Définition : – <u>propriété vraie</u> : propriété $\leftrightarrow$ question test $\rightarrow T_p$ $\rightarrow$ oui ou NON ; T_p vraie (actuelle) $\Leftrightarrow$ $\{T_p S \Rightarrow$ OUI avec $p = 1\}$
– <u>question inverse</u> : $\tilde{T}_p$ question inverse de T_p ; $\tilde{T}_p$ ne teste pas forcément une propriété ; p "pas actuelle" pas nécessairement une propriété de S ; on définit $\tilde{T}_p$ par : Effectuer T_p $\left\{\begin{array}{l}\text{réussi} \rightarrow \text{"non"}\\ \text{raté} \rightarrow \text{"oui"}\end{array}\right.$
– <u>question produit</u> : soit P_i propriété, T_i question, alors $\prod_i T_i \left\{\begin{array}{l}\text{oui si } T_i \text{ au hasard} \rightarrow \text{"oui"}\\ \text{non si } T_i \text{ au hasard} \rightarrow \text{"non"}\end{array}\right.$, alors $\prod_i T_i$ vraie $\Leftrightarrow$ T_i vraie $\forall i$ $\Leftrightarrow$ P_i actuelle $\forall i$
– <u>ensemble de questions effectuables sur S</u> : soit $\tilde{\alpha}$ la question opposée de α, alors : $\alpha \in Q \Rightarrow \tilde{\alpha} \in Q$; $\alpha_i \in Q\ \forall i \Rightarrow \prod_i \alpha_i \in Q$
$\prod_i \tilde{\alpha}_i = (\prod_i \alpha_i)^{\sim}$; relation de préordre : $\alpha, \beta \in Q$: $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha$ vraie $\Rightarrow \beta$ vraie
propriété structurelle : i) $\alpha < \alpha$
ii) $\alpha < \beta$; $\beta < \gamma \Rightarrow \alpha < \gamma$; $\alpha \approx \beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$ et $\beta < \alpha$: relation d'équivalence
réflexive : $\alpha \approx \alpha$
symétrique : $\alpha \approx \beta \Rightarrow \beta \approx \alpha$
transitive : $\alpha \approx \beta$ et $\beta \approx \gamma \Rightarrow \alpha \approx \gamma$
Conclusion : – $\alpha \approx \beta \Rightarrow \alpha$ et β testent la m. propriété de S : chaque classe d'équivalence de Q caractérise une propriété du système S.
– <u>propriété du système</u> : – c'est la classe d'équivalence de Q
– <u>ensemble des propriétés du système</u> : – c'est l'ensemble des classes d'équivalence de Q

Notation : – <u>questions</u> : – soit a, b des classes d'équivalence, alors $\alpha \in a$; $\beta \in b$ sont des questions

Remarque : – <u>structure de l'ensemble des propriétés $\mathcal{L}$</u> : – soit 0 l'ensemble des questions jamais vraies, I l'ensemble des questions toujours vraies, soit $a, b \in \mathcal{L}$, alors $\mathcal{L}$ est muni de la relation de préordre suivante : $a < a \Leftrightarrow \alpha < \beta$ $\forall \alpha \in a$; $\beta \in b$, avec :
i) $a < a$ ii) $a < b$ et $b < a \Rightarrow a = b$ iii) $a < b$ et $b < c \Rightarrow a < c$ $\forall a, b, c \in \mathcal{L}$, avec : $0 < a < I$ $\forall a \in \mathcal{L}$, et : $a < b \Rightarrow$ (a "actuelle" $\Rightarrow$ b "actuelle")

Définition : – <u>plus grande borne inférieure d'une famille de propriétés a_i</u> : – soit α_i une question testant a_i, $i \in J$, alors : $\prod_i \alpha_i$ teste $\bigwedge_i a_i \in \mathcal{L}$, alors : $\bigwedge_i a_i < a_j$ $\forall j$; et : $a \wedge b$ "actuelle" $\Leftrightarrow$ a "actuelle" et b "actuelle" : $\wedge \Leftrightarrow$ "et"
– <u>plus petite borne supérieure d'une famille de propriétés a_i</u> : – soit α_i une question testant a_i, $i \in J$, alors : $\bigvee_i a_i = \bigwedge_{\Omega} b$, avec $\Omega = \{b \in \mathcal{L}$ t.q. $a_j < b$ $\forall j \in J\}$ existe toujours, et donc : $\bigvee_i a_i > a_j$ $\forall j$.
– <u>treillis complet</u> : – un ensemble muni d'une relation de préordre t.q. $\bigwedge_i a_i$ et $\bigvee_i a_i$ existent $\forall$ famille $\{a_i \in \mathcal{L}$ t.q. $i \in J\}$ est appelé un treillis complet. Les propriétés d'un système physique S sont munies d'une structure de treillis complet.

Remarque : – <u>treillis complet</u> : a "actuelle" ou b "actuelle" $\Longrightarrow$ $a \vee b$ "actuelle", avec : $\{\Leftarrow$ vrai$\} \Rightarrow$ méc. classique, par exemple : $\mathbb{R}^1$; $a = I_1 \subset \mathbb{R}^1$; $b = I_2 \subset \mathbb{R}^2$; $a \vee b = I_1 \cup I_2$ (i.e. I_i signifie que l'événement "la particule est dans I_i" est réalisé), alors en méc. classique $a \vee b \Rightarrow a$ ou b, mais en M.Q. $a \vee b \not\Rightarrow a$ ou b car pour que a ou b il faut que a CERTAIN ou b CERTAIN, et en M.Q. $\exists$ probabilités < 1.
– <u>différence M.Q. $\Leftrightarrow$ M.C.</u> – cadre général : $\mathcal{L}$: treillis complet $\longrightarrow$ 5 axiomes : les m. pour M.Q. et M.C., mais la M.C. se distingue par une propriété de la structure mathématique uniquement : $a \vee b$ "actuelle" $\forall a, b \Rightarrow a$ "actuelle" ou b "actuelle" ssi la réponse à toute expérience préexiste à l'expérience (i.e. le syst. est classique).

Définition : – <u>état</u> : c'est un sous-ensemble $\varepsilon \subset \mathcal{L}$ des propriétés actuelles du système à un moment donné.
– <u>ensemble d'états Σ</u> : on définit Σ par l'ensemble de tous les états possibles du système S

Propriétés : – <u>de Σ</u> : – soit $p \in \Sigma$, alors : i) $\mathcal{L} \ni a$ "actuelle" $\Leftrightarrow p < a$ ii) $a < b \Leftrightarrow \{p < a \Rightarrow p < b\}$ iii) $a = \bigvee_{\{p \in \Sigma \text{ t.q. } p < a\}} p$

Définition : – <u>morphisme de cartan</u> : – soit $P(\Sigma)$ l'ensemble des parties de Σ, alors on définit le morphisme de cartan μ par : $\mu : \mathcal{L} \rightarrow P(\Sigma)$ t.q. $a \in \mathcal{L} \longmapsto \mu(a) = \{p \in \Sigma$ t.q. $p < a\} \in P(\Sigma)$, i.e. le morphisme de cartan associe à chaque propriété "a" l'ensemble des états pour lesquels cette propriété est "actuelle".
– <u>atome</u> : – une propriété non triviale $p \in \mathcal{L}$ est un atome si $\{x \in \mathcal{L}$ et $x < p\} \Longrightarrow \{x = 0$ ou $x = p\}$

Propriétés : – <u>morphisme de cartan</u> : – soit 0 une question jamais vraie, I une question toujours vraie, $\emptyset$ l'ensemble vide, alors :
i) $\mu(0) = \emptyset$; $\mu(I) = \Sigma$
ii) μ injectif : $\mu(a) = \mu(b) \Leftrightarrow a = b$
iii) $a < b \Leftrightarrow \mu(a) \subset \mu(b)$
iv) $\mu(\bigwedge_i a_i) = \bigcap_i \mu(a_i)$
v) si p est un atome, alors $\mu(p)$ contient un état et un seul (p est "actuelle" pour un état et un seul)

Définition : – <u>états orthogonaux</u> : – soit $p, q \in \Sigma$, alors on dira que p est orthogonal à $q \Leftrightarrow \exists \gamma \in Q$ t.q. $\{p$ "actuelle" $\Rightarrow \gamma$ "vraie" et q "actuelle" $\Rightarrow \gamma^{\sim}$ "vraie"$\}$, ce que l'on notera $p \perp q$.

Propriétés : – <u>orthogonalité</u> : – soit $p, q \in \Sigma$ (états), soit $a, b \in \mathcal{L}$, alors : $a \perp b \Leftrightarrow (p < a$ et $q < b \Rightarrow p \perp q)$
i) $p \perp q \Rightarrow q \perp p$ i') $a \perp b \Rightarrow b \perp a$
ii) $p \perp q$, $r < p$, $s < q \Rightarrow r \perp s$ ii') $a \perp b$, $c < a$, $d < b \Rightarrow c \perp d$
iii) $p \perp q \Rightarrow p \wedge q = 0$ iii') $a \perp b \Rightarrow a \wedge b = 0$

Définition : – <u>question classique</u> : – une question $\alpha \in Q$ est classique si $\forall \varepsilon \in \Sigma$ on a soit α "vraie" soit $\alpha^{\sim}$ "vraie"
– <u>axiome 0 (ou préjugé classique)</u> : $\forall a \in \mathcal{L}$ $\exists \alpha \in a$ classique

Conséquences : – <u>conséq. axiome 0</u> : – soit un état $\varepsilon \in \Sigma$ et $p = \bigwedge_{a \in \varepsilon} a$, alors p est un atome, i.e. $p \mapsto \mu(p) = \{\varepsilon\}$: $\{$Atomes de $\mathcal{L}\} \xleftrightarrow{\text{bijection}} \{$états$\}$
– identité : $\forall \varepsilon \in \Sigma$ $\exists a \in \mathcal{L}$ t.q. $\mu(a) = C\{\varepsilon\}$, avec C le complémentaire, i.e. $\forall A \subset \Sigma$ $\exists a \in \mathcal{L}$ t.q. $\mu(a) = A$

<u>Théorème</u>: – <u>système classique</u>: – pour un système classique le morphisme de Cartan est bijectif. Notamment le treillis $\mathcal{L}$ est isomorphe à l'ensemble $P(\Sigma)$ des parties de Σ l'ensemble des états.

<u>Propriétés</u>: – <u>morphisme syst. classique</u>: – soit un système classique, soit μ le morphisme de Cartan, alors on a:
i) $\mu(0) = \emptyset$
ii) $\mu(I) = \Sigma$
iii) $a < b \Leftrightarrow \mu(a) \subset \mu(b)$
iv) $\mu(\bigwedge_i a_i) = \bigcap_i \mu(a_i)$
v) $\mu(\bigvee_i a_i) = \bigcup_i \mu(a_i)$
vi) p atome $\Leftrightarrow \mu(p) = \{\varepsilon\}$
vii) $a \perp b \Leftrightarrow \mu(a) \cap \mu(b) = \emptyset$

<u>Théorème</u>: – <u>représentation Hilbertienne</u>: – soit $\mathcal{L}$ un treillis complet satisfaisant aux axiomes I, II, III, IV, V $\Longrightarrow \exists \Omega \neq \{0\}$ et une famille $\mathcal{H}_\omega$, $\omega \in \Omega$ d'espaces de Hilbert complexes (séparables) t.q. $\forall a \in \mathcal{L}$ $\exists \{E_\omega, \omega \in \Omega\}$ des sous-esp. fermés de $\mathcal{H}_\omega$ $\mathcal{L} \ni a \mapsto \{E_\omega, \omega \in \Omega\}$; $\mathcal{L} \ni b \mapsto \{F_\omega, \omega \in \Omega\}$ t.q. $a < b \Leftrightarrow E_\omega \subset F_\omega$ $\forall \omega \in \Omega$

<u>Remarque</u>: – <u>principe de superposition</u>: – le "principe" de superposition $a \vee b \mapsto \overline{E+F}$ est une conséquence du thm. de représentation Hilbertienne.

<u>Définition</u>: – <u>superposition de propriétés</u>: – soit a, b des propriétés, $a \neq b \neq c$ et non $\perp$ à c, alors c est une superposition de propriétés si: c "actuelle" $\Longrightarrow a \vee b$ "actuelle" et c "actuelle" $\longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{test de } a \to \text{"oui" et "non"} \\ \text{test de } b \to \text{"oui" et "non"}\end{array}\right\}$ sans certitude
– <u>observable</u>: – en général une observable $\neq$ op. autoadjoint: une observable est une sous-structure classique de $\mathcal{L}$. L'existence d'une observable relève de la structure de $\mathcal{L}$ donc est inhérente à la nature du système.
– <u>propriétés compatibles</u>: – deux propriétés $a, b \in \mathcal{L}$ sont compatibles ssi $a \wedge b$; $a' \wedge b$; $a \wedge b'$; $a' \wedge b'$ définissent une observable

<u>Théorème</u>: – <u>compatibilité hilbertienne</u>: – soit P_E, P_F des projecteurs orthogonaux de $\mathcal{H}$ sur E, F respectivement, alors:
$[P_E, P_F] = 0 \Leftrightarrow a$ et b compatibles

<u>Définition</u>: – <u>mesure idéale</u>: – $\alpha \in Q$ est une mesure idéale si: i) $\alpha \in a$ et $\alpha^\sim \in a'$ ii) $\Longrightarrow$ réponse: OUI, a "actuelle" en fin de mesure iii) $\Longrightarrow$ réponse: OUI : perte d'information ou perturbation minimale. Si b "actuelle" avant la mesure et b compatible avec a, alors b est encore "actuelle" après la mesure si la réponse est "OUI".

<u>Remarque</u>: – <u>mesure idéale</u>: – par exemple l'expérience de Stern-Gerlach fournit une mesure idéale: $\forall$ particule qui sort, le système aura acquis la propriété voulue.
– <u>état final si "OUI"</u>: – on aimerait connaître l'état final sachant que la réponse est OUI. Soit a la propriété mesurée, E_a, P_a, ψ vecteur $\in \mathcal{H}$ décrivant l'état initial, alors si la réponse est OUI, l'état final est $P_a\psi$.

<u>Théorème</u>: – <u>probabilité de réponse OUI</u>: (A.M. Gleason, 1957). Hypothèses: la probabilité d'obtenir la réponse OUI ne dépend que i) de la propriété a mesurée ii) de l'état p avant la mesure $0 \leq W(a,p) \leq 1$. Exigences mathématiques: i) $W(a \wedge b, p) = W(a, p) \cdot W(b, p_a)$, p_a décrivant l'état après mesure de a qui a donné OUI ii) $W(a,p) + W(a',p) = 1$. Soit $\psi \in \mathcal{H}$ de norme 1 décrivant l'état p, soit P_a le projecteur orthogonal sur E_a sous-espace fermé correspondant à la propriété "a", alors: $W(a,p) = \|P_a\psi\|^2$.

<u>Remarque</u>: – <u>visions du monde quantique</u>: – en 1926: p et q existent, mais ne peuvent être mesurées avec une précision arbitrairement élevée $\Longrightarrow$ M.Q. fondée sur les relations d'incertitude: description positiviste: théorie des expériences et non du système existant en soi (paradoxes: "trous de Young", etc.). En 1980 et au-delà: les propriétés p et q ne peuvent pas s'actualiser simultanément $\Longrightarrow$ inégalités de Heisenberg inhérentes à la nature du système et non aux processus de mesure: description réaliste (au sens de Einstein): le système existe en soi indépendamment de tout observateur ($\nexists$ paradoxe, $\exists$ confirmations expérimentales, etc.)
– <u>construction des observables q, p</u>:
i) observable position q: $q: P(\mathbb{R}^3) \longrightarrow P(\mathcal{H})$ t.q. $q(\mathbb{R}^3) = \mathcal{H}$; $q(\emptyset) = \{0\}$; $q(\bigvee_i \Delta_i) = \bigoplus_i E_i$; $q(C\Delta) = E^\perp$; $\longrightarrow$ morphisme q
observable qté mvt. p: $p: P(\mathbb{R}^3) \longrightarrow P(\mathcal{H})$ t.q. $p(\mathbb{R}^3) = \mathcal{H}$; $p(\emptyset) = \{0\}$; $p(\bigvee_i \Delta_i) = \bigoplus_i E_i$; $p(C\Delta) = E^\perp$; $\longrightarrow$ morphisme p
ii) $\bar{a}$ translation, R rotation; $\bar{w}$ mise en mouvement, alors on effectue $(\bar{a}, \bar{w}, R)$ sur l'appareil de mesure de sorte que: test $T_b \xrightarrow{(\bar{a}, \bar{w}, R)}$ test $T_{\bar{b}}$; $b \to \bar{b}$; $S(\bar{a}, \bar{w}, R): \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ (automorphisme) t.q. $I \mapsto I$; $0 \mapsto 0$; $\bigvee_i a_i \mapsto \bigvee_i \bar{a}_i$; $a' \mapsto (\bar{a})'$; $a < b \Leftrightarrow \bar{a} < \bar{b}$; $a \perp b \Leftrightarrow \bar{a} \perp \bar{b}$; p atome $\mapsto \bar{p}$ atome
$\to$ Représentation hilbertienne: $S(\bar{a}, \bar{w}, R): \mathcal{L} \to \mathcal{L}$; $P(\mathcal{H}) \xrightarrow{\text{Wigner}} P(\mathcal{H})$: correspondance induite par un op. unit. ou antiunitaire $U(\bar{a}, \bar{w}, R): \mathcal{H} \to \mathcal{H}$.
iii) position: $q(g \cdot \Delta = R\Delta + \bar{a}) \longrightarrow q(g \cdot \Delta) = U(g) E_\Delta \Longrightarrow q(g \cdot \Delta) = S(g) \cdot q(\Delta) \Longrightarrow P_{g \cdot \Delta} = U(g) P_\Delta U(g)^{-1}$ $\forall g \in G$ $\forall \Delta \in P(\mathbb{R}^3)$
qté mvt: $p(g\Theta = R \cdot \Theta + \bar{w}) \longrightarrow p(g \cdot \Theta) = U(\Theta) \cdot E_\Theta \Longrightarrow p(g\Theta) = S(g) p(\Theta) \Longrightarrow P_{g\Theta} = U(\Theta) P_\Theta U(\Theta)^{-1}$ $\forall g \in G$ $\forall \Theta \in P(\mathbb{R}^3)$
iv) Problème: G groupe donné, connu ; $\mathcal{H}$ esp. Hilb. sur $\mathbb{C}$ inconnu ; $g \mapsto U(g)$ unit. inconnu ; $q: \Delta \mapsto E_\Delta$ morphisme inconnu ; $p: \Theta \mapsto F_\Theta$ morphisme inconnu
$P_{g \cdot \Delta} = U(g) P_\Delta U(g)^{-1}$; $P_{g \cdot \Theta} = U(g) P_\Theta U(g)^{-1}$ + condition d'irréductibilité $\Longrightarrow \exists!$ sol. avec un paramètre arbitraire $\hbar$
v) Solution: $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3, d^3x)$; $U(g): \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ t.q. $(U(a)\psi)(x) = \psi(x-a)$; $(U(w)\psi)(x) = \exp(i\bar{w} \cdot \bar{x}/\hbar)\psi(x)$; $(U(R)\psi)(x) = \psi(R^{-1}x)$ $\forall \psi \in \mathcal{H}$
$q: \Delta \mapsto E_\Delta = P_\Delta \mathcal{H}$ t.q. $(P_\Delta \psi)(x) = \chi_\Delta(x)\psi(x)$; χ_Δ: indicatrice de Δ ; $p: \Theta \mapsto E_\Theta = P_\Theta \mathcal{H}$ t.q. $(P_\Theta\psi)(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int_{\mathbb{R}^3} d^3p \, e^{ipx/\hbar} \chi_\Theta(p) \int_{\mathbb{R}^3} d^3y \, \psi(y) e^{-ipy/\hbar}$

<u>Théorème</u>: <u>Wigner</u>: – soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $\dim \mathcal{H} > 2$, alors tout automorphisme $S: P(\mathcal{H}) \longrightarrow P(\mathcal{H})$ est induit par un opérateur unitaire ou antiunitaire $U: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, qui à chaque sous-espace $E \in P(\mathcal{H})$ fait correspondre le sous-esp. fermé $S(E) = \{x = Uy \text{ t.q. } y \in E\}$

<u>Définition</u>: – <u>commutation de Weyl</u>: $U(w) \cdot U(a) = e^{iwa/\hbar} U(a) \cdot U(w)$
– <u>opérateurs de position</u>: $(q\psi)(x) = x\psi(x)$ $\forall x$ $\forall \psi \Rightarrow U(w) = \exp(iwq/\hbar)$
– <u>opérateur de qté de mouvement</u>: $U(a) = \exp(-iap/\hbar)$ t.q. $U(a) q U(a)^{-1} = q - a \cdot \mathbb{1}$
– <u>règle de commutation de Heisenberg</u>: – est une conséquence des 3 définitions précédentes: $\frac{i}{\hbar}[p_j, q^k] = \delta^k{}_j \mathbb{1}$

<u>Remarque</u>: – <u>équation de Schroedinger</u>: – on désire décrire la dynamique sous l'hypothèse que le treillis complet reste le même $\forall t > 0$. L'évolution est décrite

par un automorphisme: $S(t,t_0) : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ t.q. $S(t_2,t_1) \circ S(t_1,t_0) = S(t_2,t_0)$ $\forall t_0,t_1,t_2$. Théorème de Wigner $\Rightarrow$ $U(t,t_0) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ t.q. $P(\mathcal{H}) \ni E \mapsto U(t,t_0)E \in P(\mathcal{H})$, $U(t,t_0)$ unitaire.

i) $U(t+\delta t,t)\,U(t,t_0) \simeq U(t,t_0) + \delta t \frac{\partial}{\partial t} U(t,t_0)$ et aussi: $U(t+\delta t,t) \simeq \mathbb{1} + \delta t \frac{\partial}{\partial t'} U(t',t)\big|_{t'=t}$, $t' = t+\delta t$ $\Rightarrow \partial_t U(t,t_0) = \partial_{t'} U(t',t)\big|_{t'=t} U(t,t_0)$

Soit $H(t)/i\hbar := \partial_{t'} U(t',t)\big|_{t'=t}$ le générateur de l'évolution, alors: $i\hbar \partial_t U(t,t_0) = H(t)\, U(t,t_0)$, $U(t_0,t_0) = \mathbb{1}$

ii) principe de Galilée: $A^H_{t_0}(t_1) = U(t_1,t_0)^{-1} A\, U(t_1,t_0)$ $\Rightarrow$ $d_{t_1} A^H_{t_0}(t_1) = i/\hbar\, [H^H_{t_0}(t_1) ; A^H_{t_0}(t_1)]$ ($t_1 \to t_0 \Rightarrow \dot{A}_{t_0} = i/\hbar\, [H(t_0) ; A]$

principe de relativité galiléenne: $U(w)^{-1} p\, U(w) = p + w \cdot \mathbb{1}$; $U(w)^{-1} \dot{q}_{t_0} U(w) = \dot{q}_{t_0} + \frac{w}{M} \cdot \mathbb{1}$, M: masse de la particule

$\Rightarrow U(w)^{-1} (p - M\dot{q}_{t_0})\, U(w) = p - M \cdot \dot{q}_{t_0}$ $\Rightarrow$ commute avec $U(w)$ $\Rightarrow$ commute avec les générateurs de $U(w)$ $\Rightarrow$ commute avec $q(\Delta)$

$\Rightarrow [p - M\cdot\dot{q}_{t_0} , q(\Delta)] = 0$ $\forall \Delta \in \mathbb{R}^3$ $\Rightarrow$ $p - M \cdot \dot{q}_{t_0} = A_{t_0}(q)$ $\Rightarrow$ $\dot{q}_{t_0} = \frac{1}{M}(p - A_{t_0}(q)) = i/\hbar\, [H(t_0), q] \Rightarrow H(t_0) = 1/2M \cdot (p - A_{t_0}(q))^2 + V_{t_0}(q)$, $V_{t_0}(q)$ = fct. scalaire qqe de q. L'hypothèse consiste à dire que $V_{t_0}(q)$ est l'énergie potentielle (hypothèse assez faible vu que le reste représente l'én. cinétique avec pot. vecteur A , identification par analogie).

LA PHYSIQUE QUANTIQUE :
UNE THÉORIE INTELLIGIBLE

(école de "genève" : treillis)

- Réf :

Mécanique quantique
Bases et applications par Constantin Piron
Presses polytechniques (1990 et 1998)

(axiomatique quantique)

F. A. Reuse et V. Scarani
IPE.DP.EPFL. Automne 1998
Graphismes et présentation : Claire-Lise Bandelier

De l'importance de l'intelligibilité d'une théorie, par opposition à une attitude mystique.

- En reconnaître les limites.

- Reconnaître les situations où elle est (objectivement) mise en défaut.

- Avoir la capacité d'interpréter les phénomènes physiques au-delà des simples considérations de :
  - i) valeurs moyennes
  - ii) probabilité de transition
  - iii) spectre d'énergie, etc

- Cerner la nature profonde des paradoxes (de 2ième niveau, par exemple E P R)

↳ résolu en 1983

∃? paradoxes ?
– applique théorie dans cadres qui ne sont pas applicables

Quelques précautions oratoires

- Contrairement aux apparences l'exposé qui va suivre n'est pas cartésien.
  "On pense quelque part dans l'univers et par conséquent......
  BLA BLA BLA BLA BLA BLA BLA BLA
  donc

$$E = h\nu"$$

- Nul ne détient la vérité (à notre connaissance) et par conséquent nous ne déclarerons faux que ce qui est contradictoire ou irrelevant

ne déclare pas ce qui est vrai

une

1) Amicale des ennemis du mensonge

plutôt qu'une

vérité = ennemi du mensonge

2) Amicale des amis de la vérité.

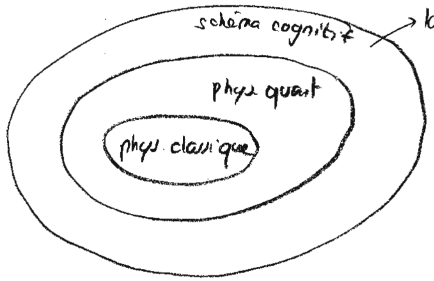
3 attitudes

- La description du système est incomplète
  Variables cachées

- Renoncer au déterminisme.
  Il n'existe pas de loi dynamique

- Elargir le schéma conceptuel ou descriptif de manière a pouvoir donner une description de la réalité ne postulant pas la préexistence des résultats d'expérience.

A) schéma cognitif ↑
B) faits objectifs ↓



→ langage : exigences de notre esprit
→ y inclure les faits expérimentaux après

phys. classique : $\exists$ 1 axiome de plus que la phys. quant.

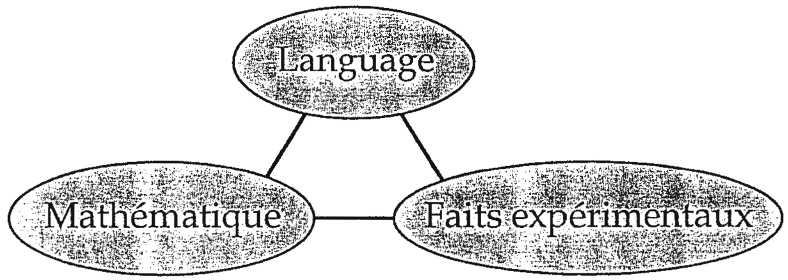
Qu'est-ce qu'une théorie ?

- Entités physiques.
  (Isolement, identification)

- Schéma ou algorithme prédictif relativement aux résultats d'expériences (Propriétés)

- Représentation des propriétés, concepts
  (Adéquation entre le réel et le symbolique)

- Structure et description mathématique
  (Connaissance humaine)



De la réalité objective

Ce que nous appelons la réalité objective c'est, en dernière analyse, ce qui est commun à plusieurs êtres pensants, et pourrait être commun à tous. Cette partie commune, ce ne peut être que l'harmonie exprimée par des $\underbrace{\text{lois mathématiques}}_{\text{langage}}$.

?

Henri Poincaré
La valeur de la science

De la logique

Nous croyons dans nos raisonnements ne plus faire appel à l'intuition; les philosophes nous diront que c'est là une illusion. La logique toute pure ne nous mènerait jamais qu'à des tautologies; elle ne pourrait créer du nouveau; ce n'est pas d'elle toute seule qu'aucune science peut sortir.

Henri Poincaré
La valeur de la science

De l'expérience

Le physicien ne peut demander à l'analyste de lui révéler une vérité nouvelle; tout au plus celui-ci pourrait-il l'aider à la pressentir.

Greus

Il y a longtemps que personne ne songe plus à devancer l'expérience, ou à construire le monde de toutes pièces sur quelques hypothèses hâtives.

....

Toutes les lois sont donc tirées de l'expérience, mais pour les énoncer, il faut une langue spéciale; le language ordinaire est trop pauvre, il est d'ailleurs trop vague, pour exprimer des rapports si délicats, si riches et si précis.

Voilà donc une première raison pour laquelle le physicien ne peut se passer des mathématiques; elles lui fournissent la seule langue qu'il puisse parler.

Henri Poincaré

La valeur de la science

De l'inquiétude

Cette suite d'exposés ne va en rien modifier le cadre formel de la physique quantique que vous avez précédemment acquis, ni même modifier vos habitudes de calcul.

Il ne devrait que modifier les schémas conceptuels attachés à l'interprétation du formalisme quantique et à ses prédictions.

DESCRIPTION D'UNE ENTITÉ PHYSIQUE

L'ENTITÉ (OU SYSTÈME) PHYSIQUE S POSSÈDE LA PROPRIÉTÉ P LE CONCEPT DE VÉRITÉ

P propriété : $\left\{\begin{array}{ll} \text{question} & \text{Tp} \\ \text{test} & \rightarrow \text{"oui" ou "non"} \end{array}\right.$

→ Test
→ propriété P

Question

- Un dispositif expérimental
- Un mode d'emploi
- Une règle d'interprétation

réussi	"oui"	⇏ le syst. a la propriété
raté	"non"	

LA QUESTION Tp EST "VRAIE" POUR S

ou encore

LA PROPRIÉTÉ EST "ACTUELLE" POUR S

⟺ si et seulement si

Tp effectué sur S ⇒ "oui" $\boxed{\text{CERTAIN}}$

→ si ~~certain~~ ⇒ on a la physique classique

→ prob. = 1

vrai ⟺ { Tp S ⇒ oui ; p = 1 }

LA QUESTION INVERSE

S système Tp question.

$\widetilde{\text{Tp}}$ question inverse de Tp

Effectuer Tp $\left\{\begin{array}{ll} \text{réussi} & \rightarrow \text{"non"} \\ \text{raté} & \rightarrow \text{"oui"} \end{array}\right.$

Tp oui certain ⇏ $\tilde{T}_p$ non certain

Remarques On ne peut pas toujours préparer le système dans l'état qui donne $\hat{T}_p$ (évident)

$\widetilde{\text{Tp}}$ ne teste pas nécessairement une propriété

→ ne peut pas préparer le système

P "pas actuelle" n'est pas nécessairement une propriété de S

le fait pour un syst. de ne pas posséder une propriété n'est pas une propriété

L'ENTITÉ (OU SYSTÈME) PHYSIQUE S POSSÈDE LES PROPRIÉTÉS P et Q

Propriété P : Test T_P

Propriété Q : Test T_Q

$T_P \cdot T_Q$ Question produit

Effectuez T_P ou T_Q choisis $\boxed{\text{au hasard.}}$

$$\text{Si} \begin{cases} \text{réussi} \rightarrow \text{"oui"} \\ \text{raté} \rightarrow \text{"non"} \end{cases}$$

T_P réalisé, et T_Q, mais pas les 2 en même temps

déjà vu avant (question vraie)

$T_P \cdot T_Q$ "vraie" pour S

si et seulement si

$T_P \cdot T_Q$ effectué sur S $\Rightarrow$ "oui" $\boxed{\text{CERTAIN}}$

Généralisation

P_i propriété T_i question $i \in J$

$$\underset{i}{\pi}\, T_i \begin{cases} \text{"oui" si } T_i \text{ au hasard} \rightarrow \text{"oui"} \\ \text{"non" si } T_i \text{ au hasard} \rightarrow \text{"non"} \end{cases}$$

$$\boxed{\underset{i}{\pi}\, T_i \text{ "vraie"} \Leftrightarrow T_i \text{ "vraie"} \quad \forall i \in J}$$

$$\boxed{\underset{i}{\pi}\, T_i \text{ "vraie"} \Leftrightarrow P_i \text{ "actuelle"} \quad \forall i \in J}$$

L'"ENSEMBLE" DES QUESTIONS RELATIVES AU SYSTÈME PHYSIQUE S

Q : Ensemble des $\boxed{\text{questions}}$ effectuables correspondant aux phénomènes $\boxed{\text{perceptibles}}$ de S et caractérisant S

(niveau d'idéalisation : ex : $e^- e^-$ avec 10^{81} eV $\Rightarrow$ création univers : néglige toutes les sous-quest. générées par cet univers pour décrire les 2 e^-)

Structure de Q

fermé p/. inverse, produit

$$\begin{cases} Q \ni \alpha \Rightarrow \tilde{\alpha} \in Q \\ Q \ni \alpha_i \ \forall i \in J \Rightarrow \underset{i}{\pi}\, \alpha_i \in Q \end{cases}$$

question opposée

, Q $\boxed{\text{fermé}}$ $\alpha \in Q \Rightarrow \tilde{\alpha} \in Q$

Propriété structurelle

$$\underset{i}{\pi}\, \tilde{\alpha_i} = (\underset{i}{\pi}\, \alpha_i)^{\sim}$$

$\boxed{\underset{i}{\pi}\, \tilde{\alpha_i} \text{ "vraie"}} \Leftrightarrow (\tilde{\alpha_i} \text{ "vraie" } \forall i)$

$\Leftrightarrow (\alpha_i \Rightarrow \text{"non" certain } \forall i)$

$\Leftrightarrow (\underset{i}{\pi}\, \alpha_i \Rightarrow \text{"non" certain})$

$\Leftrightarrow \boxed{(\underset{i}{\pi}\, \alpha_i)^{\sim} \text{ "vraie"}}$

$$\Pi\, \tilde{\alpha_i} = (\underset{i}{\Pi}\, \alpha_i)^{\sim}$$

Relation de préordre sur Q

$\alpha, \beta \in Q$

α plus restrictif que β

$$\boxed{\alpha < \beta \;\Leftrightarrow\; \alpha \text{ "vraie"} \;\Rightarrow\; \beta \text{ "vraie"}}$$

α est plus forte que β

Propriété structurelle

- $\alpha < \alpha$
- $\alpha < \beta$ et $\beta < \gamma \Rightarrow \alpha < \gamma$

$$\boxed{\boxed{\alpha \approx \beta} \;\Leftrightarrow\; \alpha < \beta \text{ et } \beta < \alpha}$$

$\approx$ est une relation d'équivalence sur Q

α et β sont des questions équivalentes

- $\alpha \approx \alpha$ réflexivité
- $\alpha \approx \beta \Rightarrow \beta \approx \alpha$ symétrie
- $\alpha \approx \beta$ et $\beta \approx \gamma \Rightarrow \alpha \approx \gamma$ transitivité

Si $\alpha \approx \beta$ alors α et β testent la même propriété de S

$\alpha \approx \beta \not\Rightarrow \tilde{\alpha} \approx \tilde{\beta}$

CONCLUSION

> CHAQUE CLASSE D'EQUIVALENCE DE Q CARACTERISE UNE PROPRIÉTÉ DU SYSTÈME S.
>
> $\mathcal{L}$ L'ENSEMBLE DES CLASSES D'ÉQUIVALENCE $\equiv$ L'ENSEMBLE DES PROPRIÉTÉS DU SYSTÈME S.

- de plus une puissance mathématique

$\mathcal{L}$: lattice.

STRUCTURE DE L'ENSEMBLE DES PROPRIÉTÉS $\mathcal{L}$ DU SYSTÈME S

pour définir toutes les opérations logiques

O : Ensemble des questions jamais "vraies"

Exemple : $\boxed{\alpha \cdot \alpha^{\sim} \in O}$

I : Ensemble des questions toujours "vraies"

~~Exemple : ne rien faire et décréter la réponse "oui"~~ Pour

- $\mathcal{L}$ est muni d'une relation de préordre

a et b $\in \mathcal{L}$

questions

$$\boxed{a < b \;\Leftrightarrow\; \alpha < \beta \text{ lorsque } \alpha \in a \text{ et } \beta \in b}$$

classe d'équivalence (= propriété)

1) $a < a$

2) $a < b$ et $b < a \Rightarrow a = b$

3) $a < b$ et $b < c \Rightarrow a < c$

$\forall\, a, b, c \in \mathcal{L}$

Remarques $O < a < I \quad \forall\, a \in \mathcal{L}$

= "vrai exact"

$a < b \Rightarrow$ (a "actuelle" $\Rightarrow$ b "actuelle")

propriétés

- Plus grande borne inférieure d'une famille de propriétés $a_i, i \in J$

"ET" de la logique

α_i question testant $a_i, i \in J$

propriété testée par $\prod_i \alpha_i$

$\prod_i \alpha_i$ teste $\bigwedge_i a_i \in \mathcal{L}$ (par définition)

$\boxed{\bigwedge_i a_i < a_j \quad \forall j \quad \text{(borne inférieure)}}$ Plus grande borne inférieure des a_j

Dém : $\bigwedge_i a_i$ "actuelle" $\Rightarrow \prod_i \alpha_i$ "vraie"

$\Rightarrow \alpha_j$ "vraie", $\forall j \Rightarrow a_j$ "actuelle" $\forall j$ $\not\Leftarrow$

$b < a_j \ \forall j \Rightarrow b < \bigwedge_i a_i$ (la plus grande)

Dém : b "actuelle" $\Rightarrow a_j$ "actuelle" $\forall j$

$\Rightarrow \alpha_j$ "vraie" $\forall j \Rightarrow \prod_i \alpha_i$ "vraie" $\Rightarrow \bigwedge_i a_i$ "actuelle" $\not\Leftarrow$

Remarque

$a \wedge b$ "actuelle" $\Rightarrow$ a "actuelle" et b "actuelle"   donc : $\wedge \Leftrightarrow$ "et"

$\Leftarrow$

Dém :

$\Rightarrow$ immédiat

$\Leftarrow$ $a \ni \alpha$ "vraie" et $b \ni \beta$ "vraie" $\Rightarrow \alpha \cdot \beta$ "vraie"

$\Rightarrow a \wedge b$ "actuelle"

- Plus petite borne supérieure d'une famille de propriétés $a_i, i \in J$

α_i question testant $a_i, i \in J$

$\bigvee_i a_i = \bigwedge b$ (par définition)

$\{b \in \mathcal{L} \mid a_j < b, \forall j \in J\}$

$\alpha_j \Rightarrow b$

Existe toujours puisque $b < I$

$a_j < \bigvee_i a_i, \forall j$ (borne supérieure)

Dém : $a_j < b, \forall b \Rightarrow a_j < \bigwedge b \underset{\text{déf.}}{=} \bigvee_i a_i$ $\forall j$ (page de gauche)

$c > a_j, \forall j \Rightarrow c > \bigvee_i a_i$ (la plus petite)

Dém : $c > a_j, \forall \Rightarrow c \in \{b \in \mathcal{L} \mid a_j < b, \forall j \in J\}$ (?)

$\Rightarrow c > \bigwedge b = \bigvee_i a_i$

DÉFINITION

UN ENSEMBLE MUNI D'UNE RELATION DE PRÉORDRE TEL QUE $\bigwedge_i a_i$ ET $\bigvee_i a_i$ EXISTENT POUR TOUTE FAMILLE $\{a_i \in \mathcal{L} \mid i \in J\}$ EST APPELÉ UN TREILLIS COMPLET.

LES PROPRIÉTÉS D'UN SYSTÈME PHYSIQUE S SONT NATURELLEMENT MUNIES D'UNE STRUCTURE DE TREILLIS COMPLET.

REMARQUE

a ou b $\Rightarrow$ ⊕ petite borne {a ∨ b}

borne supérieure

a "actuelle" ou b "actuelle" $\Rightarrow$ a ∨ b "actuelle"

$\not\Leftarrow$

coeur de la phys quant.

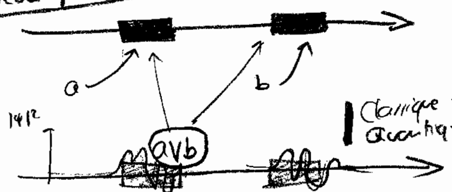
$\Leftarrow$ vrai dans le cas classique

Dans le cas général

de plus : $\Leftarrow$ vrai $\Rightarrow$ méc. classique.

Exemple : particule ponctuelle classique

a, b : propriété particule ∈ a, b



Classique : a ∨ b $\Rightarrow$ a ou b
Quantique a ∨ b $\not\Rightarrow$ a ou b

PRENONS DU RECUL
UN COUP D'OEIL SUR LA SUITE

STRUCTURE GÉNÉRALE DE L'ENSEMBLE $\mathcal{L}$ DES PROPRIÉTÉS DE SYSTÈMES PHYSIQUES "REELS" (CLASSIQUES OU QUANTIQUES).

$\mathcal{L}$ TREILLIS COMPLET → cadre général

faits d'expérience

AXIOME 1 : Orthocomplémentation
AXIOME 2 : Orthocomplémentation
AXIOME 3 : Atomicité
AXIOME 4 : Modularité faible *
AXIOME 5 : Loi de recouvrement *

a été reformulé

LES AXIOMES 1 à 5 SONT SATISFAITS PAR LES SYSTÈMES (THÉORIES) CLASSIQUES ET QUANTIQUES.

? ? ?
ALORS OÙ RÉSIDE LA DIFFÉRENCE ?
? ? ? ?

"RÉPONSE" ANTICIPÉE

Quand ∃ réciprocité

a "actuelle" ou b "actuelle" $\Rightarrow$ $a \vee b$ "actuelle"

$\boxed{\Leftarrow \quad \forall\, a, b \in \mathcal{L}}$

$\boxed{\text{ALORS}}$

Si $\forall\, a \in \mathcal{L} \quad \exists \quad \alpha \in a$ telle que

α "vraie" ou $\alpha^{\sim}$ "vraie"

quel que soit l'état du système

autrement dit

si la réponse à toute expérience préexiste à l'expérience

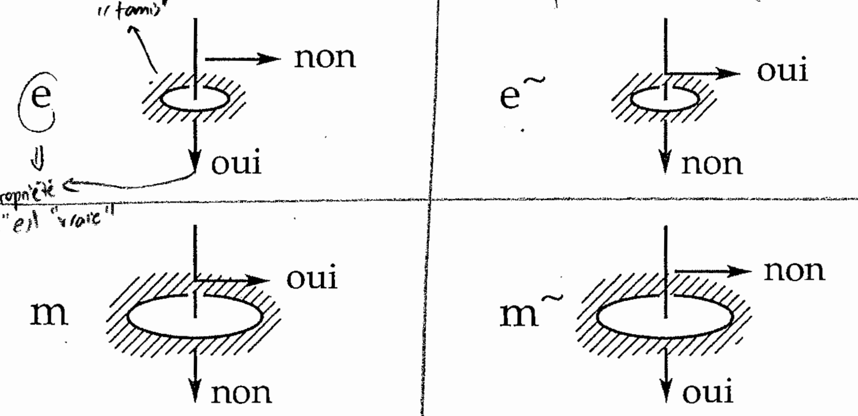
autrement dit

si le système est classique

EXEMPLE ILLUSTRATIF

Système physique : le petit pois

Questions :



question absurde

$e \cdot m = O$ $\qquad e < m^{\sim}$ $\qquad m < e^{\sim}$

nulle questi

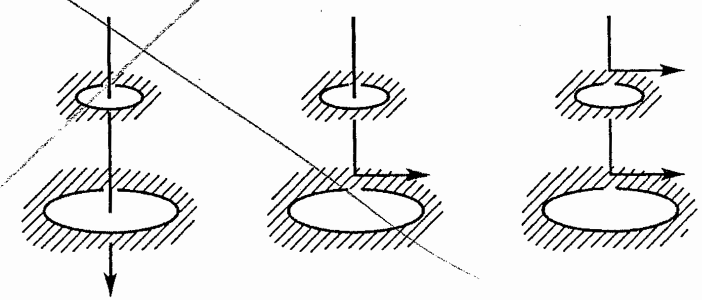
$e^{\sim} m^{\sim} = f$ $\qquad e\, m^{\sim} = e$ $\qquad m\, e^{\sim} = m$

$f < e^{\sim}$ $\qquad f < m^{\sim}$

$f^{\sim}$ oui

⟺ f non

$e^{\sim}$ non	$e^{\sim}$ non	$e^{\sim}$ oui
$m^{\sim}$ oui	$m^{\sim}$ non	$m^{\sim}$ non

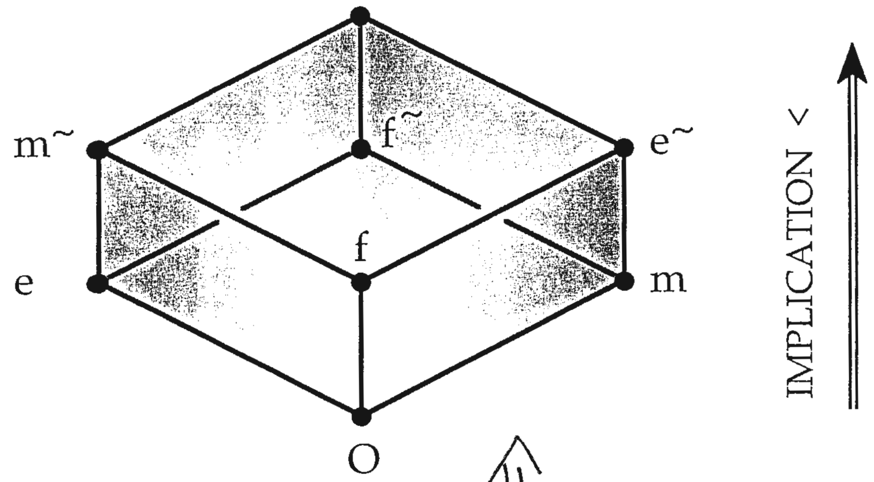


$e < f^{\sim}$ $\qquad$ impossible $\qquad$ $m < f^{\sim}$

(ce sont les seuls)

$\mathcal{L}$ → d'où le nom "treillis"

(système classique)



A VÉRIFIER

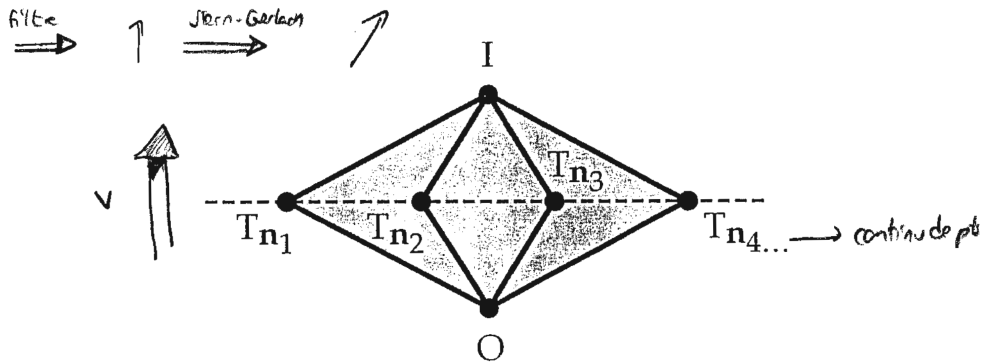
$f \cdot m$	$f \cdot e$	$f \cdot m^{\sim}$	$f \cdot e^{\sim}$
O	O	f	f
$f^{\sim} \cdot m$	$f^{\sim} \cdot e$	$f^{\sim} \cdot m^{\sim}$	$f^{\sim} \cdot e^{\sim}$
m	e	e	m

RIEN DE NOUVEAU

EXEMPLE ILLUSTRATIF

Système : l'atome d'Ag

Questions : expérience de Stern – Gerlach d'orientation $T_{\mathbf{n}}$



∄ 2 orientations différentes

Expérience : $T_{\mathbf{n}} \cdot T_{\mathbf{n}'} = O$ dès que $\mathbf{n} \neq \mathbf{n}'$

$T_{\mathbf{n}}^{\sim} = T_{-\mathbf{n}}$ $\forall\ \mathbf{n}$

oui avec certitude app. S.G. orienté ↓

oui avec certit. $\tilde{T}$

non avec certit. T avec S.g. ↑

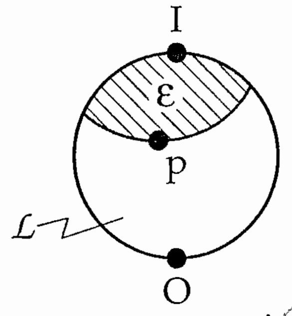
⟹ seulement non ds direct. opposée (et pas toutes direct.)

⟹ Système quantique.

L'ENSEMBLE DES ÉTATS D'UN SYSTÈME PHYSIQUE S

LE CONCEPT D'ORTHOGONALITÉ DES PROPRIÉTÉS

Def : ÉTAT : SOUS – ENSEMBLE $\varepsilon \subset \mathcal{L}$ DES PROPRIÉTÉS ACTUELLES DU SYTÈME (à un moment donné)



$\mathcal{L} \ni p = \bigwedge_{a \in \varepsilon} a \in \varepsilon$ ⊕ gde borne inférieure de ε

$\varepsilon = \{a \in \mathcal{L} \mid p < a\}$

$\uparrow$

Caractérise l'état ε

Σ : ENSEMBLE DE TOUS LES ÉTATS POSSIBLES DU SYSTÈME S $\mathcal{L} \hookrightarrow \Sigma$

PROPRIÉTÉS $p \in \Sigma$ → borne inférieure.

- $\mathcal{L} \ni a$ "actuelle" $\Leftrightarrow$ $p < a$
- $a < b$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{p < a \;\Rightarrow\; p < b}$
- $a = \bigvee_{\{p \in \Sigma \mid p < a\}} p$

Démonstration

Les deux premiers points sont triviaux

Etablissons le point 3

$J = \{p < a\}$

$$a \geq \bigvee_{\{p<a\}} p \overset{\text{déf.}}{=} \underbrace{\bigwedge_{\{b \mid p < b,\ \forall p < a\}} b}_{\text{en particulier}} \geq a$$

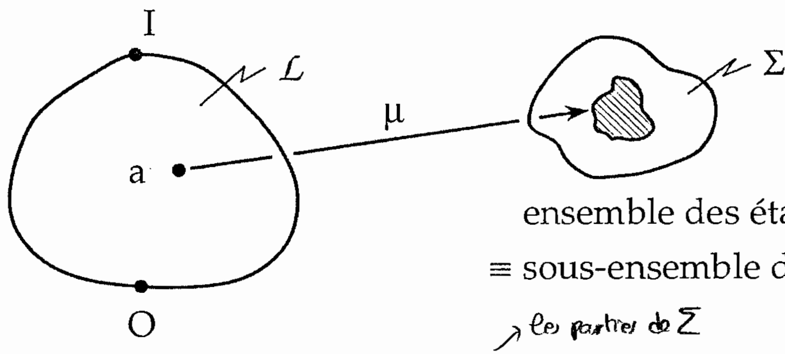
$\forall j \in J$

borne sup. ⊕ petite borne sup. propriété ⇒ a

$a < b \longrightarrow$ borne inf.

?

LE MORPHISME DE CARTAN $\mu : \mathcal{L} \to \mathcal{P}(\Sigma)$



ensemble des états

≡ sous-ensemble de $\mathcal{L}$

$$\mu : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{P}(\Sigma)$$

les parties de Σ

$$a \longmapsto \mu(a) = \{p \in \Sigma \mid p < a\}$$

sous-ens. des états pour lesquels la propriété est actuelle.

Le morphisme de Cartan associe à chaque propriété "a" l'ensemble des états pour lesquels cette propriété est "actuelle".

Définition : Une propriété non - triviale

$p \in \mathcal{L}$ est un atome si

$$x \in \mathcal{L} \text{ et } x < p \Rightarrow x = O \text{ ou } x = p$$

donc élément le "plus petit" ; $\nexists$ entre O et p

p.ex. ds esp. phase : c'est le point de mesure nulle

Propriétés du morphisme de Cartan

1) $\mu(O) = \phi$ et $\mu(I) = \Sigma$

rien — tout rassemble lui-même

2) μ est injectif : $\mu(a) = \mu(b) \Leftrightarrow a = b$

3) $a < b \Leftrightarrow \mu(a) \subset \mu(b)$

4) $\mu(\underset{i}{\wedge} a_i) = \underset{i}{\cap} \mu(a_i)$

5) si p est un atome alors $\mu(p)$ contient un état et un seul
(p est "actuelle" pour un état et un seul)

ce sont les "axiomes" de la mesure de la probabilité (avec σ-additivité)

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$

→ il y a la structure d'espace de probabilité !

Démonstration

1) 2) 3) suivent directement de la définition

4) $\mu(\underset{i}{\wedge} a_i) = \{p \in \Sigma \mid p < \underset{i}{\wedge} a_i\}$

$= \{p \in \Sigma \mid p < a_i, \ \forall i\}$

$= \underset{i}{\cap} \{p \in \Sigma \mid p < a_i\} = \underset{i}{\cap} \mu(a_i)$

5) Montrer que si p est un atome il existe ($\exists!$) un état $\varepsilon \in \Sigma$ tel que $\mu(p) = \{\varepsilon\}$

"ab absurdo". soient ε_1 et $\varepsilon_2 \in \Sigma$ tels que p est actuelle. Soient

$$p_1 = \underset{a \in \varepsilon_1}{\wedge} a \qquad \text{et} \qquad p_2 = \underset{a \in \varepsilon_2}{\wedge} a$$

Alors $p_1 < p$ et $p_2 < p$ et par conséquent $p = p_1 = p_2$ puisque p est un atome et $p_1 \neq 0$, $p_2 \neq 0$. Donc $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \equiv \varepsilon$

Définition : soient $p, q \in \Sigma$

p est orthogonal à q $\Leftrightarrow$ $\exists\, \gamma \in Q$ telle

que p "actuelle" $\Rightarrow$ γ "vraie"

et q "actuelle" $\Rightarrow$ $\gamma^{\sim}$ "vraie" $\Longrightarrow$ γ "non" certain

États			
p	test γ	"oui"	$\boxed{\text{certain}}$
q		"non"	$\boxed{\text{certain}}$

Notation $p \perp q$ (états)

Propriétés $p, q, r, s \in \Sigma$

- $p \perp q \;\Rightarrow\; q \perp p$
- $p \perp q,\ r < p,\ s < q \;\Rightarrow\; r \perp s$ / analogie : sous-ensembles (s.s.esp vect.)
- $p \perp q \;\Rightarrow\; \underbrace{p \wedge q}_{\text{borne inférieure}} = 0$ { p et q ne sont jamais actuels simultanément.

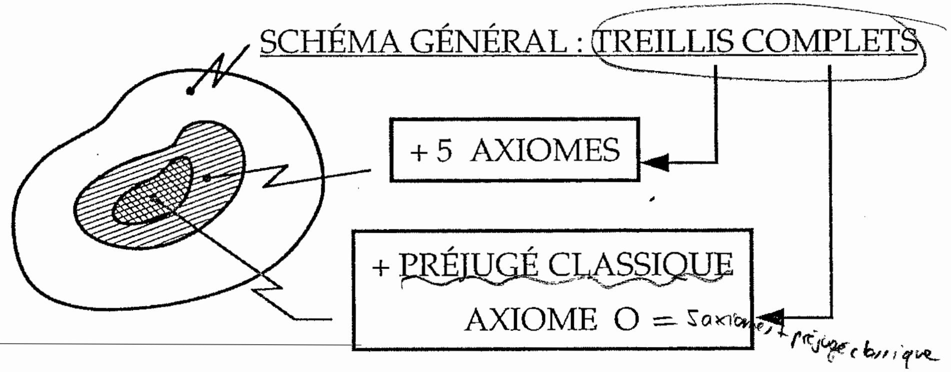
Généralisation $a, b \in \mathcal{L}$ (propriétés)

$a \perp b \;\Leftrightarrow\; (p < a \text{ et } q < b \;\Rightarrow\; p \perp q)$

- $a \perp b \;\Rightarrow\; b \perp a$
- $a \perp b,\ c < a,\ d < b \;\Rightarrow\; c \perp d$
- $a \perp b \;\Rightarrow\; a \wedge b = 0$

FAISONS LE POINT

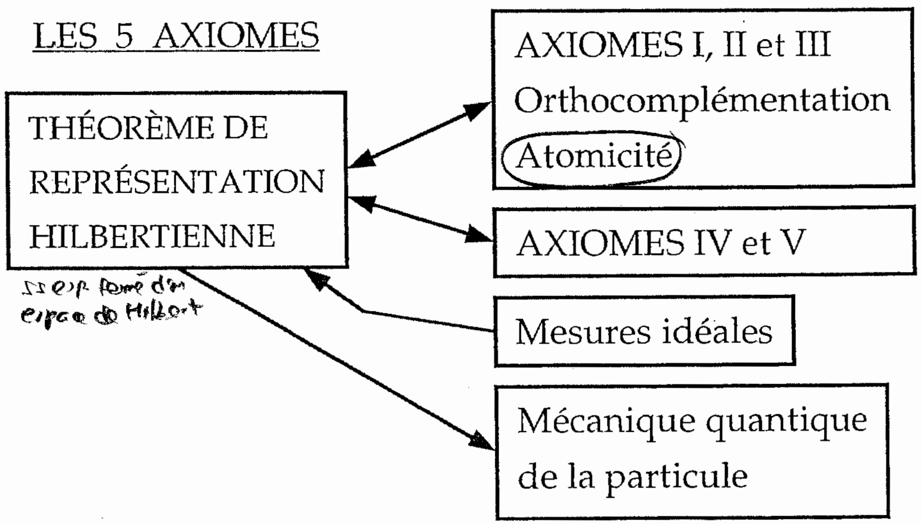
$\mathcal{L}$ CONSTITUE UN SCHÉMA CONCEPTUEL TRÈS GÉNÉRAL INCLUANT LA MÉCANIQUE QUANTIQUE ET LA MÉCANIQUE CLASSIQUE EN TANT QUE CAS PARTICULIERS.



Physique quantique avec règles de supersélection

Physique classique

LES 5 AXIOMES



SYSTÈMES CLASSIQUES

Définition : Une question $\alpha \in Q$ est <u>classique</u>

si $\forall \; \varepsilon \in \Sigma$ ou α est "vraie" ou $\alpha^{\sim}$ est "vraie" 2 par [illegible]

oui certain   oui certain

> **<u>AXIOME O</u>** (ou PRÉJUGÉ CLASSIQUE)
>
> $\forall \; a \in \mathcal{L} \quad \exists \quad \alpha \in a$ classique

propriété   question classique   → ∃ question t.q. réponse → oui certain / non certain

<u>Conséquences de l'AXIOME O</u>

<u>Systèmes classiques</u>

borne inférieure

> • Soit un état $\varepsilon \in \Sigma$ et $p = \bigwedge_{a \in \varepsilon} a$
>
> Alors p est un atome

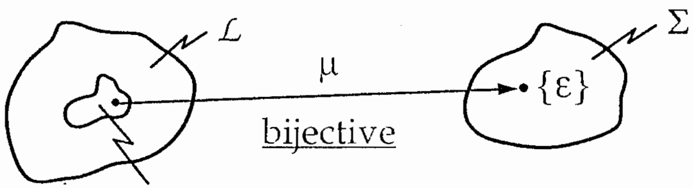
Plus précisément

état.

μ morphisme de Cartan

liste des états pour lesquels les prop. actuelles!

p atome $\longmapsto \mu(p) = \{\varepsilon\}$



sous-ensemble des atomes de $\mathcal{L}$

$\{\text{Atomes de } \mathcal{L}\} \xleftrightarrow[\text{bijection}]{} \{\text{Etats}\}$

<u>Démonstration</u>

Montrer que $\forall \, \varepsilon \in \Sigma \;\; p = \bigwedge_{a \in \varepsilon} a$ est un atome

"ab absurdo" soit $p \neq$ atome Donc $\exists \; p_1 < p$

avec p_1 non-trivial $\neq p$

$\Rightarrow \; \exists \; \varepsilon_1 \supset \varepsilon$ et $\exists \; \alpha_1 \in p_1$ avec α_1 classique

axiome O

En conséquence

α_1 "vraie" dans l'état ε_1 et comme $\varepsilon_1 \supset \varepsilon \not\ni p_1$

il en résulte que $\tilde{\alpha_1}$ "vraie" ce qui est impossible.

Donc $\nexists \; p_1 < p$ avec p_1 non-trivial $\neq p$

?

<u>Remarque</u> : Vérifié dans le cas classique sera postulé sous forme d'axiome dans le cas quantique Axiome d'atomicité

• propriété d'atomicité maintenue par axiome en M.Q. (axiome 3)

Conséquences

- $\forall\, \varepsilon \in \Sigma$ il existe $a \in \mathcal{L}$ tel que $\mu(a) = \complement\{\varepsilon\}$

propriété

l'état

complément

- ∃ propriété vraie seulement si le syst. est ds un état autre que l'état ε

Démonstration

Soit $\varepsilon \in \Sigma$ et $p = \bigwedge_{b \in \varepsilon} b \neq O$

Soit $\alpha \in p$ une question classique

Alors $\exists\, a \in \mathcal{L}$ tel que $\alpha^{\sim} \in a$

et donc $\mu(a) = \{\varepsilon' \in \Sigma \mid \varepsilon' \neq \varepsilon\} = \complement\{\varepsilon\}$

car $\forall\, \varepsilon' \neq \varepsilon$ p ne peut être "actuelle"

α ne peut pas être "vraie" et par conséquent

$\alpha^{\sim}$ est "vraie"

Plus généralement

- $\forall\, A \subset \Sigma$ il existe $a \in \mathcal{L}$ tel que $\mu(a) = A$

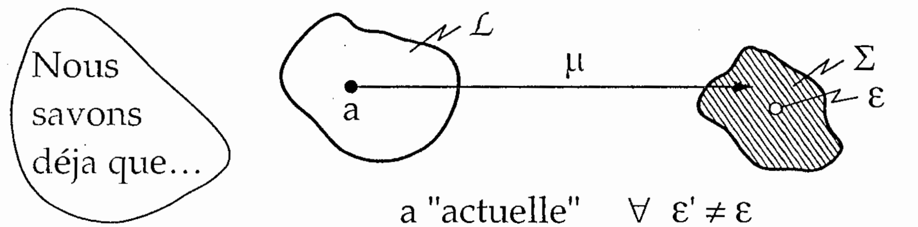
propriété

liste d'états

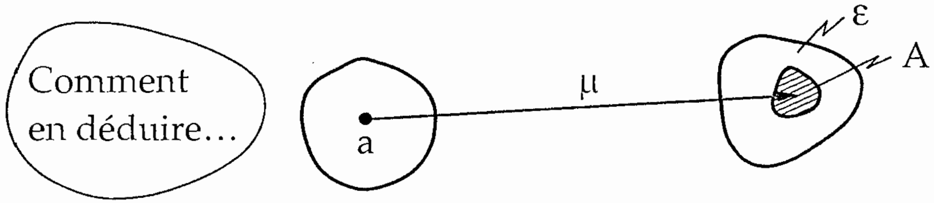
actuelle que par une liste d'états donnée à l'avance.

Démonstration

Les deux cas triviaux $A = \phi$ et $A = \Sigma$ sont écartés.



a "actuelle" $\forall\ \varepsilon' \neq \varepsilon$



a "actuelle" $\forall\ \varepsilon \in A$

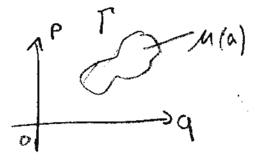
Soit $a(\varepsilon)$ telle $\mu(a(\varepsilon)) = \complement\{\varepsilon\}$. Alors

$$\overset{A=A}{A} = \complement \bigcup_{\varepsilon \notin A} \{\varepsilon\} = \bigcap_{\varepsilon \notin A} \complement\{\varepsilon\} = \bigcap_{\varepsilon \notin A} \mu(a(\varepsilon))$$

$$= \mu\Big(\bigwedge_{\{\varepsilon \notin A\}} a(\varepsilon)\Big)$$

$$\mu\Big(\bigwedge_i a_i\Big) = \bigcap_i \mu(a_i)$$

Résumons nous



> THÉORÈME : Pour un système classique le morphisme de Cartan est bijectif. Notamment le treillis $\mathcal{L}$ est isomorphe à l'ensemble $\mathcal{P}(\Sigma)$ des parties de Σ l'ensemble des états.

Précisons

propriété absurde / ensemble vide

$$\mu(O) = \phi$$

prop. triviale / ensemble des états

$$\mu(I) = \Sigma$$

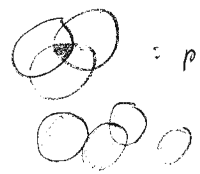
$$a < b \iff \mu(a) \subset \mu(b)$$

$$\mu(\wedge_i a_i) = \cap_i \mu(a_i)$$

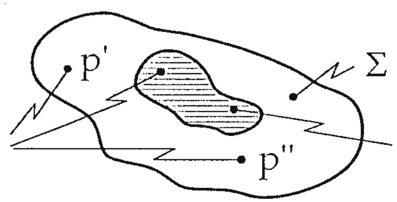
spécifique au cas classique avec Cartan

$$\mu(\vee_i a_i) = \cup_i \mu(a_i)$$

$$p \text{ atome} \iff \mu(p) = \{\varepsilon\} \quad (\text{point de } \Sigma)$$

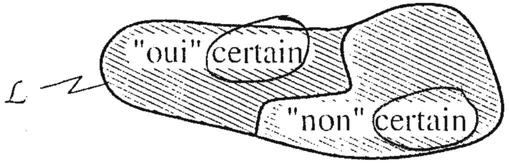


$\mathcal{L}$:



$\mathcal{L} \equiv \mathcal{P}(\Sigma)$ ensemble des propriétés = parties des états

> Tous les états sont orthogonaux :
>
> $a \perp b \iff \mu(a) \cap \mu(b) = \phi$



actuel ⟹ oui certain
non actuel ⟹ non certain } ⟹ phys. classique

THÉORÈME DE REPRÉSENTATION HILBERTIENNE

$\mathcal{L}$: treillis complet satisfaisant aux axiomes I, II, III, IV et V

ALORS ⟹

$\exists$ Un ensemble non-vide Ω

et

une famille $\mathcal{H}_\omega$, $\omega \in \Omega$ d'espaces de Hilbert complexes (séparables)

pas besoin d'un P.S. la liste de tous les sous-esp. ⊥ suffit à définir un esp. Hilbert.

TELS QUE

aussi par un sq. ortho[illegible]

à chaque $a \in \mathcal{L}$ on peut associer

une suite $\{E_\omega, \omega \in \Omega\}$ de sous-espaces

fermés de $\mathcal{H}_\omega$

convergence de la sous-esp. même.

$$\mathcal{L} \ni a \longmapsto \{E_\omega, \omega \in \Omega\}$$

$$\mathcal{L} \ni b \longmapsto \{F_\omega, \omega \in \Omega\}$$

DE TELLE MANIÈRE QUE

$$a < b \iff E_\omega \subset F_\omega, \ \forall \omega \in \Omega$$

relation d'ordre conservé.

Le cas classique

$$\dim \mathcal{H}_\omega = 1 \qquad \forall\, \omega \in \Omega$$

$$\mathcal{L} \ni a \longmapsto \{\omega \in \Omega \mid E_\omega \neq \{O\}\} \in \mathcal{P}(\Omega)$$ classique

$\Omega \equiv \Sigma$: espace des états

Le cas quantique (pur)

$$\mathrm{Card}\,(\Omega) = 1$$

$\mathcal{L} \ni a \longmapsto E \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{sous-espaces} \\ \text{fermés de } \mathcal{H} \end{array} \right.$

$O \longmapsto \{O\}$

$I \longmapsto \mathcal{H}$

$b \longmapsto F$

$a < b \iff E \subset F$

$a \wedge b \longmapsto E \cap F$

$\overline{E+F}$ = sous-esp fermé engendré par $E+F$

$$\boxed{a \vee b \longmapsto \overline{E+F} \quad \text{" Principe de superposition"}}$$

≡ théorème
≠ principe

$a \perp b \longmapsto E \perp F$

p atome $\longmapsto$ rayon R (sous-espace de dim 1) quant

<u>Pour caractériser un état il suffit</u>

<u>donc de donner un vecteur ψ de $\mathcal{H}$ engendrant R</u>

a "actuelle" $\iff \psi \in E$ ≡ M.Q

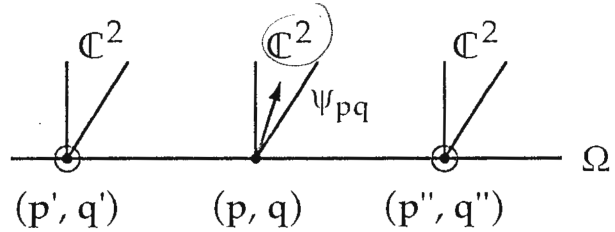
EXEMPLE

ni classique 100%
ni quantique 100%

Particule classique porteuse d'un spin 1/2.

Position $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$. Impulsion $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$

$$\mathbb{R}^6 = \Omega = \{\mathbf{p}, \mathbf{q}\} \;,\; \omega = (\mathbf{p}, \mathbf{q}) \;,\; \overset{\forall \omega}{\mathcal{H}_\omega} = \mathbb{C}^2$$
dim = 2



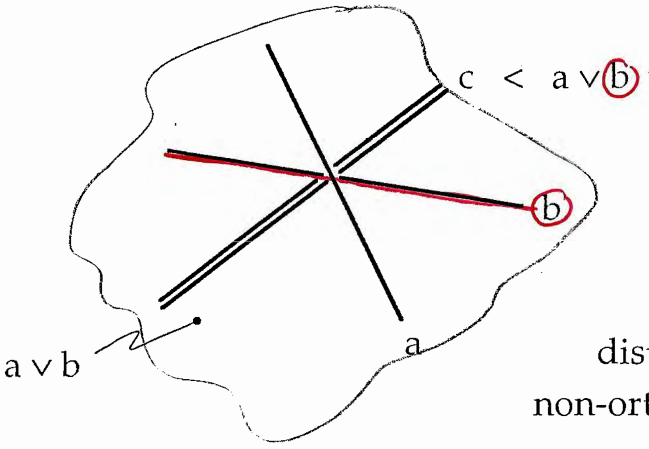
espace de phase

$\underbrace{\Omega = \text{base} \;,\; \mathbb{C}^2 = \text{fibre}}$
"espace fibré"

propr. classiques

propriétés quantiques

"SUPERPOSITION" DE (PROPRIÉTÉS)
états



$a \neq b$
distincts de c
non-orthogonales à c

c "actuelle" $\Rightarrow$ $a \vee b$ "actuelle"

c "actuelle" $\left\{ \begin{array}{l} \text{test de } a \rightarrow \text{"oui" et "non"} \\ \text{test de } b \rightarrow \text{"oui" et "non"} \end{array} \right.$

sans certitude

Terminologie

a et b sont des propriétés "potentielles"   engendré par a et ⊥

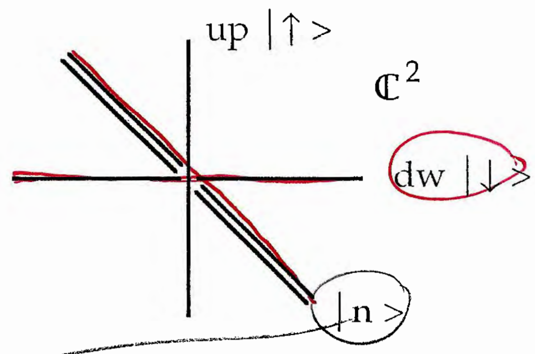
c est une "superposition" de a et b

$a \vee b$ "actuelle" $\not\Rightarrow$ $\left\{ \begin{array}{c} a \text{ "actuelle"} \\ \text{ou} \\ b \text{ "actuelle"} \end{array} \right.$

quantique

cas classique : $\Rightarrow$

SPIN 1/2   Stern – Gerlach

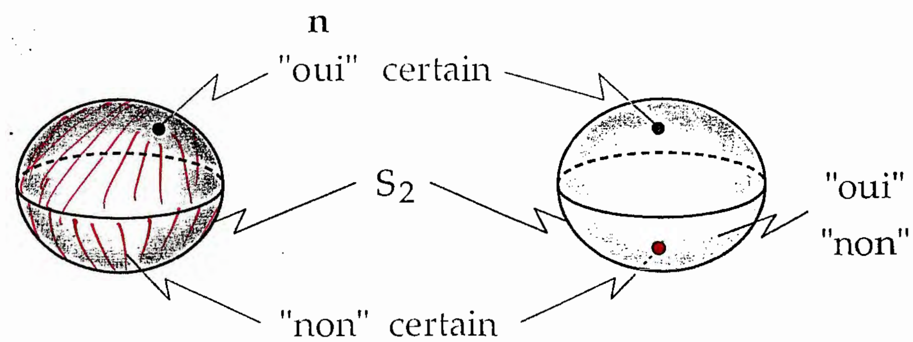


État : spin selon **n**

$T_{\mathbf{n}}$ "vraie"	$T_\uparrow$	$T_\downarrow$
"oui" certain	"oui"	"oui"
	"non"	"non"

$\boxed{|\mathbf{n}\rangle \text{ superposition de } |\uparrow\rangle \text{ et } |\downarrow\rangle}$

Spin "classique"   Spin "quantique"

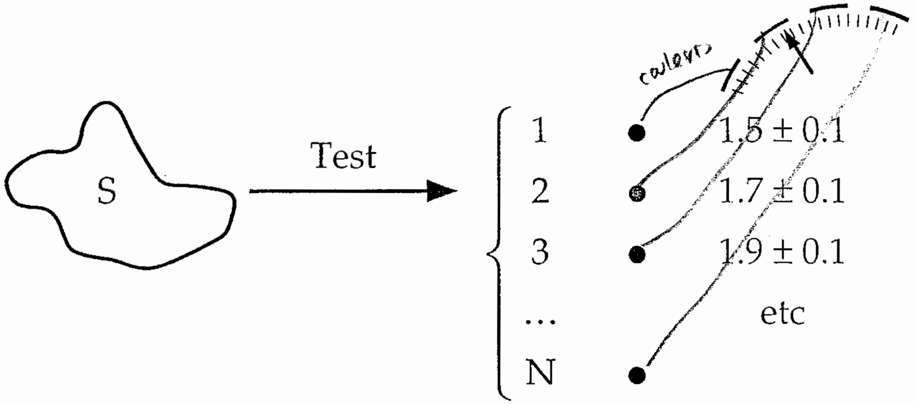


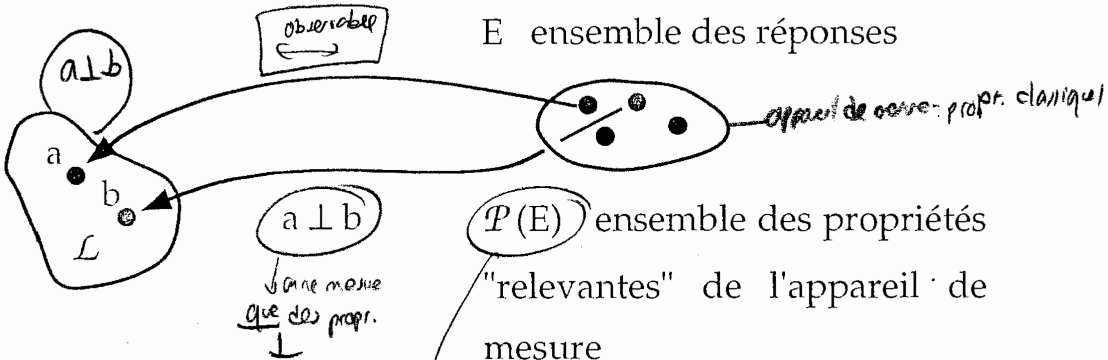
"OBSERVABLE" IDÉES DIRECTRICES

⇒ Généralisation de la notion de question

⇒ Test de plusieurs propriétés

⇒ Plusieurs résultats possibles et chaque résultat est associé à une propriété différente





E ensemble des réponses

$\mathcal{P}$(E) ensemble des propriétés "relevantes" de l'appareil de mesure

appareil de mesure : structure classique

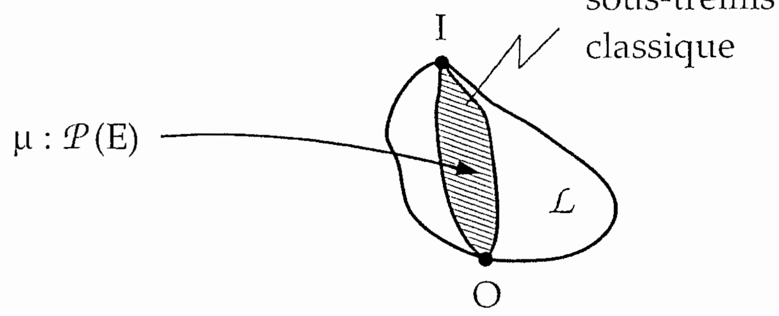
DÉFINITION : "OBSERVABLE"

$$\mathcal{P}(E) \xrightarrow[\text{morphisme}]{\mu \quad a\perp b} \mathcal{L}$$

préserve les propriétés

- $\mu(E) = I \quad \mu(\phi) = O$
- $\mu(\bigcup_i \Delta_i) = \bigvee_i \mu(\Delta_i)$
- $\mu(\complement \Delta) = \mu(\Delta)^{\perp}$

E : "échelle" de l'appareil de mesure exprimant le résultat



"OBSERVABLE" RÉALISATION HILBERTIENNE

$E = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}$

$\lambda_i,\ i = 1, \ldots,$ atomes de E

$$\mu(\lambda_i) = a_i \xrightarrow[\text{hilbertienne}]{\text{Réalisation}} E_i$$

propriété

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{H})$$

P_i : projecteur orthogonal de $\mathcal{H}$ sur E_i

$E_i \perp E_j$ dès que $i \neq j$

$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i$ opérateur autoadjoint

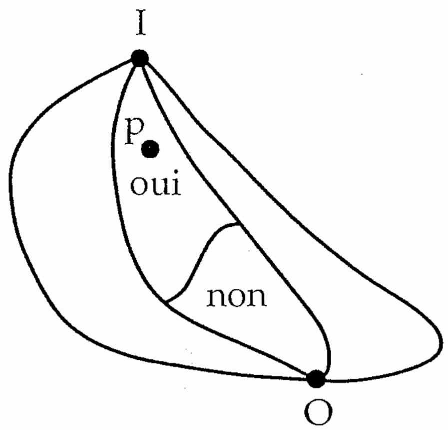
λ_i : valeurs propres

$E_i = P_i(\mathcal{H})$: sous-espaces propres

$$\boxed{A \Rightarrow \{\lambda_i \leftrightarrow E_i\} \Rightarrow \text{caratérise } \mu}$$

$\Longrightarrow$ observable $\neq$ op. autoadjoint

$$\boxed{\text{observable} \equiv \text{sous-structure classique de } \mathcal{L}}$$



La réalisation d'un "appareil d'observation" n'entraine pas l'existence d'une observable

> L'EXISTENCE D'UNE OBSERVABLE RELÈVE DE LA STRUCTURE DE $\mathcal{L}$ DONC EST INHÉRENTE A LA NATURE DU SYTÈME

EXEMPLE TRAGIQUE : L'EXISTENCE D'APPAREILS PHOTOGRAPHIQUES N'IMPLIQUE PAS L'EXISTENCE D'UNE OBSERVABLE DE POSITION POUR LE PHOTON

ORTHOCOMPLÉMENTATION

cas quantique

associe à toute propriété la plus grande propriété (borne inférieure)

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L} \ni a \arrow[r, "\text{rep.}"] \arrow[d, "\text{orthocomplémentation}"'] & E_a \in \mathcal{P}(\mathcal{H}) \arrow[d] \\ \mathcal{L} \ni a' & E_a^{\perp} \in \mathcal{P}(\mathcal{H}) \arrow[l, "\text{rep.}"'] \end{tikzcd}$$

a' : orthocomplément de a

- $(a')' = a$ → borne sup.
- $a \wedge a' = O$
- $a < b \;\Rightarrow\; b' < a'$

$$p < a \quad \text{et} \quad q < a' \;\Rightarrow\; p \perp q$$

$$\exists \quad \alpha \in Q \;\left|\; \begin{array}{lll} a & \text{"actuelle"} & \alpha \;\text{"vraie"} \\ a' & \text{"actuelle"} & \tilde{\alpha} \;\text{"vraie"} \end{array}\right.$$

→ les 2 propriétés peuvent être testées par la m. question

cas classique

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L} \ni a \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\text{orthocomplémentation}"'] & \mu(a) \in \mathcal{P}(\Sigma) \arrow[d] \\ \mathcal{L} \ni a' & \complement\mu(a) \equiv \mu(a)^{\perp} \in \mathcal{P}(\Sigma) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

$\boxed{\forall\, p \quad a \;\; \underline{\text{ou}} \;\; a' \quad \text{est "actuelle"}}$

exclusif

PROPRIÉTÉS COMPATIBLES

DÉFINITION : Deux propriétés a et $b \in \mathcal{L}$

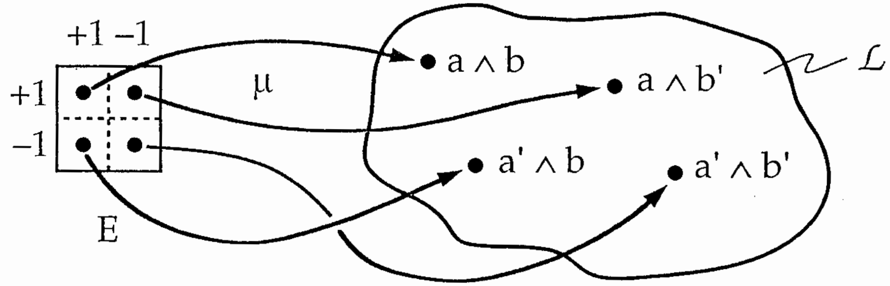
sont compatibles si et seulement si

$$a \wedge b\,,\; a' \wedge b\,,\; a \wedge b'\,,\; a' \wedge b'$$

définissent une observable.

↳ i.e. un sous-treillis classique $\mu : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{L}$

Autrement dit (par exemple)



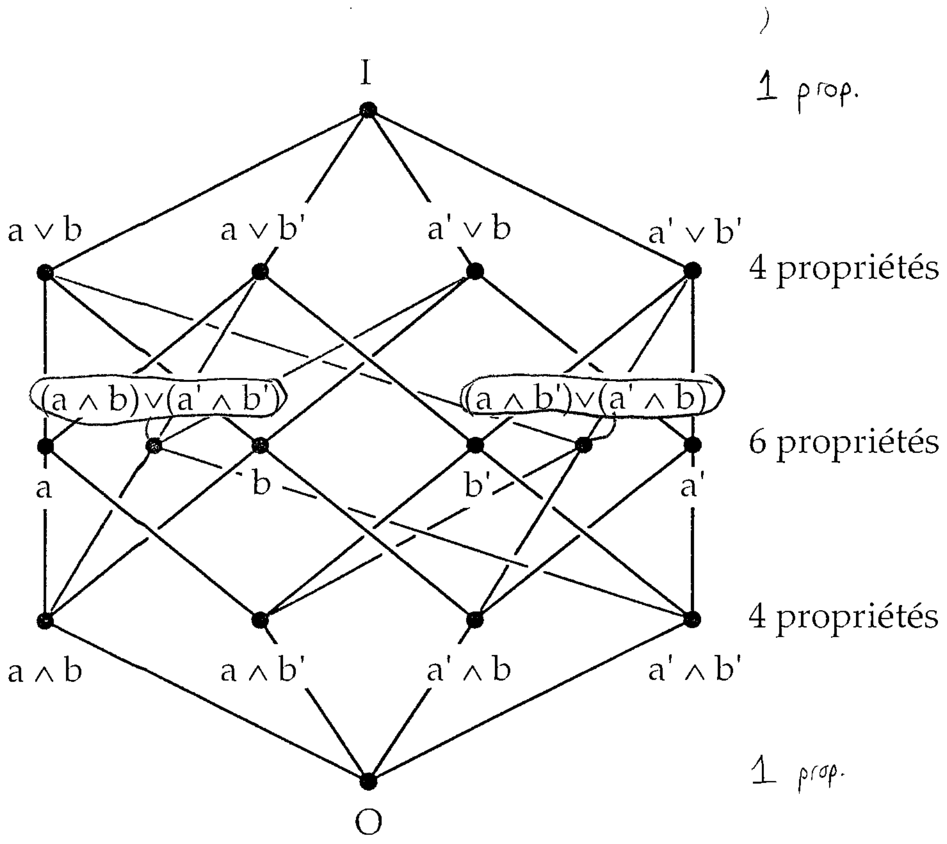
μ morphisme : $\mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{L}$

$(1, 1) \longmapsto a \wedge b$		a et b
$(1, -1) \longmapsto a \wedge b'$		a et non-b
$(-1, 1) \longmapsto a' \wedge b$		non-a et b
$(-1, -1) \longmapsto a' \wedge b'$		non-a et non-b

etc

> Si "oui" est certain pour l'une des quatre propriétés $a \wedge b$, $a \wedge b'$, $a' \wedge b$ et $a' \wedge b'$ "non" est certain pour les autres.

↳ observable en phys. classique

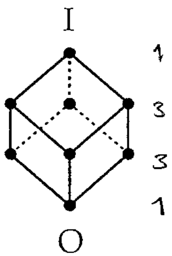


Sous treillis engendré par a et b compatibles

Hyper cube à 4 dimensions. Situation similaire à

3 propriétés

3 propriétés



voir treillis des petits pois

TRADUCTION HILBERTIENNE DE LA COMPATIBILITÉ

	Représentation hilbertienne	
$\mathcal{L}$	$\longrightarrow$	$\mathcal{P}(\mathcal{H})$
a	$\longmapsto$	E
b	$\longmapsto$	F
a'	$\longmapsto$	$E^{\perp}$
b'	$\longmapsto$	$F^{\perp}$
$a \wedge b$	$\longmapsto$	$E \cap F$
$a \wedge b'$	$\longmapsto$	$E \cap F^{\perp}$
$a' \wedge b$	$\longmapsto$	$E^{\perp} \cap F$
$a' \wedge b'$	$\longmapsto$	$E^{\perp} \cap F^{\perp}$
	etc	

Atomes orthogonaux 2 à 2

$$\mu\left(\bigcup_i \Delta_i\right) = \bigvee_i a_i \longrightarrow \bigoplus_i E_i \qquad \text{morphisme}$$

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge b') = a \quad \Leftrightarrow \quad (E \cap F) + (E \cap F^{\perp}) = E$$

$$(a \wedge b) \vee (a' \wedge b) = b \quad \Leftrightarrow \quad (E \cap F) + (E^{\perp} \cap F) = F$$

etc

P_E et P_F projecteurs orthogonaux de $\mathcal{H}$ sur E et F respectivement

⊗ THÉORÈME

$$\boxed{[P_E, P_F] = O \quad \Leftrightarrow \quad a \text{ et } b \text{ compatibles}}$$

DÉMONSTRATION

$\Rightarrow$

$[P_E, P_F] = O$

$$(P_E + \underbrace{\mathbb{1} - P_E}_{P_{E^\perp}})(P_F + \underbrace{\mathbb{1} - P_F}_{P_{F^\perp}}) = \mathbb{1} = P_{\mathcal{H}}$$

$$P_E P_F + P_E P_{F^\perp} + P_{E^\perp} P_F + P_{E^\perp} P_{F^\perp} = \mathbb{1}$$

$$P_{E\cap F} + P_{E\cap F^\perp} + P_{E^\perp \cap F} + P_{E^\perp \cap F^\perp} = \mathbb{1}$$

$\Rightarrow$ partition de $\mathcal{H}$ en sous-espaces orthogonaux (associés aux 4 atomes $(\pm 1, \pm 1) \in \cancel{E}$)

$\Leftarrow$

a et b compatibles, donc (cf. p. précédente)

$$E \cap F + E \cap F^\perp = E$$

$$\Rightarrow E \cap F^\perp = (E \cap F)^\perp_E \Rightarrow F^\perp \supset (E \cap F)^\perp_E$$

$$\Rightarrow P_F (E \cap F)^\perp_E = \{O\} \Rightarrow P_F (P_E - P_{E\cap F}) = O$$

donc ici $\mathbb{1}$ devient P_E

$$\Rightarrow P_F P_E = P_F P_{E\cap F} = P_{E\cap F}$$

$$E \rightleftarrows F \Rightarrow P_E P_F = P_{E \cap F}$$

Donc $\quad P_E P_F = P_F P_E$

MESURE IDÉALE

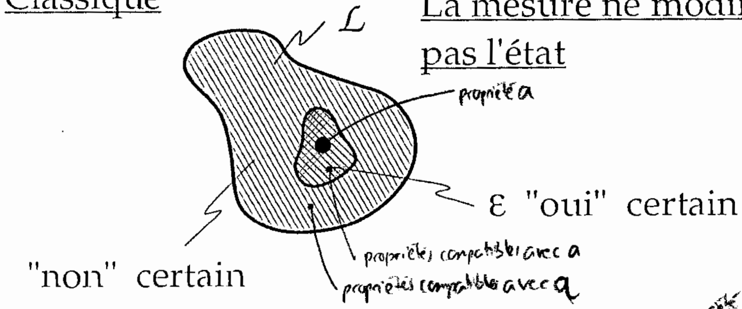
$\alpha \in Q$ mesure idéale si

- $\alpha \in a$ et $\alpha^\sim \in a'$
- $\Rightarrow$ réponse : oui — a "actuelle" en fin de mesure
- $\Rightarrow$ réponse : oui — perte d'information ou pertubation minimale

Si b "actuelle" avant la mesure et b compatible (p. exemple observables $[a,b]=0$) avec a alors b est encore "actuelle" après la mesure si la réponse est "oui"

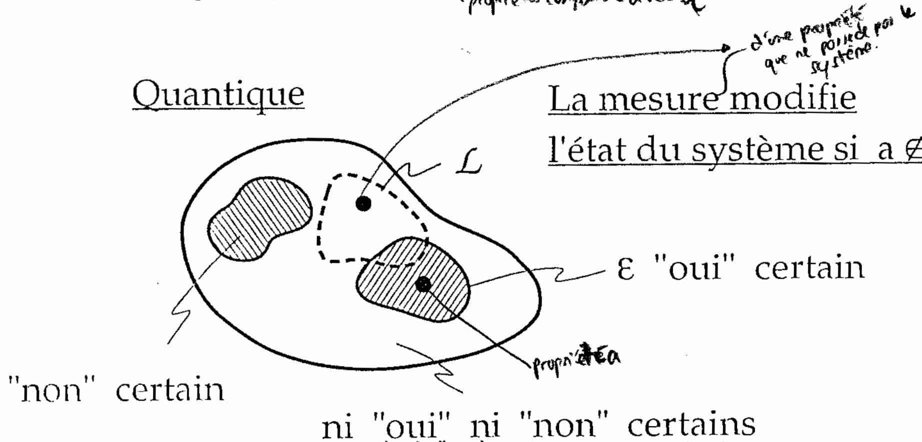
Classique

La mesure ne modifie pas l'état



Quantique

La mesure modifie l'état du système si $a \notin \varepsilon$



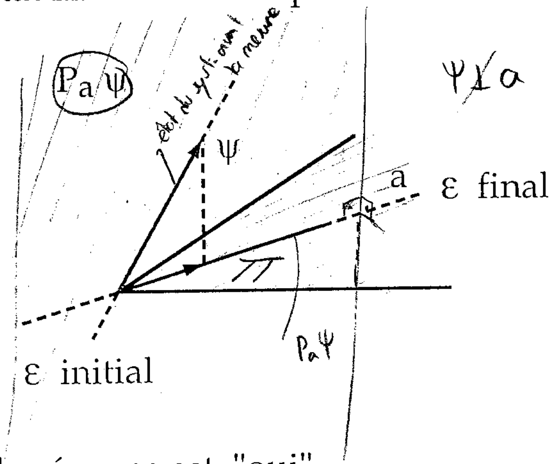
- La mesure actualise les propriétés potentielles du système $\Rightarrow$ l'état change.

QUEL EST L'ÉTAT FINAL SI LA RÉPONSE EST "OUI" ?

a   propriété mesurée, E_a , P_a

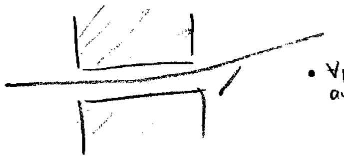
ψ vecteur $\in \mathcal{H}$ décrivant l'état initial

$\Rightarrow$ L'état final est décrit par le vecteur



si la réponse est "oui"

Exemple de mesure idéale :   Stern-Gerlach



• ∀ particule qui sort, le système aura acquis la propriété voulue.

QUELLE EST LA PROBABILITÉ D'OBTENIR LA RÉPONSE "OUI" ?

Hypothèses physiques : La probabilité d'obtenir la réponse "oui" ne dépend que

- de la propriété a mesurée
- de l'état p avant la mesure

  $0 \leq \ w(a, p) \leq 1$

Exigences mathématiques

$\forall$ a et b compatibles

- $w(a \wedge b, p) = w(a, p) \cdot w(b, p_a)$
- $w(a, p) + w(a', p) = 1$

$\uparrow$ état après mesure de a $\rightarrow$ oui

THÉORÈME (A. M. Gleason : Measures on the closed subspaces of Hilbert space, J. Math. Mech. 6 (1957) p. 885)

$$\boxed{w(a, p) = \|P_a \psi\|^2}$$

en supposant que les phénomènes physiques soient gouvernés par des probabilités (≠ phénomènes aléatoires)

$\psi \in \mathcal{H}$ de norme 1 décrit l'état p

P_a projecteur orthogonal sur E_a sous-espace fermé correspondant à la propriété "a".

DEUX "VISIONS" DU "MONDE"

1926	1980 et au delà
↓	↓

p et **q** existent mais ne peuvent être mesurées avec une précision arbitrairement élevée

M Q : fondée sur les relations d'incertitude

théorie de ce que on peut mesurer et pas de ce que on ne peut pas mesurer

Les propriétés **p** et **q** ne peuvent pas s'actualiser simultanément

q actualité ⇒ p ≡ potentialité du système

Inégalités de Heisenberg inhérentes à la nature du système et non aux processus de mesure

Description positiviste		Description réaliste (au sens d'Einstein)
"Théorie" des "expériences" et non du système comme existant en soi	≠	Le système existe en soi indépendamment de tout observateur

Paradoxes :
"Les trous du Young"
....
(schéma dit de Copenhague)

Pas de paradoxe
+
confirmations expérimentales

ex: fentes de Young.

PARTICULE QUANTIQUE (SANS SPIN)

Entité physique Particule → Observable "position" q

Entité physique Particule → Observable "quantité de mouvement" p

∄ autres observables réellement indép. de {p, q}

<u>Observable de position</u> $\underline{q}$

$$\underline{q} : \underbrace{\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)}_{} \xrightarrow{\text{morphisme}} \underbrace{\mathcal{P}(\mathcal{H})}_{\text{ss fermé}}$$

Ensemble des parties de l'espace :

(! Image mathématique simplifiée)

- $\mathbb{R}^3 \longmapsto \mathcal{H}$
- $\phi \longmapsto \{O\}$
- $\underbrace{\bigcup_i \Delta_i}_{\text{union disjointe}} \longmapsto \bigoplus_i E_i$
- $\complement\Delta \longmapsto E^{\perp}$

$\Delta \cap \Delta' = \phi \longmapsto E \perp E' = \{0\}$

> Le morphisme $\underline{q}$ associe à "chaque" région de l'espace une propriété de l'entité. Mais encore !! Position ???

Observable de quantité de mouvement $\underline{p}$

$$\underline{p} : \underbrace{\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)}_{\uparrow} \xrightarrow[\text{morphisme}]{} \mathcal{P}(\mathcal{H})$$

Ensemble des parties de l'espace des quantités de mouvement

(! Image mathématique simplifiée)

- $\mathbb{R}^3 \longmapsto \mathcal{H}$
- $\phi \longmapsto \{O\}$
- $\bigcup_i \theta_i \longmapsto \bigoplus_i F_i$
- $\complement \theta \longmapsto F^{\perp}$

$0 \cap 0' = \phi \longmapsto F \perp F' = \{o\}$

> Le morphisme $\underline{p}$ associe à "chaque" ensemble de valeurs de quantité de mouvement une propriété de l'entité. Mais encore !!
> Quantité de mouvement ???

> Position et quantité de mouvement ???

Nous savons ce que signifie

i) translater

i i) tourner

i i i) mettre en mouvement (Newton)

les dispositifs test permettant de définir les propriétés de la particule
(instruments de mesure)

> Newton : quantité de mouvement
> Galilée : quantité de mouvement $\longleftrightarrow$ vitesse

Point de vue classique

$$(\mathbf{a}, \mathbf{w}, R) : \begin{cases} \mathbf{q} \longrightarrow R\,\mathbf{q} + \mathbf{a} \\ \mathbf{p} \longrightarrow R\,\mathbf{p} + \mathbf{w} \end{cases}$$

Groupe
- translation d'espace ($\mathbf{a}$)
- translation de quantité de mouvement ($\mathbf{w}$)
- rotation spaciale (R)

$$(\mathbf{a}, \mathbf{w}, R) : \quad \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^6 \quad \text{espace de phase}$$

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{w}, R) : \quad \mathcal{P}(\mathbb{R}^6) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^6)$$

$$\mathcal{L} \xrightarrow[\text{automorphisme}]{} \mathcal{L}$$

Préserve : le préordre, la plus grande borne inférieure $\cap$, la plus petite borne supérieure $\cup$, l'atomicité, l'orthogonalité, etc

L'ensemble des transformations $(\mathbf{a}, \mathbf{w}, R)$ constitue un groupe G pour la composition des applications. De plus, la correspondance

$$(\mathbf{a}, \mathbf{w}, R) \longmapsto S(\mathbf{a}, \mathbf{w}, R)$$

constitue un homomorphisme de G dans le groupe des automorphismes de $\mathcal{L}$

Point de vue quantique

on le fait sur l'appareil de mesure, et non sur le système

$$\text{test } T_b \xrightarrow{(\mathbf{a}, \mathbf{w}, R)} \text{test } T_{\bar{b}}$$

$$b \longmapsto \bar{b}$$

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{w}, R) : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$$

automorphisme $\Longleftarrow$

- homogénéité
- isotropie
- relativité du mouvement

$$I \longmapsto I$$

$$O \longmapsto O$$

$$\bigvee_i a_i \longmapsto \bigvee_i \bar{a}_i$$

$$a' \longmapsto (\bar{a})'$$

$$a < b \iff \bar{a} < \bar{b}$$

$$a \perp b \iff \bar{a} \perp \bar{b}$$

$$p \text{ atome} \longmapsto \bar{p} \text{ atome}$$

Représentation hilbertienne

$$\begin{array}{ccc} S(\mathbf{a}, \mathbf{w}, R) : \mathcal{L} & \xrightarrow{\text{automorphisme}} & \mathcal{L} \\ \downarrow & \text{représentation hilbertienne} & \downarrow \\ \mathcal{P}(\mathcal{H}) & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathcal{H}) \end{array}$$

Théorème de Wigner

Correspondance induite par un Opérateur unitaire ou antiunitaire $U(\mathbf{a}, \mathbf{w}, R) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$

THÉORÈME ((E. P. WIGNER : Group Theory, Academic Press, New York, 1959) appendix of Chapter 20)

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert $\boxed{(\dim \mathcal{H} > 2).}$

Tout automorphisme

$$S : \mathcal{P}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{H})$$

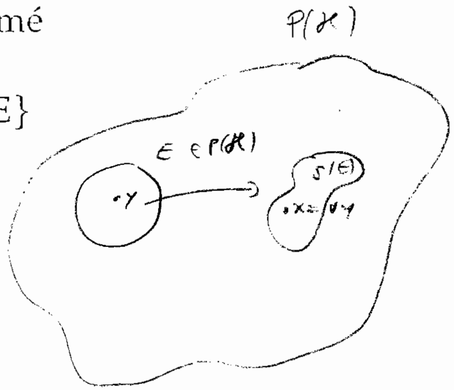
est induit par un opérateur unitaire ou antiunitaire

$$U : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$$

fermé

qui à chaque sous-espace $E \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ fait correspondre le sous-espace fermé

$$S(E) = \{x = U y \mid y \in E\}$$



Position : système d'imprimitivité

$$\begin{tikzcd}
P(\mathbb{R}^3) \ni \Delta \arrow[r, mapsto, "\underline{q}"] \arrow[d, "G \ni g"', "\text{notation}"] \arrow[dr, phantom, "\text{commutativité du diagramme}"] & \underline{q}(\Delta) = E_\Delta \in \mathcal{P}(\mathcal{H}) \arrow[d, "S(g)\ \text{vu avant}"] \\
g\cdot\Delta = R\cdot\Delta + \mathbf{a} \arrow[r, "\underline{q}"] & \underline{q}(g\cdot\Delta) \overset{\text{Wigner}}{=} U(g)\, E_\Delta
\end{tikzcd}$$

Diagramme commutatif $\forall g = (\mathbf{a}, \mathbf{w}, R)$ et $\forall \Delta \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$. Formellement :

$$\boxed{\underline{q}(g\cdot\Delta) = S(g)\, \underline{q}(\Delta) \qquad \forall g \in G \text{ et } \forall \Delta \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^3)}$$

Autrement dit si P_Δ désigne le projecteur orthogonal de $\mathcal{H}$ sur $E_\Delta \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ alors :

$$\boxed{P_{g\cdot\Delta} = U(g)\, P_\Delta\, U(g)^{-1} \qquad \forall g \in G \text{ et } \forall \Delta \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^3)}$$

$P_{\Delta+a} = U(a) P_\Delta U(a)^{-1} \Rightarrow P_{\Delta+a} U(a) = U(a) P_\Delta$

$|\psi\rangle \in \Delta \Rightarrow P_{\Delta+a} U(a)|\psi\rangle = U(a)|\psi\rangle$

$\Rightarrow$ $U(a)$ agit comme une translation

Quantité de mouvement : système d'imprimitivité

$$\begin{tikzcd}
P(\mathbb{R}^3) \ni \theta \arrow[r, mapsto, "\underset{\sim}{p}"] \arrow[d, "G \ni g"'] & \underset{\sim}{p}(\theta) = E_\theta \in \mathcal{P}(\mathcal{H}) \arrow[d, "S(g)"] \\
g \cdot \theta = R \cdot \theta + \mathbf{w} \arrow[r, "\underset{\sim}{p}"] & \underset{\sim}{p}(g \cdot \theta) = U(g)\, E_\theta
\end{tikzcd}$$

même argumentation à la différence $a \to w$

Diagramme commutatif $\forall\, g = (\mathbf{a}, \mathbf{w}, R)$ et $\forall \Delta \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$. Formellement :

$$\boxed{\underset{\sim}{p}(g \cdot \theta) = S(g)\, \underset{\sim}{p}(\theta) \qquad \forall\, g \in G \text{ et } \forall\, \theta \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^3)}$$

Autrement dit si P_θ désigne le projecteur orthogonal de $\mathcal{H}$ sur $E_\theta \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ alors :

$$\boxed{P_{g \cdot \theta} = U(g)\, P_\theta\, U(g)^{-1} \qquad \forall\, g \in G \text{ et } \forall\, \theta \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^3)}$$

PROBLÈME

G	groupe donné connu
$\mathcal{H}$	espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ inconnu
$g \longmapsto U(g)$	représentation unitaire projective de G dans $\mathcal{H}$ inconnue
$\underset{\sim}{q} : \Delta \longmapsto E_\Delta$	morphisme de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ inconnu
$\underset{\sim}{p} : \theta \longmapsto F_\theta$	morphisme de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ inconnu
$P_{g \cdot \Delta} = U(g)\, P_\Delta\, U(g)^{-1}$	système d'imprimitivité imposé
$P_{g \cdot \theta} = U(g)\, P_\theta\, U(g)^{-1}$	système d'imprimitivité imposé

+ condition d'irréductibilité

"solution la plus restrictive possible"

pas évident !

Solution : unique à un paramètre arbitraire près (noté $\hbar$)

G. W. Mackey : Induced Representations of Groups and Quantum Machanics. W. A. Benjamin, Inc New York 1968

SOLUTION

↳ UNIQUE

- $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3, d^3x)$

- $U(g) : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$

  $(U(\mathbf{a})\psi)(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x} - \mathbf{a})$

  $(U(\mathbf{w})\psi)(\mathbf{x}) = \exp(i\,\overline{\mathbf{w}} \cdot \overline{\mathbf{x}}/\hbar)\,\psi(\mathbf{x})$

  $(U(R)\psi)(\mathbf{x}) = \psi(R^{-1}\mathbf{x}) \qquad , \forall \psi \in \mathcal{H}$

- $\underset{\sim}{q} : \Delta \longmapsto E_\Delta = P_\Delta \mathcal{H}$

  $(P_\Delta \psi)(\mathbf{x}) = \chi_\Delta(\mathbf{x}) \cdot \psi(\mathbf{x})$

- $\underset{\sim}{p} : \theta \longmapsto E_\theta = P_\theta \mathcal{H}$

  $(P_\theta \psi)(\mathbf{x}) =$

$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{p}\, e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar}\, \chi_\theta(\mathbf{p}) \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{y}\, \psi(\mathbf{y}) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}/\hbar}$$

⚠ – éqn similaires à ce qui est connu, mais il faut oublier les anciens schémas conceptuels
– ? : $\exists!\,\hbar$?

Commutation de Weyl
(dynamique)

$$U(\mathbf{w})\,U(\mathbf{a}) = e^{i\,\mathbf{w}\cdot\mathbf{a}/\hbar}\;U(\mathbf{a})\,U(\mathbf{w})$$

Projectivité

$$S(\mathbf{w}) \circ S(\mathbf{a}) = S(\mathbf{a}) \circ S(\mathbf{w})$$

Opérateurs de position

$$(\mathbf{q}\,\psi)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\,\psi(\mathbf{x}) \qquad , \forall\, \mathbf{x} \text{ et } \forall\, \psi$$

Donc

$$U(\mathbf{w}) = \exp\left(\frac{i\,\mathbf{w}\cdot\mathbf{q}}{\hbar}\right)$$

Opérateurs de quantité de mouvement

$$U(\mathbf{a}) = \exp\left(-\frac{i\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{p}}{\hbar}\right)$$

$$U(\mathbf{a})\,\mathbf{q}\,U(\mathbf{a})^{-1} = \mathbf{q} - \mathbf{a}\,\mathbb{1}$$

Règles de commutation de Heisenberg (≠ axiome)

vient de la commutation de Weyl ↗ $\frac{d}{da_j}(\text{comm. Weyl})|_{a=0}$, $\frac{d}{dw_k}(\text{comm. Weyl})|_{w=0}$, avec $U(a) = e^{\cdots}$, $U(w) = e^{\cdots}$

$\Longrightarrow$

$$\boxed{\frac{i}{\hbar}\,[p_j,\; q^k] = \delta_j^k\,\mathbb{1}}$$

$\Longrightarrow$

Question : valeur de $\hbar$!!! universelle ???

L'ÉVOLUTION RÉVERSIBLE — L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER

Hypothèse : L'entité physique considérée ne change pas de "nature" au cours du temps. (Elle ne "vieillit pas).

Autrement dit, le treillis complet $\mathcal{L}$ décrit l'ensemble des propriétés de l'entité physique à chaque instant. $\mathcal{L} = \text{cte} \ \forall t$

Évolution de l'instant t_0 à l'instant t

État à l'instant t_0 — État à l'instant t

$$\varepsilon_{t_0} \xmapsto{\text{déterminisme}} \varepsilon_t$$

$$\Downarrow$$

$$\text{atome } p_{t_0} \xmapsto{\text{bijectif}} p_t \text{ atome}$$

$$a = \vee p_{t_0} \xmapsto{\text{bijectif}} \vee p_t \in \mathcal{L}$$

$$\{p_{t_0} < a\}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} S(t, t_0) : \mathcal{L} \xrightarrow{\text{automorphisme}} \mathcal{L} \\ S(t_2, t_1) \circ S(t_1, t_0) = S(t_2, t_0) \quad \forall t_0, t_1, t_2 \end{array}}$$

$\xrightarrow{\text{Wigner}}$

Notamment

i) $p_{t_0} \perp q_{t_0} \iff p_t \perp q_t$ atomes

ii) a "actuelle" en t_0 $\iff$ $S(t, t_0)\, a$ "actuelle" en t

iii) a et b compatibles $\iff$ $S(t, t_0)\, a$ et $S(t, t_0)\, b$ compatibles

iv) $\mu : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{L}$ observable $\iff$ $S(t, t_0) \circ \mu : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{L}$ observable

Représentation hilbertienne

$\downarrow$

$\boxed{\text{Théorème de Wigner}}$

$\downarrow$

Evolution de l'instant t_0 a l'instant t

$$U(t, t_0) : \mathcal{H} \xrightarrow{\text{unitaire}} \mathcal{H}$$

pas anti-unitaire à cause de U(t2,t1) U(t1,t0)

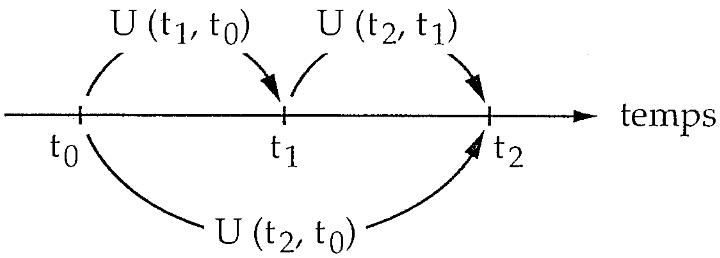
$$\mathcal{P}(\mathcal{H}) \ni \underbrace{E}_{\substack{\text{"actuelle"} \\ \text{à l'instant } t_0}} \longmapsto \underbrace{U(t, t_0)\, E}_{\substack{\text{"actuelle"} \\ \text{à l'instant } t}} \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$$

"actuelle" à l'instant t_0 $\iff$ "actuelle" à l'instant t

$$U(t_2, t_1)\, U(t_1, t_0) = U(t_2, t_0) \quad \text{mod une phase}$$

⇒ unitaire et pas antiunitaire

Générateur de l'évolution réversible ou opérateur hamiltonien



$t_2 \equiv t + \Delta t \qquad t_1 \equiv t \qquad \Delta t \equiv dt \to 0$

$$U(t+\Delta t, t)\, U(t, t_0) \cong U(t, t_0) + \Delta t \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0)$$

$$U(t+\Delta t, t) \cong \mathbb{1} + \Delta t \left.\frac{\partial}{\partial t'} U(t', t)\right|_{t'=t}$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = \underbrace{\left.\frac{\partial}{\partial t'} U(t', t)\right|_{t'=t}}_{\text{Générateur de l'évolution } \equiv\, H(t)/i\hbar} U(t, t_0)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} i\hbar \dfrac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H(t)\, U(t, t_0) \\ \text{avec } U(t_0, t_0) = \mathbb{1} \end{array}}$$

$H(t)$: opérateur autoadjoint appelé hamiltonien

LE PRINCIPE DE GALILÉE

A : grandeur indépendante du temps

$$A^H_{t_0}(t_1) = U(t_1, t_0)^{-1}\, A\, U(t_1, t_0)$$

$$d_{t_1} A^H_{t_0}(t_1) = \frac{i}{\hbar}\left[H^H_{t_0}(t_1) ; A^H_{t_0}(t_1)\right]$$

par l'éq de Schroedinger

$t_1 \to t_0$

$$\boxed{\dot{A}_{t_0} = \frac{i}{\hbar}\left[H(t_0) ; A\right]} \qquad \forall A \neq A(t)$$

Principe de relativité galiléenne

Considérons une transformation $U(\mathbf{w})$.

Alors :

$$U(\mathbf{w})^{-1}\, \mathbf{p}\, U(\mathbf{w}) = \mathbf{p} + \mathbf{w}\, \mathbb{1}$$

et

$$U(\mathbf{w})^{-1}\, \dot{\mathbf{q}}_{t_0}\, U(\mathbf{w}) = \dot{\mathbf{q}}_{t_0} + \frac{\mathbf{w}}{M} \mathbb{1}$$

$\sim p$

c'est une pseudo-hypothèse ! (raisonnement physique)

La grandeur M est appelée la masse de la particule

Conséquence

$$U(\mathbf{w})^{-1}\ (\mathbf{p} - M\,\dot{\mathbf{q}}_{t_0})\ U(\mathbf{w}) = \mathbf{p} - M\,\dot{\mathbf{q}}_{t_0}$$

⟹ commute avec $U(w)$
⟹ commute avec les générateurs de $U(w)$
⟹ commute avec $q(\Delta)$

$$[\mathbf{p} - M\,\dot{\mathbf{q}}_{t_0},\ \underline{q}(\Delta)] = 0\,, \qquad \forall \Delta \in \mathbb{R}^3$$

$$\mathbf{p} - M\,\dot{\mathbf{q}}_{t_0} = \mathbf{A}_{t_0}(\mathbf{q})$$

$$\boxed{\dot{\mathbf{q}}_{t_0} = \frac{1}{M}\,(\mathbf{p} - \mathbf{A}_{t_0}(\mathbf{q})) = \frac{i}{\hbar}\,[H(t_0), \mathbf{q}]}$$

$$\boxed{H(t_0) = \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{A}_{t_0}(\mathbf{q}))^2}{2M} + V_{t_0}(\mathbf{q})}$$

fct. quelconque de q

⟹ étape suivante : on dit que $H(t_0)$ = énergie.
⟹ ceci est une HYPOTHÈSE malgré tout, mais une hypothèse somme toute assez faible

$E = h\nu$

$\Delta p\,\Delta q \geq \hbar/2$

$i\hbar\,\partial_t\,\psi(x,t) = (H\psi)\,(x,t)$

$<A> = <\psi\,|\,A\,|\,\psi>$

Effet tunnel

Principe de superposition

$\cancel{[J, J] = i\hbar J}$

$[p, q] \cancel{=} -i\hbar\mathbb{1}$

$E = \hbar\omega\,(n + \frac{1}{2})$

valeur propre

simultanément mesurables

observable

observables qui commutent

probabilité

incertitude

mesurable

En 1999 ! !

?

La Dualité

?

Ondes Corpuscule

?

Reprinted from FOUNDATIONS OF PHYSICS

Vol. 12, No. 12, December 1982
Printed in Belgium

Description of Many Separated Physical Entities Without the Paradoxes Encountered in Quantum Mechanics

Dirk Aerts[1] résolu le paradoxe EPR

Received December 18, 1981

We show that it is impossible in quantum mechanics to describe two separated physical systems. This is due to the mathematical structure of quantum mechanics. It is possible to give a description of two separated systems in a theory which is a generalization of quantum mechanics and of classical mechanics, in the sense that this theory contains both theories as special cases. We identify the axioms of quantum mechanics that make it impossible to describe separated systems. One of these axioms is equivalent to the superposition principle. We show how these findings throw a different light on the paradox of Einstein, Podolsky, and Rosen.

1. INTRODUCTION

We shall show that the quantum mechanical description of two separated physical systems is wrong. More precisely, it is impossible in quantum mechanics to give a description of separated physical systems. We will give a description of separated systems in a more general theory. We shall say that this theory is more general because it is possible to define five axioms, such that when these five axioms are fulfilled, the theory becomes equivalent to quantum mechanics (eventually with Abelian superselection rules). Of these five axioms, three do not cause any trouble for the description of separated systems, but the last two axioms both make it impossible to describe separated systems. One of these two axioms is equivalent do to the fact that the set of states of the system has a vectorspace structure and hence is also

[1] Theoretische Natuurkunde, Vrije Universiteit Brussel, Pleinlaan 2, 1050 Brussel, Belgium.

0015-9018/82/1200-1131$03.00/0 © 1982 Plenum Publishing Corporation

LES 5 AXIOMES

- Commentaires des 5 axiomes :

- α et $\beta \in Q$ testent a $(\alpha \approx \beta)$

- En général il n'y a aucune relation entre $\alpha^{\sim}$ et $\beta^{\sim}$.

- Il n'est en général pas vrai que l'entité S possède une propriété orthogonale plus faible qu'une autre.

- Par exemple $\alpha^{\sim}$ jamais "vraie".

- a pas "actuelle" $\alpha \Rightarrow$ 99.9999 % "oui".

- La question α teste a de manière peu efficace car elle tend à cacher la propriété importante de la question à savoir qu'elle a une réponse "non" possible.

Questions primitives (questions plus efficaces)

Définition : si α est une question testant une propriété a telle que $\alpha^{\sim}$ teste la propriété b alors α est une question primitive si et seulement si :

i) Lorsque l'entité S est dans un état orthogonal à a alors $\alpha^{\sim}$ est "vraie".

ii) Lorsque l'entité S est dans un état orthogonal à b alors α est "vraie".

$$\boxed{\alpha \text{ primitive} \Leftrightarrow \alpha^{\sim} \text{ primitive}}$$

$$\boxed{\alpha \text{ primitive}}$$

$$\begin{cases} p \perp a \Rightarrow \alpha^{\sim} \text{ "vraie"} \\ p \perp b \Rightarrow \alpha \text{ "vraie"} \end{cases}$$

Théorème :

$$\alpha_i \in Q$$

$$\underset{i}{\pi}\,\alpha_i \text{ primitive} \Longleftrightarrow \underbrace{\alpha_i \approx \alpha_j}_{\text{questions primitives équivalentes}} \text{ et } \alpha_i \text{ primitives}$$

Démonstration :

$\Leftarrow$ trivial. Démontrons $\Rightarrow$

- $\alpha_j \in a_j$; $\underset{i}{\pi}\,\alpha_i \in a$; $\tilde{\alpha}_j \in b_j$; $\underset{i}{\pi}\,\tilde{\alpha}_i \in b$

  Si α_j "vraie" $\Rightarrow$ $p \perp b_j$. Donc $p \perp b$ et par conséquent $\underset{i}{\pi}\,\alpha_i$ est "vraie". Cela prouve que $\alpha_i \approx \alpha_j$ $\forall$ i et j

- Si $p \perp a_j$ $\forall j$ alors $p \perp a$. Donc $\underset{i}{\pi}\,\tilde{\alpha}_i$ est "vraie". Par conséquent $\tilde{\alpha}_j$ est "vraie". Cela montre que α_j est une question primitive.

Théorème

α et $\beta \in Q$ sont des questions primitives telles que $\alpha \approx \beta$. Alors $\alpha^{\sim} \approx \beta^{\sim}$

Démonstration :

$\alpha \in a$ et $\beta \in a$. $\alpha^{\sim}$ vraie $\Rightarrow$ $p \perp a \Rightarrow \beta^{\sim}$ vraie

Définition : Une propriété a d'une entité S sera dite primitive si elle peut être testée par une question primitive.

Théorème : Si τ est un ensemble de propriétés primitives d'une entité S et si $a \in \tau$ et $\alpha \in a$ est une question primitive nous noterons a' la propriété testée par $\alpha^{\sim}$.

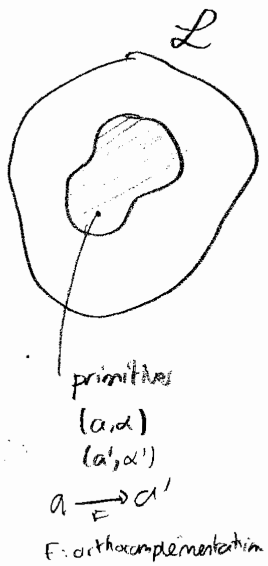
L'application $' : \tau \to \tau$ qui en résulte est une orthocomplémentation, notamment

- $a < b \Rightarrow b' < a' \qquad \forall\, a, b \in \tau$
- $(a')' = a$
- $a \wedge a' = 0$

De plus

- $c < a' \Leftrightarrow c \perp a \qquad \forall\, c \in \mathcal{L}$
- $a \vee a' = I$
- Si $a_i \in \tau$ alors $\underset{i}{\wedge} a_i \in \tau$ si et seulement

si $\underset{i}{\vee} a'_i \in \tau$ et dans ce cas $(\underset{i}{\wedge} a_i)' = \underset{i}{\vee} a'_i$.



Démonstration : soient a et $b \in \tau$ telles que $a < b$.

Si b' est actuelle alors l'entité est dans un état $p \perp b$. Donc $p \perp a$. Mais alors a' est actuelle.

Si $a \in \tau$ et si $\alpha \in a'$ est une question primitive alors $\alpha^{\sim} \in a$. Cela montre que $(a')' = a$.

Si $c \in \mathcal{L}$ est telle que $c < a'$ et si p et q sont des états tels que $p < c$ et $q < a$ alors il existe $\alpha \in a$ telle que α est "vraie" si l'entité est dans l'état q et $\alpha^{\sim}$ est "vraie" si l'entité est dans l'état p. Ainsi $p \perp q$. Si par ailleurs $c \perp a$ et c est actuelle, alors l'entité est dans un état $p \perp a$. De cela découle que a' est actuelle.

AXIOME I

Si S est une entité, alors les questions primitives de S forment un générateur d'ensemble de questions pour le treillis des propriétés.

Q

AXIOME II

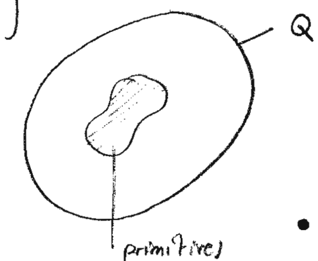
Si S est une entité et p un état de S alors il existe une question qui est "vraie" si et seulement si S est dans un état orthogonal à p.

état p question Q : $\beta \in Q$

$$\begin{cases} q \perp p \Rightarrow \beta \text{ vraie} \\ p \perp q \Leftarrow \beta \text{ vraie} \end{cases}$$

∃ propriété vraie ∀ état ⊥ à p

les questions primitives permettent de générer l'ensemble des questions du système.



⇒ peut former des questions pas primitives

Théorème : Soit $\mathcal{L}$ un treillis de propriétés d'une entité satisfaisant les axiomes I et II. Alors

- Pour $a \in \mathcal{L}$ il existe une propriété unique que b_a telle que b_a est actuelle si et seulement si l'entité est dans un état orthogonal à a
- Si a est une propriété primitive alors $b_a = a'$ (orthocomplément de a)

Démonstration : Pour tout état p il existe une propriété b_p. Pour $a \in \mathcal{L}$ on a $b_a = \bigwedge_{p < a} b_p$

Théorème : Soit $\mathcal{L}$ un treillis de propriétés d'une entité S satisfaisant les axiomes I et II. Alors

- $a < b \Rightarrow b' < a'$
- $a \wedge a' = 0$
- $(a')' = a$
- $b < a' \Leftrightarrow b \perp a$
- $a \vee a' = I$
- $(\vee_i a_i)' = \wedge_i a'_i$ et $(\wedge_i a_i)' = \vee_i a'_i$
  ce qui montre que l'application

$$' : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$$

est une orthocomplémentation et que $\mathcal{L}$ est un treillis orthocomplémenté.

Démonstration : Les deux premières affirmations sont évidentes. Ensuite, clairement $a < (a')'$. Par ailleurs si $a \in \mathcal{L}$ alors $a = \wedge_i a_i$ où a_i sont des propriétés primitives. Supposons $(a')'$ actuelle. Alors l'entité est dans un état $p \perp a'$. Or, si $p \perp a'$ alors $p \perp a'_i$, $\forall_i$. Ainsi, $p < (a'_i)'$, $\forall_i$ et par conséquent $p < a_i$, $\forall_i$. Donc finalement $p < a$. Cela montre que $(a')' < a$.

En résumé :

- Le premier axiome postule l'existence d'un ensemble générateur de propriétés telles que pour chaque propriété a de cet ensemble il existe une propriété faiblement orthogonal a' telle qu'il existe une question $\alpha \in a$ telle que $\alpha^{\sim} \in a'$
- Le second axiome postule l'existence d'une telle propriété faiblement orthogonale a' pour toute propriété a de l'entité

AXIOME III

Les états d'une entité S sont représentés par les atomes du treillis des propriétés de l'entité.

classique : atome = pt. de l'espace de phase

LES AXIOMES "FAIBLES"

pas toujours vérifiés (p. ex. ds paradoxe EPR)

AXIOME IV (La modularité faible)

Si $\mathcal{L}$ est le treillis des propriétés d'une entité et si a et b $\in \mathcal{L}$ sont telles que $a < b$ alors il est possible de trouver une propriété c telle que $c \perp a$ et $\underbrace{a \vee c}_{\text{borne supérieure}} = b$.

Vision hilbertienne

$$E_a \subset E_b \quad ; \quad E_c = E_a^{\perp} \cap E_b$$

CET AXIOME N'EST PAS SATISFAIT PAR LE TREILLIS DES PROPRIÉTÉS DE DEUX ENTITÉS SÉPARÉES

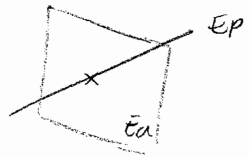
(paradoxe EPR)

AXIOME V (la loi de couvrement)

Si $\mathcal{L}$ est le treillis des propriétés d'une entité et si $a \in \mathcal{L}$ et p est un état tel que $a \wedge p = 0$ alors $a \vee p$ couvre a.

classique : + axiome O

Vision hilbertienne



$$E_a \cap E_p = \{0\} \quad \text{et} \quad \dim E_p = 1$$

$$\text{alors} \quad E_a \subset E_a + E_p$$

$E_a + E_p = \mathbb{R}^3$

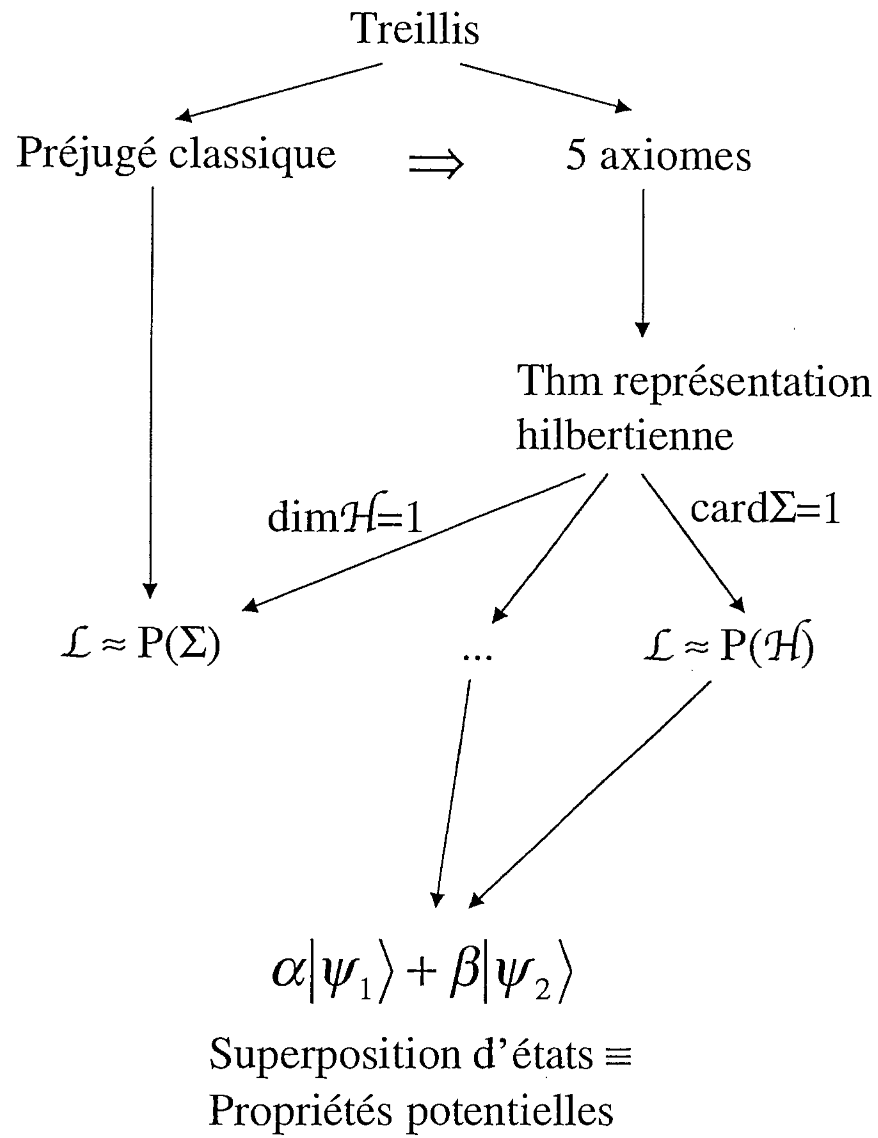
$E_a \subset \mathbb{R}^3$: ok !

CET AXIOME N'EST PAS SATISFAIT
PAR LE TREILLIS DES PROPRIÉTÉS
DE DEUX ENTITÉS SÉPARÉES

Aspects expérimentaux de la superposition des états quantiques

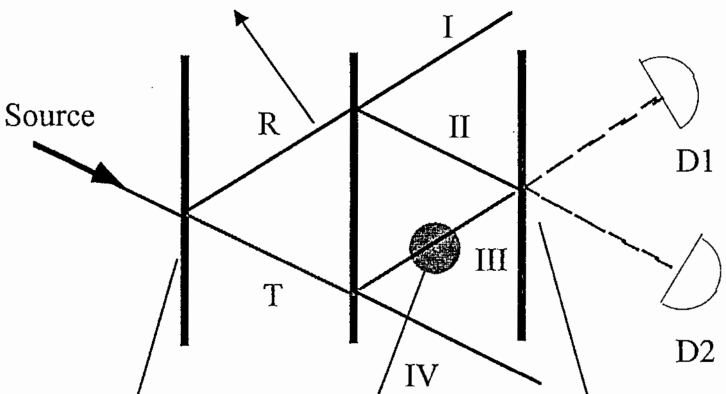
- Contexte
- Une expérience de Rauch
- Deux considérations annexes
- Sur la meilleure manière d'introduire la physique quantique
- Falsification expérimentale du « microscope d'Heisenberg »

Contexte



Interférométrie de neutrons (Rauch 1975) Montage

Chemins = régions où il est POSSIBLE de trouver le neutron



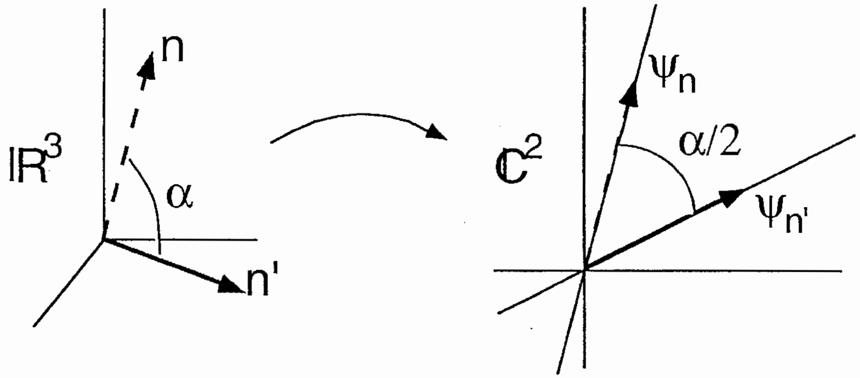
Déphasage (rot. spin): champ magnétique

Séparation:
diffraction de Bragg
sur monocristal de Si

Chemins II et III indiscernables pour la détection

Un seul neutron à la fois parcourt l'interféromètre

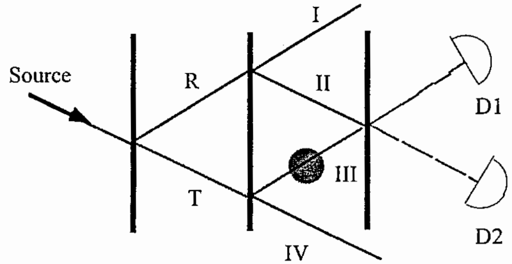
Rotation du spin; prédiction classique pour B $\propto 2\pi$



En particulier si on tourne le spin de 2π, le vecteur d'état change de signe

Fixons le champ magnétique B sur le chemin III de sorte que le spin tourne de 2π: dans une description classique, le neutron passe soit par II, soit par III; dans les deux cas, son spin est inchangé; le résultat de la détection doit être le même en présence ou en l'absence du champ.

Description quantique



- Etat initial: $|\psi\rangle = \psi_{spatial} \otimes |\hat{u}\rangle$
- Après le 1er séparateur:

$$|\psi\rangle = (\tau\psi_T + \rho\psi_R) \otimes |\hat{u}\rangle$$

- Après le 2e séparateur

partie perdue (non observée)

$$|\psi\rangle = (\cancel{\tau\rho\psi_I} + \rho^2\psi_{II} + \rho\tau\psi_{III} + \cancel{\tau^2\psi_{IV}}) \otimes |\hat{u}\rangle$$

- Effet du champ magnétique sur III

effet de B

$$|\psi\rangle \approx \rho^2\psi_{II} \otimes |\hat{u}\rangle + \rho\tau\psi_{III} \otimes [U|\hat{u}\rangle]$$

- Après le 3e séparateur

$$|\psi\rangle \approx \psi_{D1} \otimes [\rho^3|\hat{u}\rangle + \rho\tau^2 U|\hat{u}\rangle] + \\ + \psi_{D2} \otimes \rho^2\tau[|\hat{u}\rangle + U|\hat{u}\rangle]$$

néglige ce qui est perdu et paquet d'onde

- Détection indépendante du spin (comptage)

$$\Pr(Di,\psi) = \langle\psi|(|\psi_{Di}\rangle\langle\psi_{Di}| \otimes I_{spin})|\psi\rangle$$

Discussion de la prédiction quantique

- Dans le but de rendre l'argument le plus manifeste possible, on se place dans le cas de la rotation 2π, et on pose (R=T=1/2):

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \rho = \frac{i}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{|\psi\rangle \approx \psi_{D1} \otimes [|\hat{u}\rangle - U|\hat{u}\rangle] + \psi_{D2} \otimes [|\hat{u}\rangle + U|\hat{u}\rangle]}$$

- Si le champ est absent, U=I et donc sur le chemin menant à D1 on a interférence destructive; I.e., tous les neutrons sont détectés en D2.
- Si le champ est présent, U=-I et par le même argument tous les neutrons sont détectés en D1.

classique

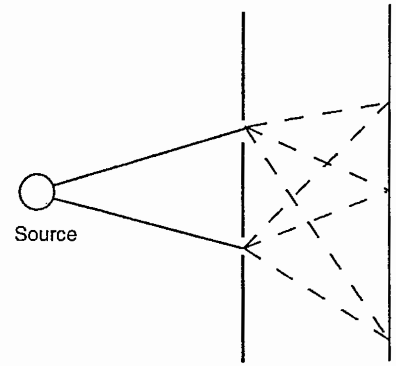
⇒Clair conflit entre la prédiction du neutron localisé (« rien ne doit changer ») et la prédiction quantique, confirmée par l'expérience!

Quelques conclusions sur la superposition

- Nous savions (Stern-Gerlach) que, pour une même préparation de l'état, le résultat d'une expérience peut ne pas être certain.
- Nous savons maintenant de plus que: si une particule peut prendre plusieurs chemins pour arriver au détecteur, il suffit de modifier un chemin pour influencer chaque particule; i.e., toute particule « prend connaissance » de tous les chemins.
- Remarquons une fois de plus que la différence quantique - classique réside dans la description du système, non pas dans son évolution.

Les fentes de Young:

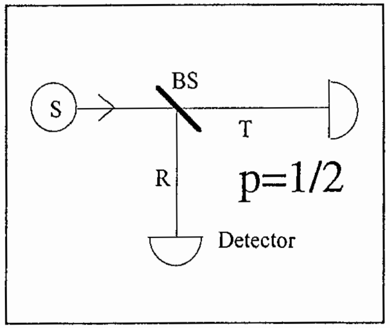
expérience « idéale » pour aborder la physique quantique ???

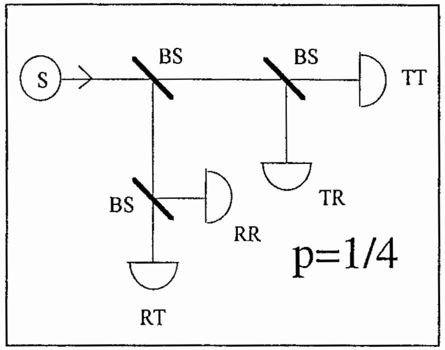


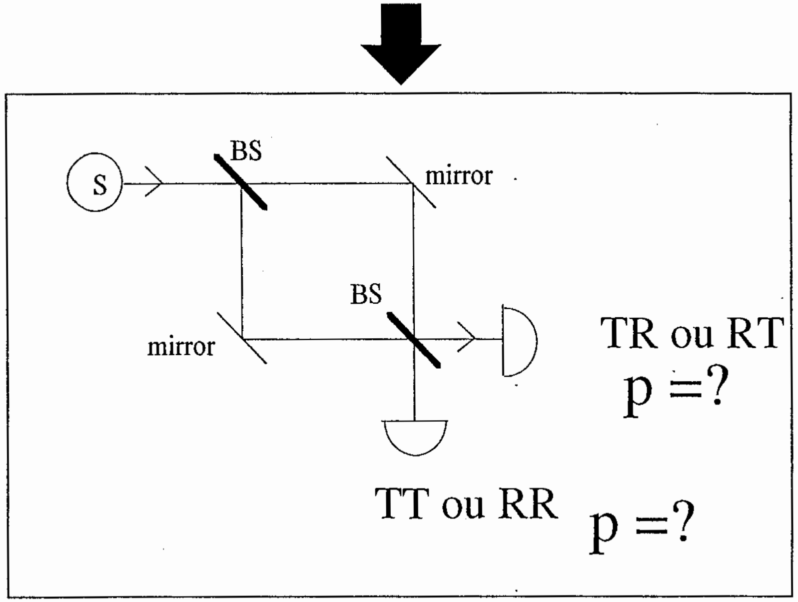
Naturellement, le principe est le même; mais pour une première présentation de la MQ:

- Ici on a un continuum de détecteurs au lieu de deux;
- Difficile de décrire une influence localisée dans l'espace;
- Et surtout: risque de confusion avec les champs classiques: LES INTERFERENCES DES COURS DE PHYSIQUE GENERALE NE SONT PAS DES INTERFERENCES D'ETATS QUANTIQUES!

Faites vos jeux!





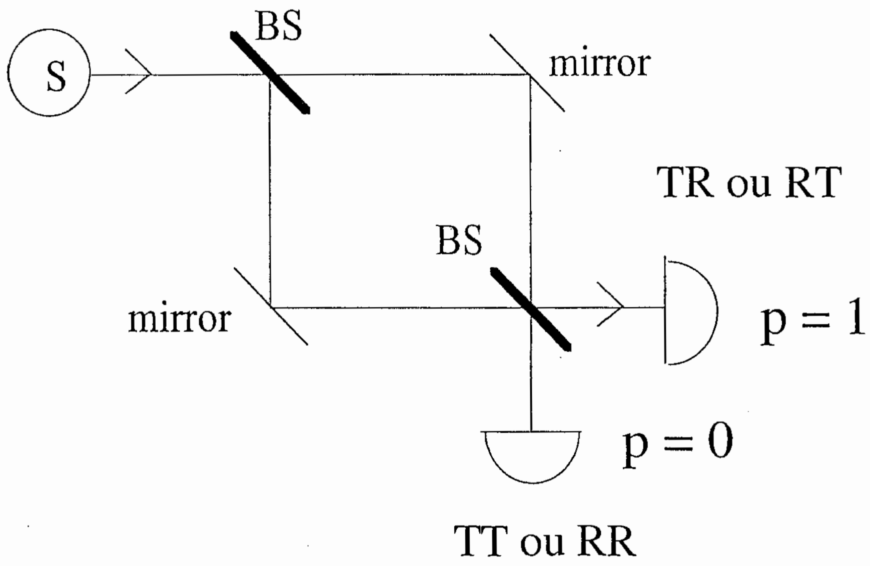


- Une seule particule à la fois dans le montage
- Le OU est dangéreux en physique quantique...

Rien ne va plus: Interférences!

« Le commencement de la réfléxion philosophique, pour les hommes d'aujourd'hui comme pour ceux d'antan, a été l'étonnement »

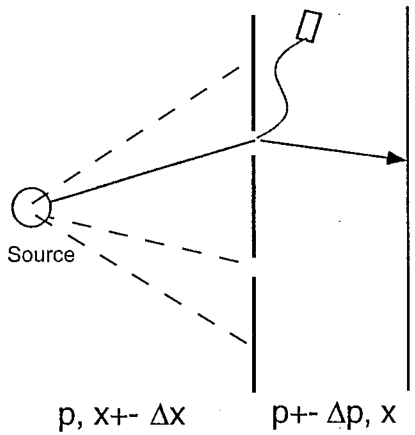
Aristote, *Métaphysique*



La superposition est réalisée par l'indiscernabilité

Le « microscope d'Heisenberg »

- W. Heisenberg, Les principes physiques de la théorie des quanta, Gautiers-Villars, Paris 1957
- Cf. aussi réf. 1 et 2 dans Dürr et al.

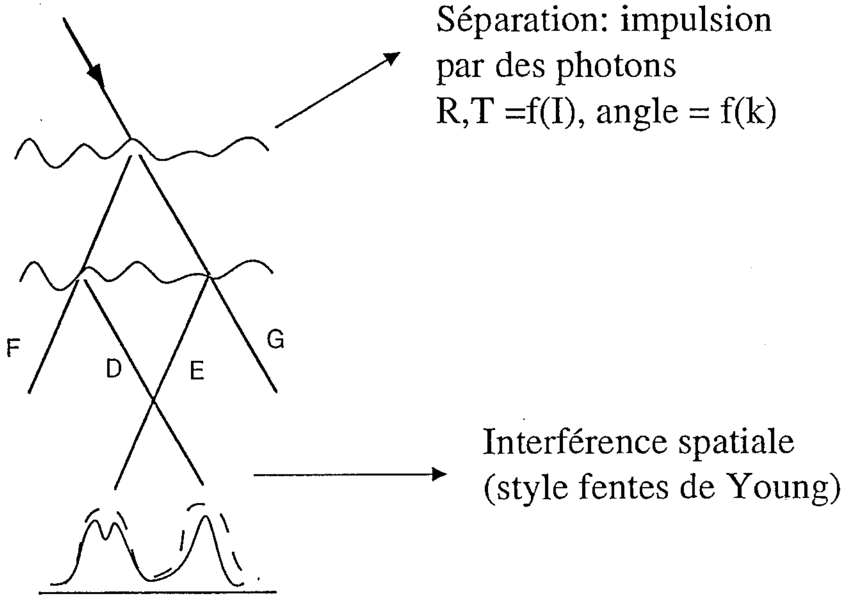


◆ « A la source, p est déterminé donc on ne peut pas mesurer x »

◆ « Si on détecte avec un photon, le photon perturbe p, donc x devient plus précis »

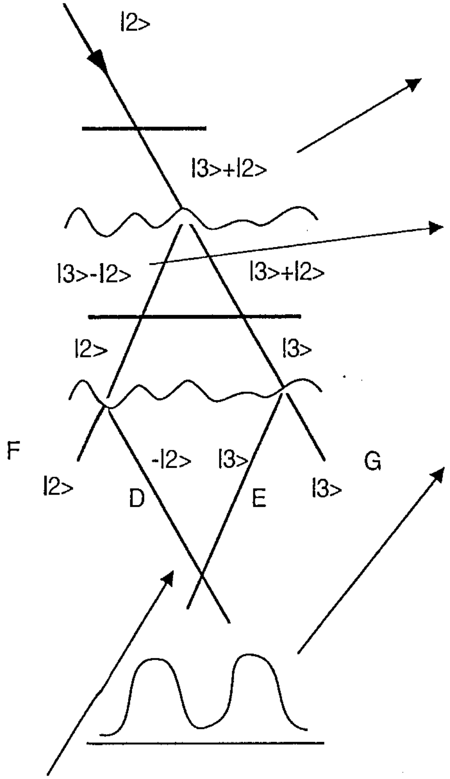
➡ Les interférences sont perdues grâce au « principe d'incertitude »

Interféromètre d'atomes (Dürr et al., 1998) (I) expérience de base



$$\langle\psi|\psi\rangle \approx |\psi_D(z)|^2 + |\psi_E(z)|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(\psi_D(z)^* \psi_E(z)\right)$$

Interféromètre d'atomes (Dürr et al., 1998) (II) expérience modifiée



On influence les états internes de l'atome

Dans l 'interaction avec le photon, l'état |2> change de signe si réfléxion, alors que |3> est inchangé

L'interférence a disparu, car l'état interne porte l'information sur le chemin (et NON PAS par un échange d'impulsion qui localise l'atome par le principe d'incertitude)

$$|\psi\rangle \approx -\psi_D(z)\otimes|2\rangle + \psi_E(z)\otimes|3\rangle \quad \Longrightarrow$$

$$\langle\psi|\psi\rangle \approx |\psi_D(z)|^2 + |\psi_E(z)|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\langle\psi_E|\psi_D\rangle\underbrace{\langle 3|2\rangle}_{=0})$$

Bibliographie indicative

- Interférométrie de neutrons

Rauch, HPA 61 (1988) 589-610, and ref. therein
Greenberger, Rev.Mod.Phys. 55 (1983) 875-905
Aerts, Reignier, HPA 64 (1991) 527-547

- Avec d'autres particules (photons, électrons...)

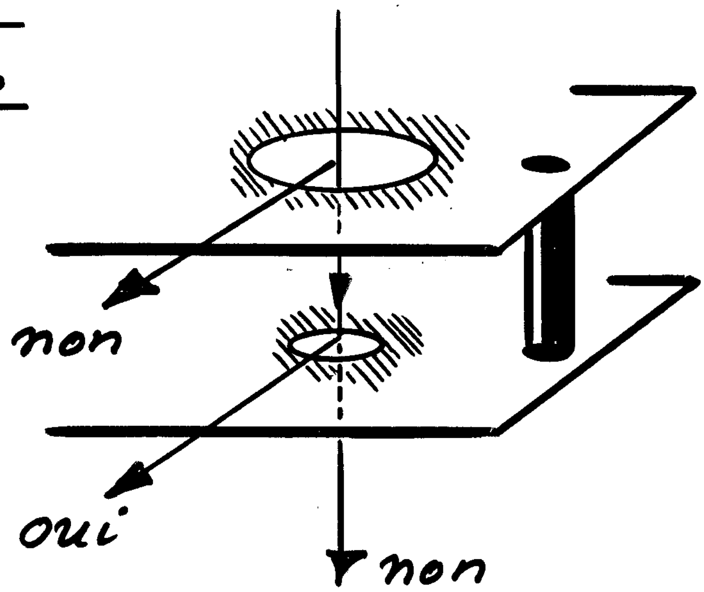
Grangier et al., Europh.Lett 1 (1986) 173-179 [ph]
Hellmuth et al., PRA 35 (1986) 2532-2541 [ph]
Buks et al., Nature 391 (1998) 871-874 [él]
Dürr et al., Nature 395 (1998) 33-37 [atomes]
Bonadeo et al., Science 282 (1998) 1473-1476 [excitons dans quantum dots]

- Didactique

Basdevant, Problèmes de mécanique quantique, Ellipses éd.; exercice 13 (interf. neutrons)
Scarani, Suarez, Am.J.Phys. 66 (1998) 718-721

Nouvelle question

f



$$e^{\sim} \text{ "vraie" et } m^{\sim} \text{ "vraie"} \iff f \text{ "vraie"}$$

$$e \text{ "vraie"} \Rightarrow f^{\sim} \text{ "vraie"}$$

$$m \text{ "vraie"} \Rightarrow f^{\sim} \text{ "vraie"}$$

$$e < f^{\sim} \qquad m < f^{\sim}$$

f est classique

$\boxed{f \text{ ainsi définie n'est pas classique}}$

En effet

f non "vraie"

$\Rightarrow$ e "vraie" et/ou m "vraie"

Mais

e "vraie" et m "vraie" IMPOSSIBLE

Par conséquent

$$\boxed{f^{\sim} = (e^{\sim} \cdot m^{\sim})^{\sim} = e \cdot m \in \sigma}$$

$\Rightarrow$ Chercher dans la classe d'équivalence de f une autre question qui est classique