut dans les niveaux d'énergie, conséquence des nombres "magiques".

Les configurations du $^{53}_{20}\text{Fe}$ et $^{61}_{20}\text{Fe}$ sont données ci-dessous:



On remarque que le dernier neutrons se trouve sur des niveaux avec le même $n(-1)$ et le même $l(-3)$. La mesure de $\Delta S_n = S_n(^{53}_{20}\text{Fe}) - S_n(^{61}_{20}\text{Fe})$ nous donne une mesure de $\Delta_{1f} = \frac{\hbar^2}{2} f(2 \cdot 3 + 1)$ et donc une mesure de l'amplitude f du couplage spin-orbite.

Avec $S_n(^{53}_{20}\text{Fe}) = 11 \text{ Mev}$ et $S_n(^{61}_{20}\text{Fe}) = 5.5 \text{ Mev}$, on obtient $\hbar^2 f \approx 1.57 \text{ Mev}$

Série 22

1. Moment magnétique dipolaire

Comparer les valeurs prévues par le modèle en couches des moments magnétiques dipolaires des noyaux légers avec leurs valeurs expérimentales:

${}^6_3\text{Li}$	0.82	μ_N	${}^9_4\text{Be}$	-1.177	μ_N
${}^{11}_5\text{B}$	2.688	μ_N	${}^{16}_8\text{O}$	0.	μ_N
${}^{19}_9\text{F}$	2.626	μ_N			

2. Moment électrique quadrupolaire

Le développement en moments multipolaires de l'énergie d'interaction d'un potentiel électrique statique avec la densité de charge d'un noyau donne, pour le terme de deuxième ordre:

$$q = \sum_{i=1}^Z \langle J, M = J | \sqrt{\frac{16\pi}{5}} r_i^2 Y_0^2(\theta_i, \varphi_i) | J, M = J \rangle$$

A l'aide de quelques considérations, on en arrive à la forme simplifiée appelée moment quadrupolaire électrique:

$$q = \frac{1}{e} \int dV \sqrt{\frac{16\pi}{5}} r^2 \rho(r) Y_0^2(\theta) \quad \text{où} \quad Y_0^2(\theta) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

$\rho(r)$ étant la distribution de charge du noyau.

Calculer le moment quadrupolaire électrique d'un ellipsoïde de révolution uniformément chargé, généré par la rotation d'une ellipse d'axes b et c autour de l'axe c // à z .

$$\rho(x, y, z) = \begin{cases} \frac{Ze}{V} & \text{si } \frac{x^2+y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Avec $c > b > 0$, $V = \frac{4}{3}\pi b^2 c$ et $Z \in \mathbb{N}$.

En posant $\bar{R} = \frac{1}{2}(c + b)$ et $\delta R = c - b$, calculer la valeur du rapport $\frac{\delta R}{\bar{R}}$ pour le noyau ${}^{176}_{71}\text{Lu}$ qui porte un des moments quadrupolaires les plus élevés connus ($q = 8.0$ barn). En déduire la forme de l'ellipsoïde pour le noyau ${}^{176}_{71}\text{Lu}$.

Corrigé série 22

1 Moment magnétique dipolaire

Pour un nucléon libre, on définit l'opérateur *moment magnétique nucléaire* par :

$$\mu = \frac{\mu_N}{\hbar} (g_l \mathbf{l} + g_s \mathbf{s}) \quad (1)$$

Où $\mu_N = 3.152 \cdot 10^{-18} \text{ MeV/G}$ est le magnéton nucléaire; g_s et g_l sont les facteurs gyromagnétiques, qui valent :

	neutron	proton
g_l	0	1
g_s	-3.8270	5.5855

μ est une observable. La mesure de cette grandeur correspond à la valeur moyenne prise sur l'état du nucléon: $\langle \mu \rangle = \langle n, l, s | \mu | n, l, s \rangle$.

Les composantes $\langle \mu_x \rangle$ et $\langle \mu_y \rangle$ sont nulles, car $\langle l_x \rangle$, $\langle l_y \rangle$, $\langle s_x \rangle$ et $\langle s_y \rangle$ le sont.

La mesure de μ correspond donc à la mesure de sa composante μ_z . Le calcul de $\langle \mu_z \rangle$ nous donne (c.f. cours):

$$\langle \mu_z \rangle_{\max} = \begin{cases} \mu_N \left(\frac{g_s}{2} + g_l \left(j - \frac{1}{2} \right) \right) & \text{si } j = l + \frac{1}{2} \\ \mu_N \frac{j}{j+1} \left(-\frac{g_s}{2} + g_l \left(j + \frac{3}{2} \right) \right) & \text{si } j = l - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2)$$

En fait $\langle \mu_z \rangle = \langle \mu_z \rangle (m_j)$ et $\langle \mu_z \rangle_{\max}$ correspond à $m_j = j$.

Calculons $\langle \mu_z \rangle_{\max}$ dans le cadre du modèle en couches, pour les noyaux: ${}^6_3\text{Li}$, ${}^9_4\text{Be}$, ${}^{11}_5\text{B}$, ${}^{16}_8\text{O}$, ${}^{19}_9\text{F}$.

Dans le modèle en couches, on a déjà vu que le moment cinétique d'un noyau est déterminé par le moment d'un nucléon célibataire sur une couche incomplète (s'il y en a une). Il en va de même pour le moment magnétique, la contribution au moment magnétique est nulle pour des nucléons appariés.

(a) Pour le ${}^6_3\text{Li}$, on a la configuration $[p : (1p3/2)^1; n : (1p3/2)^1]$

Dans ce cas nous avons un proton célibataire et un neutron célibataire. Leurs moments cinétiques se composent pour former le moment cinétique total du noyau.

Pour le proton et le neutron, $j = \frac{3}{2}$ d'où le moment total $J = 0, 1, 2, 3$. La mesure nous donne $J = 1$, et donc $M_J = -1, 0, 1$, or $M_J = m_{j\text{proton}} + m_{j\text{neutron}}$, on voit que $m_{j\text{proton}}$ et $m_{j\text{neutron}}$ ne peuvent pas prendre n'importe quelles valeurs. On ne peut donc pas utiliser les relations (1.2) pour calculer le moment magnétique du noyau; nous allons utiliser les relations suivantes:

$$\langle \mu_z \rangle = \begin{cases} \frac{m_j \mu_N}{j(j+1)} \left(\frac{g_s}{2} (j+1)(2j-1) + \frac{g_l}{2} (j+1) \right) & \text{si } j = l + \frac{1}{2} \\ \frac{m_j \mu_N}{j(j+1)} \left(\frac{g_s}{2} j(2j+3) - \frac{g_l}{2} j \right) & \text{si } j = l - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (3)$$

Où m_j sera donné par $m_{j\text{proton}}$ et $m_{j\text{neutron}}$ correspondant à $M_J^{\max} = 1$. Comme $j_{\text{proton}} = j_{\text{neutron}} = \frac{3}{2}$, $m_{j\text{proton}}, m_{j\text{neutron}} = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ et il n'y a que trois possibilités d'additionner ces valeurs pour obtenir $M_J = 1$. Le tableau ci-dessous nous donne, pour ces trois possibilités, la valeur des moments magnétiques calculés avec la première des relations (1.3) (car $l_{\text{proton}} = l_{\text{neutron}} = 1 = j_{\text{proton}} - \frac{1}{2}$:

$m_{j\text{proton}}$	$m_{j\text{neutron}}$	$\langle \mu_z^{\text{proton}} \rangle$	$\langle \mu_z^{\text{neutron}} \rangle$	$\langle \mu_z^{\text{total}} \rangle = \langle \mu_z^{\text{proton}} \rangle + \langle \mu_z^{\text{neutron}} \rangle$
3/2	-1/2	3.7927 μ_N	0.6378 μ_N	4.4305 μ_N
1/2	1/2	1.2642 μ_N	-0.6378 μ_N	0.6264 μ_N
-1/2	3/2	-1.2642 μ_N	-1.9135 μ_N	-3.1778 μ_N

La valeur de 0.6264 μ_N est la plus compatible avec la valeur expérimentale qui est de 0.82 μ_N

(b) ${}^9_4\text{Be}$

Il n'y a pas de proton célibataire, $\langle \mu_z \rangle_{\text{proton}} = 0$. Le neutron célibataire se trouve sur la couche $(1p3/2)$, $l = 1$, $j = \frac{3}{2} = l + \frac{1}{2}$. D'où

$$\langle \mu_z \rangle_{\text{noyau}} = \mu_N \left(-\frac{3.8270}{2} + (0) \right) = -1.914 \mu_N \quad (4)$$

La mesure nous donne : $-1.177 \mu_N$

(c) ${}^{11}_5\text{B}$

Il n'y a pas de neutron célibataire, $\langle \mu_z \rangle_{\text{neutron}} = 0$. Le proton célibataire se trouve sur la couche $(1p3/2)$, $l = 1$, $j = \frac{3}{2} = l + \frac{1}{2}$. D'où

$$\langle \mu_z \rangle_{\text{noyau}} = \mu_N \left(\frac{5.5855}{2} + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right) \right) = 3.793 \mu_N \quad (5)$$

La mesure nous donne : 2.688 μ_N

(d) ${}^{16}_8\text{O}$

Dans ce cas, il n'y a pas de nucléon célibataire, d'où

$$\langle \mu_z \rangle_{\text{noyau}} = 0 \quad (6)$$

Ce qui correspond à la valeur mesurée.

(e) ${}^{19}_9\text{F}$

Il n'y a pas de neutron célibataire, $\langle \mu_z \rangle_{\text{neutron}} = 0$. Le proton célibataire se trouve sur la couche $(1d5/2)$, $l = 2$, $j = \frac{5}{2} = l + \frac{1}{2}$. D'où

$$\langle \mu_z \rangle_{\text{noyau}} = \mu_N \left(\frac{5.5855}{2} + \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2} \right) \right) = 4.793 \mu_N \quad (7)$$

La mesure nous donne : 2.626 μ_N

Les désaccords entre les valeurs théoriques et les mesures nous montrent les limites du modèle en couches. La tendance générale des courbes de Schmidt (c.f. page 232 du cours) est cependant correcte. On peut obtenir des valeurs théoriques plus proches des mesures, en prenant $g_s^{eff} = 0.6g_s$; ceci pour tenir compte du fait que les nucléons ne sont pas libres à l'intérieur du noyau (hypothèse que l'on a faite en prenant g_s).

2 Moment électrique quadripolaire

Calculons:

$$q = \frac{1}{e} \int dV \sqrt{\frac{16\pi}{5}} r^2 \rho(r) Y_0^2(\theta) \quad (8)$$

Où $\rho(r)$ est la distribution de charge d'un ellipsoïde de révolution uniformément chargé, de charge totale Ze (Z : numéro atomique du noyau):

$$\rho(x, y, z) = \begin{cases} \frac{Ze}{V} & \text{si } \frac{x^2+y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Avec $c > b > 0$, $V = \frac{4}{3}\pi b^2 c$ et $Z \in N$.

Utilisons les coordonnées cylindriques (ρ, φ, Z) :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \rho^2 \\ |\vec{r}|^2 &= \rho^2 + z^2 \\ \cos^2 \theta &= \frac{z^2}{|\vec{r}|^2} = \frac{z^2}{\rho^2 + z^2} \\ dV^3 &= \rho d\rho d\varphi dz \end{aligned}$$

En utilisant les relations ci-dessus et:

$$Y_0^2(\theta) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \frac{z^2}{\rho^2 + z^2} - 1)$$

L'équation 8 s'écrit:

$$q = \frac{Z}{V} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-c}^c dz \int_0^{\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}} d\rho (2\rho z^2 - \rho^3) \quad (9)$$

$$= \frac{2\pi Z}{V} \int_{-c}^c dz (\rho^2 z^2 - \frac{\rho^4}{4})_{\rho=0}^{\rho=b(1-\frac{z^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}} \quad (10)$$

$$= \frac{2\pi Z}{V} \int_{-c}^c dz (z^2 (b^2 + \frac{b^4}{2c^2}) + z^4 (-\frac{b^4}{4c^4} - \frac{b^2}{c^2}) - \frac{b^4}{4}) \quad (11)$$

$$= \dots \quad (12)$$

$$= \dots \quad (13)$$

$$q = \frac{2\pi Z}{V} \frac{4}{15} b^2 (c^2 - b^2) \quad (14)$$

Finalement en prenant $V = \frac{4}{3}\pi cb^2$ et en posant $\bar{R} = \frac{1}{2}(c+b)$ et $\delta R = c-b$, on obtient:

$$q = Z \frac{4}{5} \bar{R}^2 \frac{\delta R}{\bar{R}} \quad (15)$$

D'où on tire:

$$\frac{\delta R}{\bar{R}} = q \frac{5}{4\bar{R}^2 Z} \quad (16)$$

Pour le noyau de ${}_{71}^{176}Lu$, on mesure

$$q = 8 \text{ barn} = 8 \cdot 10^{-28} m^2 \quad (17)$$

En prenant:

$$\begin{aligned} \bar{R}^2 &\approx r_0 A^{\frac{1}{3}} \\ Z &= 71 \\ A &= 176 \\ r_0 &= 1.12 \cdot 10^{-15} m \end{aligned}$$

On obtient:

$$\frac{\delta R}{\bar{R}} \approx 0.36 \quad (18)$$

Le noyau de ${}_{71}^{176}Lu$ aura une forme d'ellipsoïde légèrement allongé.

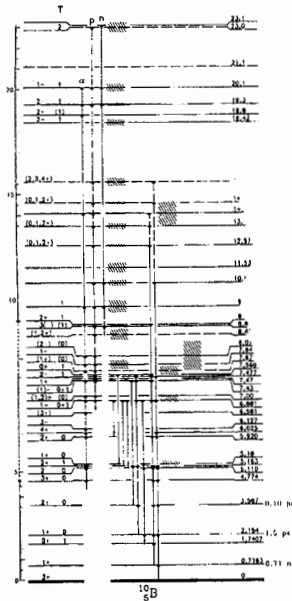
Série 23

1. Cinématique de diffusion

On bombarde une cible de ^{10}B par des protons de 10.02 MeV et observe avec un détecteur à jonction semi-conductrice les protons diffusés sous 90 degrés. Le spectre d'énergie de ces protons présente des pics aux énergies suivantes: 8.19, 7.53, 6.61, 6.23, 4.93, 3.85, 3.54 et 3.50 MeV. À quoi correspondent ces pics?

Déterminer les niveaux d'énergie du ^{10}B et comparer avec le spectre donné ci-dessous. Quelles sont les énergies des photons qui résultent des désexcitations des deux premiers niveaux excités? On donne:

$$1u = 931.502 \text{ MeV}/c^2, \quad m_p = 1.007276 u, \quad m_{^{10}\text{B}} = 10.012937 u$$



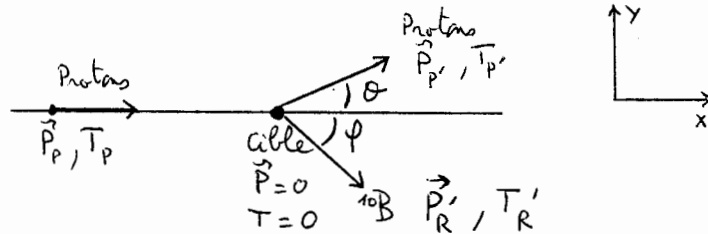
2. Section efficace différentielle dans le laboratoire et le centre de masse

Calculer le rapport $\frac{d\sigma_L}{d\sigma_{CM}}$ qui relie les sections efficaces différentielles dans le laboratoire et le centre de masse pour une réaction de type $C(p, a)R$.

Corrigé Série 23

1. Cinématique de diffusion

On bombarde une cible de ^{10}B par des protons incidents d'énergie cinétique $T_p = 10.02 \text{ MeV}$ et on mesure l'énergie cinétique des protons diffusés.



En utilisant la conservation de l'énergie et de l'impulsion, on obtient l'équation du second degré suivante (voir cours page 266).

$$p_{p'}^2 \left(\frac{1}{m_{10B}} + \frac{1}{m_p} \right) - p_{p'}^2 \frac{2p_p \cos\theta}{m_{10B}} + p_p^2 \left(\frac{1}{m_{10B}} - \frac{1}{m_p} \right) = 2Q \quad (1)$$

où m_p est la masse du proton et m_{10B} la masse du ^{10}B .

Plaçons un détecteur à $\theta = 90^\circ$ ($\cos\theta = 0$), l'équation (1) devient en utilisant $\frac{p^2}{2m} = T$:

$$Q = (T_{p'} + T_p) \frac{m_p}{m_{10B}} + (T_{p'} - T_p) \quad (2)$$

Ainsi, connaissant T_p , m_p , m_{10B} et en mesurant $T_{p'}$, on peut connaître le Q de la réaction, celui-ci correspond en fait aux états d'excitation du noyau de Bore. Les protons incidents qui sont diffusés cèdent une partie de leur énergie au noyau de Bore qui se retrouve dans un état excité. Q correspond donc aux différents niveaux d'énergie du ^{10}B . On obtient alors:

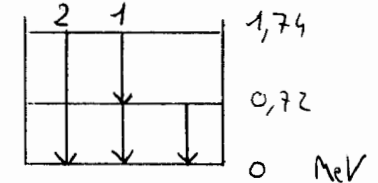
$$Q = 0, 0.72, 1.74, 2.16, 3.59, 4.77, 5.12, 5.16, \text{ MeV}$$

Ces valeurs correspondent aux différents états d'excitation du Bore soit respectivement, l'état fondamental ($Q = 0$), le 1^{er} état excité ($Q = 0.72 \text{ MeV}$), le 2^{ème} état excité ($Q = 1.74 \text{ MeV}$) etc... Ces valeurs sont compatibles avec celles du spectre du Bore donné dans l'énoncé.

Les énergies des premier et deuxième états excités sont respectivement 0.72 et 1.74 MeV.

Le premier état se désintègre en émettant un γ de 0.72 MeV et le second se désintègre en deux modes:

1. γ de 1.02 MeV suivi d'un gamma de 0.72 MeV
2. γ de 1.74 MeV



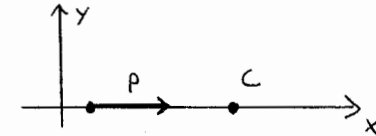
Toutefois le mode 2 est moins probable que le mode 1.

2. Section efficace différentielle dans le laboratoire et le centre de masse

Soit la réaction de type C(p,a)R. En prenant l'axe Ox // à \vec{V}_p :

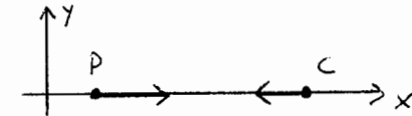
Dans le labo, avant la réaction:

$$p_x = m_p V_p \text{ et } p_y = 0$$



dans le Centre de Masse:

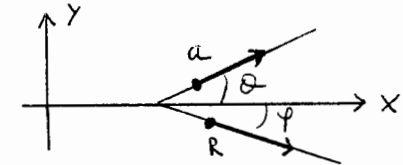
$$p_x^* = m_p V_p^* + m_c V_c^* \text{ et } p_y^* = 0$$



Après la réaction, dans le labo:

$$p_x = m_a V_a \cos\theta + m_R V_R \cos\varphi$$

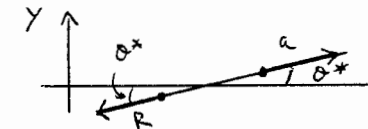
$$p_y = m_a V_a \sin\theta - m_R V_R \sin\varphi$$



dans le Centre de Masse:

$$p_x^* = m_a V_a^* \cos\theta^* + m_R V_R^* \cos\varphi^* = 0$$

$$p_y^* = m_a V_a^* \sin\theta^* - m_R V_R^* \sin\varphi^* = 0$$



La vitesse du centre de masse est donnée par:

$$\vec{V}_{CM} = \frac{m_a \vec{V}_a + m_R \vec{V}_R}{m_a + m_R} = \frac{m_p \vec{V}_p}{m_a + m_R} \quad (3)$$

Remarque:

Jusqu'ici, nous avons traité le problème classiquement (non relativiste). Comme résultat, on obtient que:

$$\vec{V}_{CM}^{initial} = \frac{m_p \vec{V}_p}{m_p + m_C} \neq \frac{m_p \vec{V}_p}{m_a + m_R} = \vec{V}_{CM}^{final}$$

Ce qui est en contradiction avec la conservation de la vitesse du CM d'un système isolé. En fait:

$$\frac{\vec{V}_{CM}^{initial}}{\vec{V}_{CM}^{final}} = \frac{m_a + m_R}{m_p + m_C} \neq 1.$$

La masse n'est pas conservée (ce qui n'est pas permis en mécanique classique), il ne faudrait pas appliquer ces équations. pour être rigoureux, il faudrait appliquer les relations relativistes.

Toutefois, pour les réactions nucléaires, les énergies mises en jeu sont faibles et dans ce cas $\frac{m_a + m_R}{m_p + m_C} \cong 1$, ce qui justifie le choix des relations non relativistes dans ce calcul.

Revenons au calcul, de la relation: $\vec{V}_a^* = \vec{V}_a - \vec{V}_{CM}$, on obtient en projetant sur X et y:

$$V_a^* \cos \theta^* = V_a \cos \theta - V_{CM}$$

$$V_a^* \sin \theta^* = V_a \sin \theta$$

Soit,

$$tg \theta = \frac{\sin \theta^*}{\cos \theta^* + \gamma} \quad (4)$$

où $\gamma = \frac{V_{CM}}{V_a}$ est une constante du mouvement, qui ne dépend que des masses et de V_p . En utilisant les formules du cours, on a:

$$T_a^* = \frac{m_R}{m_a + m_R} \left(Q + \frac{m_C}{m_p + m_C} T_p \right)$$

$$\Rightarrow V_a^* = \left(\frac{2m_a m_R}{m_a + m_R} \left(Q + \frac{m_C}{m_p + m_C} T_p \right) \right)^{\frac{1}{2}}$$

Calculons:

$$\frac{d\Omega_L}{d\Omega_{CM}} = \frac{d\varphi d\theta \sin \theta}{d\varphi^* d\theta^* \sin \theta^*} \quad (5)$$

Comme l'angle azimuthal n'intervient pas, en intégrant sur φ (φ^*), on obtient:

$$\frac{d\Omega_L}{d\Omega_{CM}} = \frac{d\theta \sin \theta}{d\theta^* \sin \theta^*} \quad (6)$$

La relation (4) peut s'écrire:

$$f(\theta) = g(\theta^*)$$

soit:

$$\frac{df}{d\theta^*} = \frac{dg}{d\theta^*} \Leftrightarrow \frac{df}{d\theta} \frac{d\theta}{d\theta^*} \quad (7)$$

d'où

$$\frac{d\theta}{d\theta^*} = \frac{\frac{dg}{d\theta^*}}{\frac{df}{d\theta}} \quad (8)$$

$$\frac{df}{d\theta} = 1 + tg^2 \theta = 1 + \frac{\sin^2 \theta^*}{(\cos \theta^* + \gamma)^2} = \frac{1 + 2\gamma \cos \theta^* + \gamma^2}{(\cos \theta^* + \gamma)^2} \quad (9)$$

$$\frac{dg}{d\theta^*} = \frac{\cos \theta^* (\cos \theta^* + \gamma) - \sin \theta^* (-\sin \theta^*)}{(\cos \theta^* + \gamma)^2} = \frac{1 + \cos \theta^* \gamma}{(\cos \theta^* + \gamma)^2} \quad (10)$$

On obtient alors:

$$\frac{d\theta}{d\theta^*} = \frac{|1 + \cos \theta^* \gamma|}{|1 + 2\gamma \cos \theta^* + \gamma^2|} \quad (11)$$

De (4) on tire:

$$\theta = \arctg U \quad \text{avec} \quad U = \frac{\sin \theta^*}{\cos \theta^* + \gamma} \quad (12)$$

Avec la relation trigonométrique: $\arctg U = \arcsin \left(\frac{U}{(1+U^2)^{1/2}} \right)$ on a:

$$\sin \theta = \frac{U}{(1+U^2)^{1/2}} = \frac{\sin \theta^*}{(\cos \theta^* + \gamma) \left(1 + \frac{\sin^2 \theta^*}{(\cos \theta^* + \gamma)^2} \right)^{1/2}} \quad (13)$$

$$\sin \theta = \frac{\sin \theta^*}{(1 + 2\gamma \cos \theta^* + \gamma^2)^{1/2}} \quad (14)$$

Finalement, on aura:

$$\frac{d\Omega_L}{d\Omega_{CM}} = \frac{1 + \gamma \cos \theta^*}{(1 + 2\gamma \cos \theta^* + \gamma^2)^{3/2}} \quad (15)$$

Cette expression dépend de θ^* , on va la transformer pour avoir une dépendance en θ qui est un angle mesurable (contrairement à θ^*).

De (4) on tire:

$$\cos \theta^* = \left(\cos^2 \theta (1 - \gamma^2 \sin^2 \theta) \right)^{\frac{1}{2}} - \gamma \sin^2 \theta \quad (16)$$

En introduisant cette expression dans (15) on a:

$$\frac{d\Omega_L}{d\Omega_{CM}} = \frac{\left((1 - \gamma^2 \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}} + \gamma \cos \theta \right)^2}{(1 - \gamma^2 \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}}} \quad (17)$$

Série 24

1. Réactions nucléaires

Soit la réaction nucléaire ${}_{5}^{11}B({}_{2}^3He, p){}_{6}^{13}C$, dans laquelle on mesure avec un spectromètre magnétique l'énergie des protons diffusés. On observe, sous un angle de 90 degrés, des protons d'une énergie cinétique de 9.35 Mev lorsque le faisceau incident est de 4.9 Mev. Pour s'assurer du résultat, on répète la mesure avec un faisceau de 4.4 Mev et on observe des protons à 9.00 Mev.

On déduit de cette observation, l'existence d'un niveau excité du ${}_{6}^{13}C$. Quelle est l'énergie d'excitation de ce niveau ?

On décide ensuite d'étudier les propriétés de ce niveau en effectuant une expérience de diffusion ${}_{6}^{12}C(n, n){}_{6}^{12}C$. Quelle énergie doivent avoir les neutrons ?

Les expérimentateurs ont déduit de leurs mesures que le spin et la parité de ce niveau sont $\frac{5}{2}^{+}$. Sur quelles observations ont-ils fondé cette conclusion ?

1 u	=	931.502 MeV/c ²
m_H	=	1.007825 u
m_n	=	1.008665 u
$m_{{}_2^3C}$	=	3.016029 u
$m_{{}_5^{11}B}$	=	11.009305 u
$m_{{}_6^{12}C}$	=	12.000000 u
$m_{{}_6^{13}C}$	=	13.003355 u

2. Section efficace de diffusion

Calculer la section efficace élastique de projectiles de basse énergie sur une petite sphère de rayon R.

Indications:

- se placer dans l'approximation $kR \ll 1$, où k est le nombre d'onde des projectiles, et déterminer quelles sont les ondes partielles qui contribuent à la section efficace.
- utiliser le fait que le comportement asymptotique de la fonction d'onde $\psi(\vec{r})$ est valable pour $r \geq R$ et poser $\psi(\vec{r}) = 0$ pour $r \leq R$.