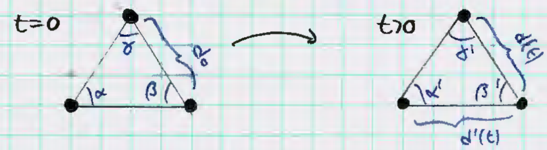
1999 Summer Student lecture programme : Introduction to cosmology (A. Cohen) ; K7 : Patrick Mayor

Introduction : distances : STARS : ~ 1 PC (Parsec) = 3,2615 light years $\simeq 3.1 \cdot 10^{18}$ cm (dist. entre 2 étoiles)
grand de [ GALAXIES : ~ 10-20 KPC
" [ CLUSTERS : ~ 1 MPC
SUPER CLUSTERS : ~ 50 MPC
: homogène
– plus grandes distance observée : ~ 3'000 MPC → univers assez homogène à cette échelle

Modèle : – fluide cosmique défini par $\{\rho ; p\}$ = {densité, pression}, t.q. – homogène ($\rho = $ cte $\forall \underline{x}$)
– isotrope ($\hat{m}$ propriétés $\forall$ directions)

Définition : – principe cosmologique : – sur des échelles spatiales suffisament grandes, l'univers est homogène et isotrope

Application : – question : $\exists$? des mvts à grande échelle du fluide cosmique ? (mouvement global) → oui : possible




– isotropie $\Rightarrow$ $\nexists$ direction préférentielle $\Rightarrow$ $\alpha = \alpha' ; \beta = \beta' ; \gamma = \gamma'$

$\Rightarrow \boxed{d(t) = d_0 \cdot \frac{R(t)}{R_0}}$

$\Rightarrow$ d(t) = le même $\forall$ distance entre tous les points
$d'(t) = d(t)$

– homogénéité : on peut prendre n'importe quel $d'(t)$ $\Rightarrow$ $R(t)$ = cte $\forall x \in$ univers
– $R(t)$ = facteur d'échelle cosmique

Question : – est-ce que l'univers bouge réellement ? OUI, à cause du décalage vers le rouge (effet Doppler) $\Rightarrow$ l'univers est en expansion.

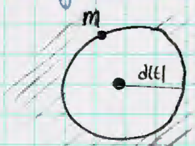
Modèle : – vitesse d'éloignement : $\boxed{v = \dot{d} = d_0 \cdot \frac{\dot{R}}{R_0} = d_0 \frac{R}{R_0} \cdot \underbrace{\frac{\dot{R}}{R}}_{:= H} = d \cdot H(t)}$ , $H(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}$

$:= H$ : paramètre de Hubble

$\Rightarrow$ plus c'est loin, plus ça va vite
$\Rightarrow$ en accord avec expérience où on a un décalage vers le rouge linéaire

$\boxed{H_0 = \text{constante de Hubbel } (H_0 = H(t=\text{now})) = 75 \ \frac{km}{s} \cdot \frac{1}{MPc}} \simeq \frac{1}{13 \cdot 10^9 \text{ ans}}$

Question : $H = H(t)$, que vaut $H$ en fct. du temps ? → système dynamique : échelles de ~ 50 MPC : quelles forces agissent ?
– force faible / forte : distance d'action trop faible → négligé
– Force E.M. : bcp. ⊕ fort que gravitation, mais l'état d'éq. est t.q. tout est neutre, surtout à grde échelle → négligé.
– force gravitation : non négligeable ; grande sphère t.q. principe cosmologique applicable ; pas de forces dues à l'ext. de la sphère. Energie :




$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{d}^2 - \frac{G_N \cdot m \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi d^3}{d} = \text{Cte} \quad , \ d = d_0 \cdot \frac{R(t)}{R_0}$$

$$\dot{d} = d \cdot H(t)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cancel{m} \underbrace{d^2}_{= \left(d_0 \cdot \frac{R}{R_0}\right)^2} \cdot H^2 - G_N \cdot \cancel{m} \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \cancel{d_0^3} \cdot \frac{R^2}{\cancel{R_0^2}} = \text{cte}$$

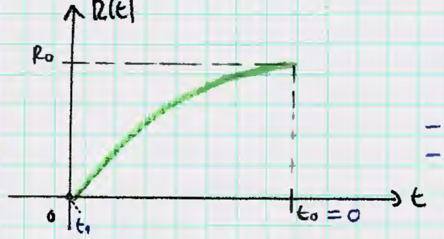
$$\Rightarrow \boxed{R^2 \cdot \left(H^2 - \frac{8\pi}{3} G_N \cdot \rho\right) = \text{cte}} \quad , \ H_0 = 75 \ \frac{km}{s} \cdot \frac{1}{MPc} , \ \rho \cong 10^{-29} \ gm/cm^3$$

– mesure expérimentale : connaît $H, \rho$ aujourd'hui $\Rightarrow$ $\boxed{\text{cte} \sim 0}$

$$\Rightarrow \boxed{H^2 = \frac{8}{3}\pi G_N \cdot \rho} \ (1) \quad , \ \rho = \rho(t) = ?$$

– il faut trouver un modèle pour $\rho = \rho(t)$ $\Rightarrow$ $\rho(t) = \rho_0 \left(\frac{R_0}{R(t)}\right)^3 \sim 1/V$ $\Rightarrow$

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8}{3}\pi \cdot G_N \cdot \rho_0 \ \frac{R^3_0}{R_0} \Rightarrow \boxed{R(t) = R_0 \cdot \left(1 + \frac{3}{2} H_0 (t - t_0)\right)^{2/3}}$$




$$R(t_1) = 0 \Rightarrow t_1 = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{H_0} \sim 10^{10} \text{ années} \quad \text{(Big Bang)}$$

– Expérimentalement : objets $\lesssim 10^{10}$ années → ok, première validité
– approximation : $\rho = \rho_0 \cdot (R/R_0)^3$ pas tout à fait bonne

$\rho_m = \frac{\rho}{c^2}$ ← dens. énergie

Remarque : $v = d \cdot H(t)$ → $v \sim c$ → trop grand ! : erreur → relativité : $E = M \cdot c^2$ ; densité énergie : $\rho/c^2 \leftarrow \rho_m$ (à cause de $E = mc^2$). Conservation de l'énergie (1è loi de la thermo.) :
densité d'énergie

$du = -p dV$ ; $V \propto R^3(t)$

$u = \rho \cdot V = \rho \cdot R^3$ $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{d}{dt}(\rho R^3) = -p \frac{dR^3}{dt}}$ (2)

→ 2 éqn. ; 3 inconnues ($R, P, \rho$) . Troisième éqn: équation d'état : $\rho(P)$ (3)
⇒ équations de FRIEDMAN

Exercice: – refait l'exercice précédent avec les 3 équations : galaxies qui n'intéragissent pas : (3) : $\boxed{p = 0}$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(\rho R^3) = 0 \quad \rightarrow \rho \sim \frac{1}{R^3}$$ : résultat précédent $\rho \sim t^{2/3}$

⇒ hyp. de non interaction des galaxies = trop simpliste → nvlle éqn. (3).
→ modèle de radiation : $R \to 0$ ⇒ la matière entre en collision et ∃ de la radiation
⇒ modèle du corps noir

$$\nu \propto \frac{1}{e^{E/kT} - 1}$$ , T : temp. de radiation

– énergie pour arracher les ē des atomes ≅ énergie de liaison ≃ 1 eV $= k_B \cdot T$ ⇒ $T \sim 3'000$ [k]
→ à cette température, la matière est ionique et produit un rayonnement du corps noir
→ question : à quoi ressemble cette radiation aujourd'hui ? → radiation découplée de la matière et donc disperse
– expansion de l'univers : quelle est l'énergie (densité) de l'univers ?

$$\rho = \sigma \cdot T^4 \qquad \text{(Stephen-Boltzmann)}$$

$$(3) \quad p = \frac{1}{3}\rho \qquad \text{(Maxwell)}$$

$$(2) \quad \frac{d}{dt}(\rho R^3) = -p \frac{d}{dt} R^3 = -\frac{1}{3}\rho \frac{d}{dt} R^3$$

$$\Rightarrow \rho \sim \frac{1}{R^4}$$

$$\Rightarrow \sigma \cdot T^4 \sim \frac{1}{R^4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T \sim \frac{1}{R}}$$ "cosmic redshift"

⇒ la température de la radiation de l'univers diminue avec l'expansion de l'univers
– en 1960 : Penzias & Wilson : $\boxed{T \sim 2.7\ K}$ bruit de fond cosmique (CDR)

⇒ l'univers s'est étendu d'un facteur 1'100 depuis $T = 3'000$ k (radiation) ⇒ volume ~ 1 milliard plus grand.
⇒ quand l'univers avait une température de 3'000 k ?

$$\frac{R(3'000\ k)}{R(2.7\ k)} = \frac{1}{1'100} = \left(\frac{t_{3'000}}{t_{2.7}}\right)^{2/3} \Rightarrow \boxed{t_{3000} = 200'000\ [k]}$$

⇒ il y a ~~seulement~~ 200'000 ans avant le Big-Bang, l'univers était à $T = 3'000$ k !
– énergie par les nucléons ? ~ 0.1 MeV → T = ... → t = ...

$$\triangle : \left.\begin{array}{l} \rho_m \sim 1/R^3 \\ \rho_\gamma \sim 1/R^4 \end{array}\right\} \exists t \text{ t.q. } \rho_\gamma \gg \gamma_m$$ : énergie de radiation ≫ énergie massique

$$\rho_m = \rho_\gamma \Rightarrow \frac{R}{R_{today}} \simeq \frac{1}{10'000} \Rightarrow t \simeq 5'000$$ an après Big-Bang

→ lorsque la radiation domine : $R \sim T^{1/2}$ ∀ t ≤ 5'000 av. Big-Bang
$t \cong 200$ sec. après le Big-Bang

– ∄ liaisons entre p, n ∀ t ≲ 200 sec.
– nucléosynthèse : ~ 75% p, n → H ; ~ 25% p, n → $He^4$ ; et : un peu de Li, $He^3$, ... } ce que on observe effectivement dans l'univers

– avant 200 sec ? $e^-$ et $e^+$ : positrons : $T \sim 1$ MeV : $e^+e^- \to \gamma\gamma$ ; t ~ qqes secondes
$T \sim 200$ MeV : quarks + gluons : plasma quark-gluons : $t \sim 10^{-3}$ sec.
$T \sim 100$ GeV : transition électron faible (trans. phase) : $t \sim 10^{-10}$ sec. ] LHC
?? inconnu après : nouvelle physique

→ univers à $t \sim 0$ ≡ grand accélérateur

Remarque : – spéculations : pour $T \gtrsim 100$ GeV. On avait vu : $H^2 - \frac{8}{3}\pi G_N \cdot \frac{\rho}{c^2} = -\frac{k}{R^2}$ , k = 0 ± ? → chgt. notation :

$$\Omega(t) := \frac{8}{3}\pi \frac{G_N}{c^2} \rho / H^2 \Rightarrow \boxed{\Omega - 1 = -\frac{k}{H^2 R^2}}$$

– aujourd'hui : $\Omega = 1$ ; $\Omega_0 = 1 \pm \ldots$ , aujourd'hui : $0.02 \le \Omega_0 \lesssim 2$
↑ $10^{-19}$ gm/cm³

$H^2 R^2 = \dot{R}^2$

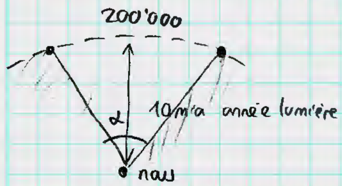
– univers dominé par de la matière → $R \propto t^{2/3}$ → $H^2 R^2 \propto t^{-2/3}$
→ t ↑ ⇒ $H^2R^2$ ↓ ⇒ $-\frac{k}{H^2R^2}$ ↑ ⇒ Ω s'éloigne de 1

– univers dominé par de la radiation → $R \propto t^{1/2}$ → $H^2R^2 \propto t^{-1}$ ⇒ Ω était bcp. plus proche de 1 dans passé
– que ce qu'il se passe si $\Omega_0 = 0.02$ ? à la nucléosynthèse :
$$\Omega(t_{nucl.}) - 1 \sim 10^{-12}$$

→ pourquoi aujourd'hui c'est plus $10^{-12}$ ? → explications :
i) C.I. très étranges t.q. on a $0.02 \le \Omega_0$ aujourd'hui uniq. → pas bon.
ii) ???

- $n = 10^{-19}\ gm/cm^3$ ≡ matière que l'on voit ⟹ $\Omega_0 \simeq 0.02$
- et la matière que l'on ne voit pas ? Matière noire ⟹ $\Omega_0 = 1$. C'est quoi cette matière noire ? C'est qqch de nouveau ⟶ nvlles particules ⟶ physique des particules (LHC)

Question : - ce qui a été fait est correct du point de vue du principe cosmologique, est-ce que ce principe est correct ?
- mesures : - homogénéité : à grande échelle, mais pas parfaitement ; était-ce vrai dans le passé ?
- mesure précise : - pour $T \cong 3'000\,K$, les photons de radiations n'ont pas interagi depuis ~ 10 mia. d'années : le bruit de fond ≡ photographie de ce à quoi la matière ressemblait à $t = 200'000$ ans
⟶ image de l'univers à ~ 10 mia. d'années avant.
⟶ isotropie et homogénéité ? rayonnement du bruit de fond est-il de même intensité et température ∀ directions dans l'espace ? Contrainte de causalité :




$$\frac{200'000}{10\ mia} \cdot 1'100 = 1\ deg.$$

⟹ $\alpha = 1$ deg ⟹ matière avec $\Delta\alpha > 1$ deg n'a pas intéragit entre elle
⟹ T doit varier pour $\alpha > 1$ deg.

⟶ expérimentalement : COBE : $\frac{\delta T}{T} < 10^{-5}$ $\quad \forall \Delta\alpha > 1$

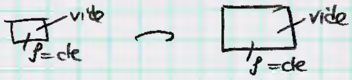
⟹ 2 régions qui n'ont pas intéragit ont la même température : INEXPLICABLE
⟶ principe cosmologique OK.

Explication : - i) C.I. bizzares
ii) ??
⟶ réponse : INFLATION : 1) $\Omega = 1 \Rightarrow \Omega = 1\ \forall t$
2) $\frac{\delta T}{T} \leq 10^{-5}$

- c'est quoi l'inflation ? $\Omega - 1 = \underbrace{\frac{k}{H^2 R^2}}_{=\varepsilon(t)}$, $\varepsilon(t\sim 0) = $ grand
$\varepsilon(t \to \infty) = 0 \equiv$ inflation

⟶ comment est-ce que on peut faire que $H^2 \cdot R^2 \uparrow$ avec $t$ ? (≡ inflation)
- si c'est le cas, alors $\Omega \to 1$ et l'univers s'étend, plus vite que ce que on pensait ⟶ $\alpha \gg 1$ deg.

- comment faire pour que $H^2 R^2 \uparrow$ ? ⟹ il faut une équation d'état avec pression < 0 ou $\rho$énergie < 0 ↯
⟹ peut-on faire de la pression négative ? Le vide a une pression négative, et une énergie $\rho > 0$




$\frac{d\rho_{énergie}}{dt} = 0$ avec expansion de l'univers
⟹ $\rho = -p$ (éqn. état pour le vide)

⟹ qu'est-ce qui se passe avec les éqn. Friedman avec $\rho = cte|_t$, $p < 0$ ?

$R(t) = e^{Ht}$, $Ht = 60$ ⟹ $\Omega = 1$ très rapidement
⟹ parfait pour expliquer que $\Omega = 1$ aujourd'hui (ok si ∃ matière noire)

- monopôles magnétiques : produits bcp. au début de l'univers, où maintenant ? monopôles = masse ⟹
$\rho_m \sim \frac{1}{R^3}$

- comment stopper l'inflation ? ⟶ changer l'équation d'état : TRANSITION DE PHASE, or tous les changements $t = \ldots$ 100 GeV, … etc. correspondent à des transitions de phase.
⟶ fluct. de temp. quantiques prédisent $\frac{\delta T}{T} \sim 10^{-5}$

- énergie du vide ≡ constante cosmologique (Einstein : il a dit que c'était la plus grde erreur de sa vie)
⟶ = 0 aujourd'hui, on a besoin de cette cte pour que ∃ inflation, mais cette cte = 0 aujourd'hui

**Plan**: relativité (restreinte/générale) et Cosmologie
1. Introduction : Galilée → Newton → Einstein (train)
   Newton → Mach → Einstein (ascenceur)
2. Relativité restreinte : - physique sans gravitation
   - référentiels d'Inertie, coordonnées cartésiennes } - point matériel
   - systèmes de pt. mat
   - thermodynamique
   - électromagnétisme
   - fluides
3. Relativité générale : - physique en présence de gravitation
   ⇒ physique sur un espace Riemanien (coordonnées arbitraires sans gravitation p.ex.)
4. Applications à la cosmologie

**Référence**: Weinberg S. (1972) : Gravitation + Cosmology (ardu) (Plagiat : Elbaz)

## §1. Introduction

**Mécanique de Newton**: - référentiel (mètre + horloge)
- l'instant $t$ ; point coïncidant avec l'événement → système de coordonnées } $\mathcal{E} \longmapsto \mathbb{R}^4 \ni (t_E, x^1_E, x^2_E, x^3_E)$, $\mathcal{E} \ni E$ (espace des événements)

- **1ᵉ loi de Newton** : si $\overline{F} = 0$ (force) $\Rightarrow v(t) = v(0) \quad \forall t$ : définition du réf. d'inertie (m.r.u)
- **2ᵉ loi de Newton** : $m \cdot \frac{dv}{dt} = \overline{F}$ (masse d'inertie)

- réf. inertie : réf. par rapport auquel espace homogène et isotrope, temps homogène.
- **3ᵉ loi de Newton** : action-réaction : pour 2 pts matériels isolés du reste de l'univers :

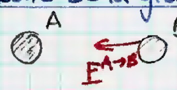
$$\sum_{i=1}^{2} m_i \cdot v_i = cte$$

⇒ théorie de la gravitation :

$$\underline{F}_{A\to B} = -G \cdot m^*_A \cdot m^{**}_B \cdot \frac{\overline{x}_B - \overline{x}_A}{\|x_B - x_A\|}$$

($m^*$ : masse gravifique active ; $m^{**}$ : masse gravifique passive) (le corps A attire B)

corps sphériques homogènes



⇒ principe d'équivalence : $\boxed{m^* = m^{**} = m}$ vérifié à $10^{-11}$ actuellement

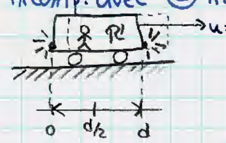
(- principe d'objectivité : les lois de la mécanique sont les mêmes ∀ observateur en translation uniforme par rapport à un observateur.)

**Relativité de Galilée**: ① Axiome 1 : Non relativiste : - la simultanéité est un concept absolu
⇒ $\Delta t \equiv$ invariant
⇒ $\Delta \ell \equiv$ invariant } ∃ 2 invariants

② Principe relativité Galilée : i) ∃ réf. inertie
ii) $\mathcal{R}$ réf. inertie, alors tout $\mathcal{R}'$ en transl. uniforme par rapp. $\mathcal{R}$ l'est aussi.
iii) les lois de la ~~mécanique~~ physique sont invariantes par rapp. au chgt. réf. inertie

**Electrodynamique** : ③ Loi de propagation de la lumière : dans le vide, $c = cte \quad \forall x, t, \mathcal{R}$

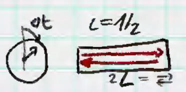
**Incompatibilité** : ① inc. avec ③, lois de Maxwell incomp. avec ② iii) ⇒ il faut en éliminer une : on modifie ①.
→ idée du train par Einstein




⇒ ∄ simultanéité entre $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$

**Paramétrisation des événements** $\mathcal{E} \to \mathbb{R}^4$, $E \mapsto (x^0_E, x^1_E, x^2_E, x^3_E)$ et on introduit les conditions :

- condition 1 : dans le vide, et relativement à un référentiel d'inertie, la vitesse de la lumière est une constante $c$, indép. de la direction, fréquence, du mvt. de la source



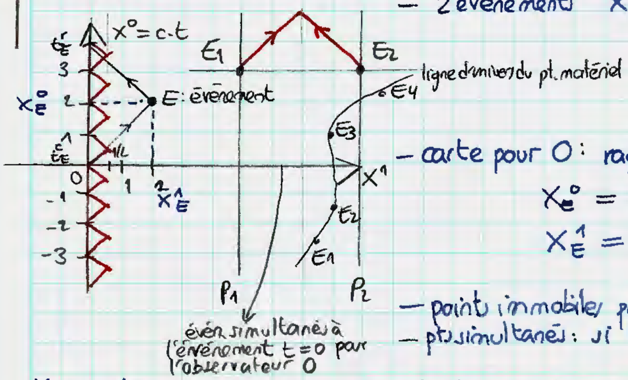

- paramétrisation : tube de lumière $L = 1/2$ : $t = \frac{n}{c}$, n : nb. aller-retour
- 2 événements $x^\alpha_A, x^\beta_B$ ⇒ $\frac{1}{\Delta t^2} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{3} (x^i_A - x^i_B)^2}_{\text{longueur}} = c^2$

⇒ $c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 = 0$, $x^0 = c \cdot \Delta t$

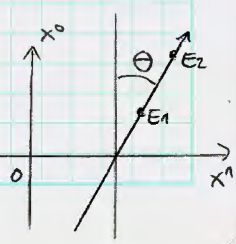
⇒ $\boxed{\Delta x^{0\,2} - \Delta x^2 = 0}$

- carte pour O : rayon lumineux = droite à 45°

$$x^0_E = c \cdot t_E = c \cdot \tfrac{1}{2}(t^e_E + t^r_E)$$
$$x^1_E = \pm c \cdot \tfrac{1}{2}(t^r_E - t^e_E)$$



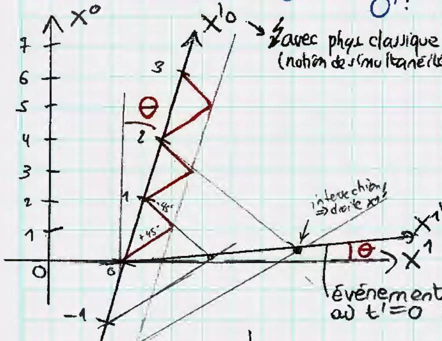

- points immobiles par rapport à O sont t.q. $c\Delta t = \Delta x^0 = cte$
- pts simultanés : si lumière arrive simult. au pt. milieu




**Mvt. rectiligne uniforme** : - mvt. d'un pt. matériel qui sur la carte est représenté par une droite

**Vitesse** : $\frac{v}{c} = \frac{\Delta x^1}{\Delta x^0} = \frac{\Delta x^1}{c \cdot \Delta t} \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg}\Theta = \frac{v}{c}}$

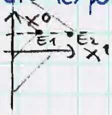
Transformation de Lorentz : $O : E \mapsto \{x^\alpha_E\}$ : référentiel d'inertie } relation ?
$O' : \searrow \{x'^\alpha_E\}$ : translation uniforme par rapport à $O$



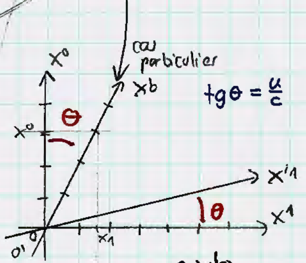

– $u$ = vitesse $O'/O$ ; $tg\theta = u/c$

– Condition 2 : homogénéité du temps : 2 intervalles de temps égaux par rapport à $O'$ sont égaux par rapport à $O$.

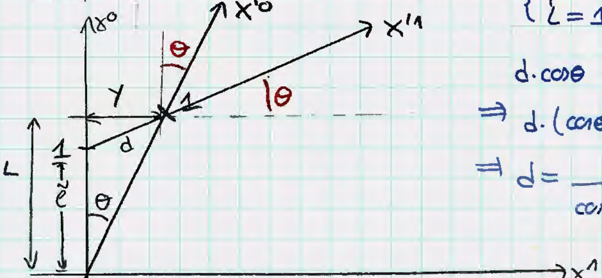
⇒ les // à $x'^0$ représentent les points immobiles par rapport à $O'$
⇒ simultanéité :



Conséquences : 1) $E : \to (x'^0 = c\cdot t', 0)$ par rapport à $R'$
$\searrow (x^0 = \gamma\cdot x^{0'},\ x^1 = \gamma\cdot \frac{u}{c} x'^0)$

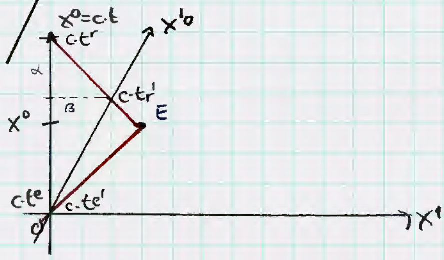



– Condition 3 : "synchronisation des horloges" : la durée de 1 sec de $R'$ mesurée par l'observateur $R$ est égale à la durée de 1 sec de $R$ mesurée par $R'$ (principe équiv. $R \leftrightarrow R'$)



$$\begin{cases} y = d\cdot\cos\theta = L\cdot tg\theta \\ L = 1 + d\cdot\sin\theta \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$ (p.22 polycopié)

$d\cdot\cos\theta = tg(\theta) + d\cdot\sin\theta\cdot tg\theta$
$\Rightarrow d\cdot(\cos\theta - \sin\theta\cdot tg\theta) = tg(\theta)$
$\Rightarrow d = \frac{tg(\theta)}{\cos\theta - \sin\theta\cdot tg\theta}$



– par rapport à $R'$ : $(c\cdot t'^e, 0)$
$(\gamma\cdot c\cdot t'^e,\ \gamma\cdot\frac{u}{c}\cdot x'^0)$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma\cdot c\cdot t'^e - c\cdot t^e}{\gamma\cdot u\cdot t'^e - 0} = 1 \quad\Rightarrow \begin{cases} t'^e = \frac{t^e}{\gamma\cdot(1-u/c)} \\ t'^r = \frac{t^r}{\gamma(1+u/c)} \end{cases}$$

– avec : $x'^0 = \frac{c}{2}\cdot(t'^e + t'^r)$ ; $x^0 + x^1 = c\cdot t^r$
$x'^1 = \pm\frac{c}{2}\cdot(t'^r - t'^e)$ ; $x^0 - x^1 = c\cdot t^e$

$E \mapsto (x^0, x^1)$ par rapport à $R$ ; $u = v)_{R'/R}$

$$x'^0 = \gamma(x^0 - u/c\cdot x^1)$$
$$x'^1 = \gamma(-u/c\, x^0 + x^1)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -u/c & 0 \\ -u/c & 1 & \\ \hline & 0 & \mathbb{1}_2 \end{array}\right)\cdot\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}} \quad \text{i.e.} \quad \boxed{X' = \Lambda(u)\cdot X}$$

et : $\left.\begin{array}{l} X = \Lambda(-u)\, X' \\ X = \Lambda(u)^{-1}\, X \end{array}\right\} \Rightarrow \Lambda(u)^{-1} = \Lambda(-u)$

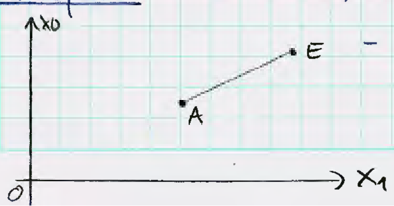
Définition : – paramètre rapidité : $\boxed{u/c = th(\eta)} = tg(\theta)$

$\Longrightarrow\ 1 - \frac{u^2}{c^2} = 1 - th^2(\eta) = 1/ch^2(\eta) = 1/\gamma^2 \quad\Rightarrow \gamma = ch(\eta)$

$$\Rightarrow \Lambda(\eta) = \left(\begin{array}{cc|c} ch(\eta) & -sh(\eta) & 0 \\ -sh(\eta) & ch(\eta) & \\ \hline & 0 & \mathbb{1}_2 \end{array}\right) \quad \text{t.q.} \quad \Lambda(\eta_1)\cdot\Lambda(\eta_2) = \Lambda(\eta_1 + \eta_2)$$

et : $\Lambda(0) = \mathbb{1} \Rightarrow \Lambda(\eta)\cdot\Lambda(-\eta) = \Lambda(0) = 0$
$\Rightarrow \Lambda^{-1}(\eta) = \Lambda(-\eta)$

Conséquence : $E \to x_E^\alpha$ ; $A \to x_A^\alpha$ ; on définit l'intervale $AE := \Delta X = \{\Delta x^\alpha = x_E^\alpha - x_A^\alpha\}$
$\Delta X' = \{\Delta x'^\alpha = x'^\alpha_E - x'^\alpha_A\}$



– Propriété de la transformation $X \to X' = \Lambda(u) X$ :

$$\boxed{(\Delta x'^0)^2 - \sum_{i=1}^{3}(\Delta x'^i)^2 = (\Delta x^0)^2 - \sum_{i=1}^{3}(\Delta x^i)^2}$$

INVARIANT (indép. du réf. d'inertie considéré)

1) vitesse c (univ...) 2) Intervalle relativiste

$$\Delta x\cdot\Delta y := -\Delta x^0\cdot\Delta y^0 + \sum_{i=1}^{3}\Delta x^i\cdot\Delta y^i \qquad \text{, i.e. } \langle a|b\rangle := a^t g b$$

$$= \eta_{\alpha\beta}\,\Delta x^\alpha\cdot\Delta x^\beta \qquad \eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_3 \end{pmatrix} \quad \forall \text{ réf. inertie}$$

tenseur métrique de la relativité restreinte

$$\Rightarrow \boxed{\Delta x\cdot\Delta y = \Delta x'\cdot\Delta y'}$$

Remarque: $\Delta x\cdot\Delta x = 0 \Rightarrow (\Delta x^0)^2 = (\Delta x^1)^2$ : A et E sont sur le cône de lumière

$\Rightarrow \Delta x'\cdot\Delta x' = 0 \Rightarrow (\Delta x'^0)^2 = (\Delta x'^1)^2$ : m. chose dans R'

- Etant donné A, on définit le cône de lumière $\mathcal{C}_A = \{E \text{ t.q. } \Delta x\cdot\Delta x = 0\}$
- supposons que: $\Delta x\cdot\Delta x < 0 \Rightarrow \Delta x'\Delta x' < 0$

$$\Rightarrow c^2\Delta\tau^2 := -\Delta x\cdot\Delta x = (\Delta x^0)^2 - \sum_{i=1}^{3}(\Delta x^i)^2 = -\eta_{\alpha\beta}\Delta x^\alpha\Delta x^\beta$$

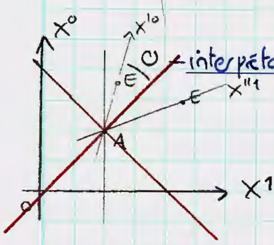
$\Rightarrow$ à l'intérieur du cône de lumière

- on définit le futur de l'événement A : $\mathcal{F}_A = \{E \text{ t.q. } \Delta x\cdot\Delta x < 0 \,,\, \Delta x^0 > 0\}$
- " passé de l'événement A : $\mathcal{P}_A = \{E \text{ t.q. } \Delta x\cdot\Delta x < 0 \,,\, \Delta x^0 < 0\}$
- " ailleurs de l'événement A : $\{E \text{ t.q. } \Delta x\cdot\Delta x > 0\}$

Définition: - intervalle de temps propre entre A et E: $c\Delta\tau := \text{sign}(\Delta x^0)\cdot\sqrt{\Delta x^{0\,2} - \Delta \vec{x}^{\,2}}$

Remarque: - int. temps propre: - si E est dans l'ailleurs de A : $-(\Delta x^0)^2 + \Delta x^2 = \Delta e^2$

$$\Delta e = +\sqrt{-\Delta x^{0\,2} + \Delta x^2}$$




- interprétation: - si $E \in \mathcal{F}_A$, $\exists R'$ t.q. A et E soient au même endroit : $u/c = tg\,\theta$
- dans R' : $x'^i_E = x'^i_A$, $i=1,\dots,3$, et: $c^2\cdot\Delta\tau^2 = (x'^0_E - x'^0_A)^2 - 0 = c^2\cdot(t'_E - t'_A)^2$

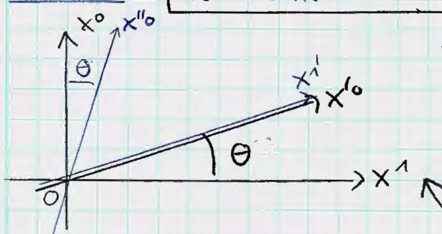
$\Rightarrow \Delta\tau$ = "intervalle de temps" mesuré dans R'

- si E ∈ ailleurs de A ∃ R'' t.q. A et E sont simultanés

$$\Delta x''^0 = x''^0_E - x''^0_A = 0 \Rightarrow \Delta e^2 = \Delta x^2$$

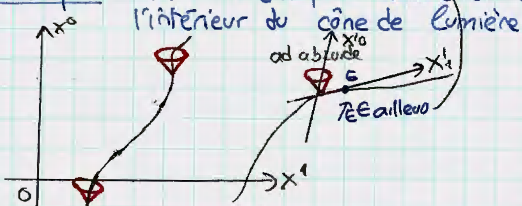
$\Rightarrow \Delta e$ = "distance entre les événements" mesuré dans R''

Théorème: $\boxed{u = V_{R'}|_R < c}$ $\boxed{V_{R'}|_R = c\cdot th(\eta)}$



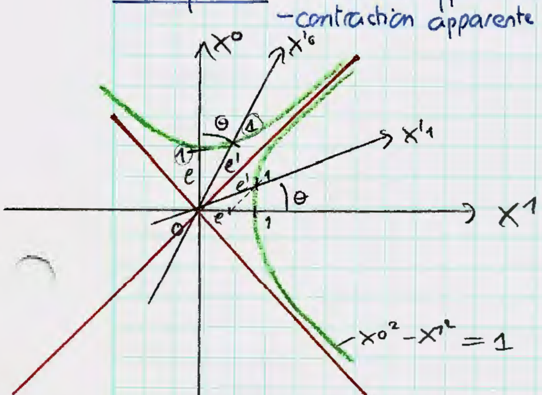

$\Rightarrow$ en $t=0$, l'observateur en R'' voit celui en R' "partout", puis il disparaît.

Remarque: - vitesse v d'un point matériel est toujours $\leq c \Rightarrow$ en chaque point la ligne d'univers est à l'intérieur du cône de lumière.



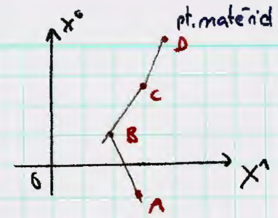

Conséquences: - dilatation apparente du temps
- contraction apparente des longueurs

| | R | | R' |
|---|---|---|---|
| temps: | t | < | t' |
| distances: | e | < | e' |




$$\lim_{\theta\to\pi/2} \Rightarrow e' \to \infty$$

$\Longrightarrow$ dans R on verra la longueur $\longrightarrow 0$




Temps propre de 1 pt. matériel :

$$c^2 . d\tau^2 = dx^2 \Rightarrow d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{(dx_0)^2 - (d\vec{x})^2} = dt\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2}$$

$\Uparrow \Delta s' = \Delta s$

$$\Rightarrow \boxed{\tau_B = \tau_A + \int_{t_A}^{t_B} dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2}}$$

## §2. Relativité restreinte

Hyp. : – pas de gravitation
– référentiel d'inertie
– coordonnées cartésiennes

$$\mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}^4$$
$$E \longmapsto x_E = (x_E^\alpha) = (x_E^0, \vec{x}_E) \quad ; \quad [x_\alpha] : \text{unités de longueur } \forall \alpha = 0,\dots,3$$

$$\Delta x = (x_E^\alpha - x_A^\alpha = \Delta x^\alpha) \quad \text{t.q.} \quad \|\Delta \vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (\Delta x^i)^2}$$

$|\Delta x^0| = c.$ "temps pour effectuer une distance $|\Delta x^0|$"

$\alpha = 0,1,2,3$
$i = 1,2,3$

Notations : • $\frac{\partial^2}{\partial x^{\alpha 2}} = \partial_\alpha^2$ ; $\frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \partial_\alpha$

$\frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = \partial^2_{\alpha\beta}$

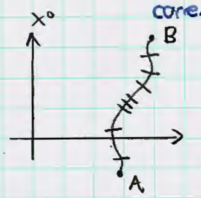
• produit scalaire : défini sur les intervalles :

$$\Delta x \cdot \Delta y = -\Delta x^0 \Delta y^0 + \sum_{i=1}^{3} \Delta x^i \Delta y^i = -\Delta x^0 \Delta y^0 + \Delta\vec{x} \cdot \Delta\vec{y}$$
$$= \eta_{\alpha\beta} \Delta x^\alpha \Delta y^\beta$$

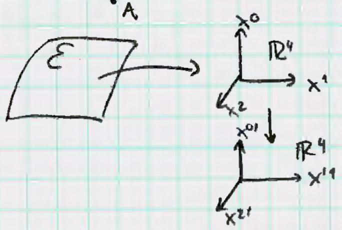
$$\eta_{\alpha\beta} = \left(\begin{array}{c|c} -1 & 0 \\ \hline 0 & I_3 \end{array}\right) \quad : \text{tenseur métrique de la relativité restreinte}$$

$$\Delta x \cdot \Delta x = \eta_{\alpha\beta} \Delta x^\alpha \Delta x^\beta = \begin{cases} 0 & : \text{cône de lumière} \\ -c^2 \Delta\tau^2 & : \text{si } < 0 \\ \Delta \ell^2 & : \text{si } > 0 \end{cases}$$

Temps propre : – temps mesuré par l'horloge en mouvement qui se déplace, par rapport à l'immobile. $\exists$ horloges idéales t.q. $\forall$ mouvement, cette horloge mesure le temps propre. ($\exists$ horloges idéales t.q. les "tics" des horloges correspondent à ceux du temps propre.) – Justification : décomposition de la trajectoire en segments droits.




⟶ quelles sont toutes les transf. qui laissent invariant l'intervalle de temps propre entre A et B.
⟶ aboutit à la déf. générale de la transformation de Lorentz




$$\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$
$$x = (x^\alpha) \longmapsto x' = \{ x'^\alpha (x^0, x^1, x^2, x^3) \}$$

t.q. i) transformation $\in C^2$ : $x'^\alpha = x'^\alpha(x^0, \dots, x^3) \in C^2$

$\left\{\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}\right\}$ possède un inverse ⟶ localement la transformation existe

$$\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma} \cdot \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\beta} = \delta^\alpha_\beta$$
$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\gamma} \cdot \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\beta} = \delta^\alpha_\beta$$

ii) laisse la forme quadratique $\boxed{\eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = (dx)^2}$ invariant

Calcul : • $\eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = \eta_{\alpha'\beta'} dx'^\alpha dx'^\beta$ (à imposer)

• $\eta_{\alpha\beta} dx'^\alpha dx'^\beta = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma} \cdot \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\delta} \cdot dx^\gamma dx^\delta \overset{\text{ii)}}{=} \eta_{\gamma\delta} dx^\gamma dx^\delta \qquad \forall (dx^0, \dots, dx^3)$

$$\Rightarrow \boxed{\eta_{\gamma\delta} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\delta} \eta_{\alpha\beta}} \quad (1) \quad \cdot \frac{\partial}{\partial x^\varepsilon}$$

(1) $\Rightarrow 0 = \eta_{\alpha\beta} \cdot \left[ \frac{\partial x'^{\alpha 2}}{\partial x^\varepsilon \partial x^\gamma} \cdot \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\delta} + \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma} \cdot \frac{\partial^2 x'^\beta}{\partial x^\varepsilon \partial x^\delta} \right]$ , $\gamma \leftrightarrow \varepsilon$

(2) $\Rightarrow 0 = \eta_{\alpha\beta} \left[ \cancel{\partial^2_{\delta\varepsilon} x'^{\alpha 2} \cdot \partial_\delta x'^\beta} + \partial_\varepsilon x'^\alpha \cdot \partial^2_{\delta\gamma} x'^\beta \right]$ , $\delta \leftrightarrow \varepsilon$

(3) $\Rightarrow \cancel{0 = \eta_{\alpha\beta} \left[ \partial^2_{\gamma\varepsilon} x'^{\alpha 2} \cdot \partial_\varepsilon x'^\beta + \partial_\delta x'^\alpha \cdot \partial^2_{\varepsilon\delta} x'^\beta \right]}$ , car $\in C^2$, $\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\beta\alpha}$

(1) + (2) – (3) $\Rightarrow 0 = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\delta} \cdot \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\varepsilon \partial x^\gamma}$

$\overset{\{\partial_\beta x'^\alpha\} \text{ inversible}}{\Rightarrow} 0 = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\varepsilon \partial x^\gamma}$

$$\Rightarrow \eta_{\alpha\beta} \cdot \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma} = \text{cte}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma} = \Lambda^\alpha_\gamma = \text{cte}} \ (2)$$

$(1) \Rightarrow \eta_{\gamma\delta} = \Lambda^\alpha{}_\gamma \Lambda^\beta{}_\delta \, \eta_{\alpha\beta}$ $\qquad$ $(2) \Rightarrow x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\gamma x^\gamma + a^\alpha$

$a^\alpha = \text{cte} \; ; \; \Lambda^\alpha{}_\beta = \text{cte}$

<u>Inversement</u> : $\forall x^\alpha \longrightarrow \boxed{x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta x^\beta + a^\alpha}$ où $\eta_{\alpha\beta} = \Lambda^\gamma{}_\alpha \Lambda^\delta{}_\beta \eta_{\gamma\delta}$ ; $\Rightarrow \eta_{\alpha\beta} dx'^\alpha dx'^\beta = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$

transformation de Lorentz inhomogène

$\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$
$x \mapsto x' = \Lambda x + a$ , où $\boxed{\eta = \Lambda^t \eta \Lambda}$ $\overset{\Leftrightarrow}{\Rightarrow}$ $\eta = \Lambda \eta \Lambda^t$ ; $\Lambda^{-1} = \eta \Lambda^t \eta$

<u>Analyse de $\eta, \Lambda$</u> : i) $\eta_{00} = -1 = \Lambda^\alpha{}_0 \Lambda^\beta{}_0 \eta_{\alpha\beta} = -(\Lambda^0{}_0)^2 + \sum_{i=1}^{3} (\Lambda^i{}_0)^2 \Rightarrow (\Lambda^0{}_0)^2 = 1 - \sum_{i=1}^{3} (\Lambda^i{}_0)^2$

$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \Lambda^0{}_0 \geq 1 \\ \Lambda^0{}_0 \leq -1 \end{cases}}$

ii) $\underbrace{\det \eta}_{\neq 0} = \det(\Lambda)^2 \cdot \det \eta \Rightarrow \boxed{\det(\Lambda) = \pm 1}$

iii) l'ensemble de toutes les transformation de Lorentz possède la propriété de groupe

$x \xrightarrow[(\Lambda_1, a_1)]{} x' = \Lambda_1 x + a_1 \xrightarrow[(\Lambda_2, a_2)]{} x'' = \Lambda_2 x' + a_2$
$= \Lambda_2(\Lambda_1 x + a_1) + a_2$
$= \Lambda_2 \Lambda_1 x + \Lambda_2 a_1 + a_2$
$= \Lambda_2 \Lambda_1 x + \Lambda_2 a_1 + a_2$

$(\Lambda_1, a_1) \circ (\Lambda_2, a_2) = (\Lambda_2 \cdot \Lambda_1, \Lambda_2 \cdot (a_1 + a_2))$

avec : $(\Lambda_2 \Lambda_1)^t \eta (\Lambda_2 \Lambda_1) = \Lambda_1^t \cdot \underbrace{\Lambda_2^t \eta \Lambda_2}_{= \eta} \Lambda_1 = \underbrace{\Lambda_1^t \eta \Lambda_1}_{= \eta} = \eta$

$\Rightarrow (\Lambda_2 \cdot \Lambda_1 ; \Lambda_2 a_1 + a_2)$ est une transformation de Lorentz inhomogène
$I = (\mathbb{1}, 0)$

$\Rightarrow \{(\Lambda, a)\}$ = "Groupe de Poincaré" ou "Lorentz inhomogène"

$\boxed{x' = \Lambda x}$ = "Groupe des transformation de Lorents" (homogène) (sous-groupe)
↳ trouve ceci et on a le groupe de Poincaré

$\Rightarrow \mathcal{L} = \underbrace{\mathcal{L}_+^\uparrow}_{\substack{\Lambda^0{}_0 \geq 1 \\ \det\Lambda = +1}} \cup \underbrace{\mathcal{L}_-^\uparrow}_{\substack{\Lambda^0{}_0 \geq 1 \\ \det\Lambda = -1}} \cup \underbrace{\mathcal{L}_+^\downarrow}_{\substack{\Lambda^0{}_0 \leq 1 \\ \det\Lambda = +1}} \cup \underbrace{\mathcal{L}_-^\downarrow}_{\substack{\Lambda^0{}_0 \leq 1 \\ \det\Lambda = -1}}$

<u>Etude de $\mathcal{L}$</u> :

$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ : opération d'identité $(\mathbb{1}^t \eta \mathbb{1} = \eta)$

$P = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_-^\uparrow$ : opération de parité $(P^t \eta P = \eta)$ (inversion spatiale)

$T = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_-^\downarrow$ : inversion temporelle $(T^t \eta T = \eta)$

$P \cdot T = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_+^\downarrow$ : inversion spatio-temporelle $((PT)^t \eta (PT) = \eta)$

$\Rightarrow \forall \Lambda \in \mathcal{L}_+^\downarrow$ , $(PT)\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow \Rightarrow \Lambda = PT \cdot \tilde{\Lambda}$ , $\tilde{\Lambda} \in \mathcal{L}_+^\uparrow$

on vérifie que
$\Rightarrow \mathcal{L} = \{\mathbb{1}, P, T, PT\} \cdot \mathcal{L}_+^\uparrow$ , $\mathcal{L}_+^\uparrow$ : transf. Lorentz orthochrone et propre , $\mathcal{L}_+^\uparrow$ sous-groupe de $\mathcal{L}$ (c'est le seul car il y a identité $\in \mathcal{L}_+^\uparrow$)
$\longrightarrow$ pour connaître tous les $\mathcal{L}$, il suffit de connaître $\mathcal{L}_+^\uparrow$

<u>Rappel exo.</u> : $\mathcal{L} \supset \mathcal{L}_+^\uparrow \supset SO(3)$ : rotation propre $R_+$ : $x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta x^\beta$ , avec $\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & R \end{array}\right)$

$\Lambda^t \eta \Lambda = \eta \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} R^t R = \mathbb{1} \\ \det R = 1 \end{matrix}}$

Transformations de Lorentz "Boost" : - transformation SANS rotation

$x' = \Lambda(v^1, v^2, v^3) x$ ; $\begin{cases} \Lambda^0{}_0 = ch(\eta) & , th(\eta) = v/c \\ \Lambda^i{}_0 = \Lambda^0{}_i = -sh(\eta) \cdot n^i & , n^i = v^i / \|v\| \\ \Lambda^i{}_j = \delta_{ij} + (ch(\eta) - 1) n^i n^j \end{cases}$

$\sum_{i=1}^{3} (v^i)^2 = \bar{v}^2 = c^2 \cdot th^2(\eta)$

↳ définit un "Boost"

$\longrightarrow$ on vérifie que $\Lambda(v^1, v^2, v^3)$ t.q. $\Lambda^t \eta \Lambda = \eta$ ; $\det \Lambda = \pm 1$
$\Rightarrow \Lambda(v^1, v^2, v^3) \in \mathcal{L}_+^\uparrow$

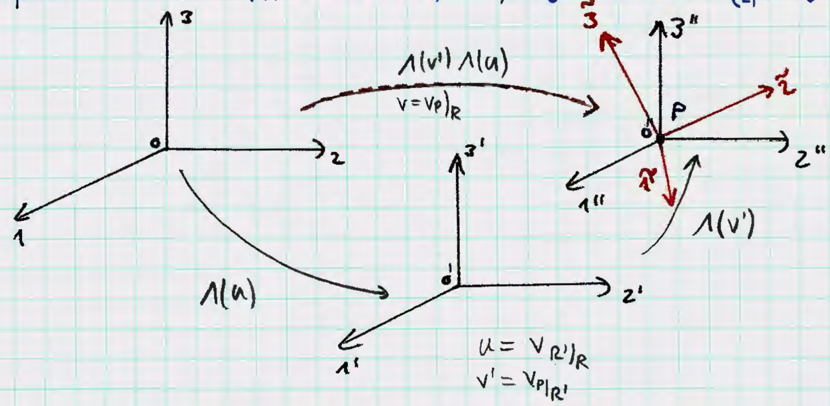
- Attention : $\Lambda(v_2) \cdot \Lambda(v_1) \neq$ boost sauf si les "boost" sont dans la même direction
- Exo : $\forall \tilde{\Lambda} \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ , $\tilde{\Lambda} = R\Lambda$ , $R \in \mathcal{R}$ , $\Lambda$ un boost ; $\Lambda = \Lambda^t$

$\boxed{\Lambda(v_2) \cdot \Lambda(v_1) = R \, \Lambda(v)}$ précession de thomas

<u>Résumé</u> : $x \mapsto x'$ i) réguliers
ii) $\eta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta = \eta_{\alpha\beta}\, dx'^\alpha dx'^\beta$ $\Bigg] \Rightarrow x'^\alpha = \Lambda^\alpha_{\ \beta} x^\beta + a^\alpha$ ; $\eta = \Lambda^t \eta \Lambda = \Lambda \eta \Lambda^t$

$\Rightarrow \Lambda = \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ P \\ T \\ PT \end{pmatrix} \cdot R_\theta \cdot \Lambda(\underline{v})$ ; $\Lambda(v) = R_{\theta_1}^{-1} \Lambda(v e_1) R_{\theta_1}$

– propriétés : $\Lambda(V_{(\hat{2})}) \cdot \Lambda(V_{(\hat{1})}) = R_\theta \cdot \Lambda(\underline{v})$ , $R_\theta = \mathbb{1} \Leftrightarrow V_{(\hat{2})} \,//\, V_{(\hat{1})}$




<u>Définition</u> : – référentiel de repos d'une particule : obligé de faire des "boost" de vitesse infinitésimale

<u>Remorque</u> : – transformation de Lorentz pure infinitésimale : D.L. à l'ordre le plus bas :

$$\left.\begin{aligned} \Lambda^0_{\ 0}(\delta v) &= ch(\eta) && = 1 \\ \Lambda^0_{\ i}(\delta v) &= -\, ch(\eta)\cdot \frac{\delta v^i}{c} && = -\ \delta v^i/c \\ \Lambda^i_{\ j}(\delta v) &= \delta_{ij} + (ch(\eta)-1)\cdot \frac{v^i v^j}{|v|^2} && = \delta_{ij} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Lambda(\delta v) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & -\frac{\delta v_1}{c} & -\frac{\delta v_2}{c} & -\frac{\delta v_3}{c} \\ \hline -\delta v_1/c & 1 & 0 & 0 \\ -\delta v_2/c & 0 & 1 & 0 \\ -\delta v_3/c & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

<u>Analyse tensorielle en R.R.</u> – basé sur le principe d'objectivité : ne doit pas dépendre du choix du référentiel d'inertie : syst. coord : $\{x\} \longrightarrow \{x'\}$ où $x' = \Lambda x + a$ $\longrightarrow$ on se restreint à l'invariance sous les transf. de coord. de Lorentz.

<u>Définition</u> : – <u>champ scalaire</u> : $S_{(x)} = S'_{(x')}$ $\forall$ transformation de Lorentz $x' = \Lambda x + a$

<u>Exemple</u> : – Ligne d'univers d'un point matériel : $\eta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta = -c^2 d\tau^2 \Rightarrow \tau$ = temps propre d'un point matériel est un scalaire.

avec $x'^\alpha = \Lambda^\alpha_{\ \beta} x^\beta + a^\alpha$

<u>Définition</u> : – <u>champ de vecteur contravariant</u> : $(V^0, V^1, V^2, V^3)$ p.r. s.c. $\{x\}$ de même dimension
$(V'^0, V'^1, V'^2, V'^3)$ p.r. s.c. $\{x'\}$ de même dimension $\Big\}$ si $\boxed{V'^\alpha_{(x')} = \Lambda^\alpha_{\ \beta} V^\beta_{(x)}}$

les $a^\alpha$ se simplifient

<u>Exemple</u> : $\boxed{\text{– intervale : } \Delta x = (x^\alpha_B - x^\alpha_A)}$
$\Delta x' = (x'^\alpha_B - x'^\alpha_A)$ $\Big\} \Rightarrow \Delta x$ est un vecteur contravariant

$\Rightarrow$ soit $x^\alpha = x^\alpha(\tau)$, on peut définir $\left.\begin{aligned} W^\alpha &= \frac{dx^\alpha}{d\tau} \\ W'^\alpha &= \frac{dx'^\alpha}{d\tau} \end{aligned}\right\}$ $\Rightarrow W^\alpha \equiv$ quadrivecteur contravariant
$\Rightarrow \boxed{W'^\alpha = \Lambda^\alpha_{\ \beta} W^\beta}$ $\xleftarrow{\text{pas évident}}$ Galilée : $V_a = V_r + V_e$
$a' = a$

$\Rightarrow a^\alpha = \frac{dW^\alpha}{d\tau}$ est un vecteur contravariant $\Rightarrow \boxed{a'^\alpha = \Lambda^\alpha_{\ \beta} a^\beta}$

<u>Définition</u> : – <u>champ de vecteur covariant</u> : $(u_0, u_1, u_2, u_3)$ si : $\boxed{u'^{(x')}_\alpha = (\Lambda^{-1})^\beta_{\ \alpha}\, u^{(x)}_\beta}$ , $\Lambda^{-1} = \eta \Lambda^t \eta$

<u>Exemple</u> : – soit $S(x)$ un champ scalaire (i.e. $S'(x') = S(x)$), alors on définit : $\longrightarrow S'(x') = S(x)$

$\frac{\partial S(x)}{\partial x^\alpha} = \partial_\alpha S$ $\qquad\qquad \frac{\partial S'(x')}{\partial x'^\alpha} = \partial'_\alpha S'$

$\Rightarrow \{\partial_\alpha S\} = \nabla S$ "gradient de $S$" vecteur covariant $S'(x') = S(x(x'))$

$\partial'_\alpha S' = \frac{\partial S'(x')}{\partial x'^\alpha} = \frac{\partial S}{\partial x^\beta} \cdot \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} = (\Lambda^{-1})^\beta_{\ \alpha}\, \partial_\beta S$

$\mathcal{T}^i_{\ j}$ = espace des vecteurs $i$ fois contravariant et $j$ fois covariant

<u>Propriété</u> : des vect. {contra / co} variants :
1) Espace vectoriel
2) $\{V^\alpha\}$ ; $\{u_\alpha\} \Rightarrow V^\alpha u_\alpha$ est un scalaire
3) $\forall \{V^\alpha\} \Rightarrow \eta_{\alpha\beta} V^\beta = u_\alpha$ cov.
$\forall \{u_\alpha\} \Rightarrow \eta^{\alpha\beta} u_\beta = W^\alpha$ contra.
Si : $u_\alpha = \eta_{\alpha\beta} V^\beta$, alors : $\eta^{\gamma\alpha} u_\alpha = \eta^{\gamma\alpha} \eta_{\alpha\beta} V^\beta = V^\gamma$

$\mathcal{T}^1_{\ 0}$ : $V \cdot \tilde{V} := \eta_{\alpha\beta} V^\alpha \tilde{V}^\beta = V^\alpha V_\alpha$

$\mathcal{T}^0_{\ 1}$ : $u \cdot \tilde{u} := \eta^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta = u_\alpha u^\alpha$

– vecteur contra $V$ est de type <u>temporel</u> si $V \cdot V < 0$
<u>spatial</u> si $V \cdot V > 0$
<u>nul</u> si $V \cdot V = 0$

**Exemple** : – P.M. : $w^\alpha := \frac{dx^\alpha}{d\tau}$ , $\{w^\alpha\}$ est de type temporel

– si $V^\alpha(x)$ contravariant $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^\alpha} V^\alpha = \partial_\alpha V^\alpha = V^\alpha{}_{,\alpha}$ : scalaire (divergence)

– si $S = S(x)$ est un champ scalaire, alors : $\underbrace{\eta^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\beta} S}_{= \eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta S} = \left(-\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right) S = \Box S$ : scalaire

d'Alembertien

**Définition** : pseudo tenseur $p$ fois contravariant, $q$ fois covariant $\Big\}$ $4^{p+q}$ grandeurs réelles de même unité, définie p.r. S.C. $\{x\}$ syst. coordonnées

$T^{\alpha_1\ldots\alpha_p}{}_{\beta_1\ldots\beta_q}$

p.r. $\{x'\}$ $\boxed{T'^{\alpha_1\ldots\alpha_p}{}_{\beta_1\ldots\beta_q} = C(\Lambda)\, \underbrace{\Lambda^{\alpha_1}{}_{\gamma_1}\cdots\Lambda^{\alpha_p}{}_{\gamma_q}}_{p}\, \underbrace{\Lambda^{-1\,\delta_1}{}_{\beta_1}\cdots\Lambda^{-1\,\delta_q}{}_{\beta_q}}_{q}\, T^{\gamma_1\ldots\gamma_p}{}_{\delta_1\ldots\delta_q}}$ ; $C(\Lambda) = \begin{cases} +1 & \text{si } \Lambda \in \mathcal{L}^\uparrow_+ \\ \text{sign}\,\Lambda^0{}_0 & \text{"pseudochrone"} \\ (\det\Lambda)^{-1} : & \text{pseudo-tenseur de type densité} \end{cases}$

**Propriétés** 1) $\tau^p{}_q$ : l'ensemble des tenseurs $p$ fois contravariant, $q$ fois covariant, de même unité, forme un espace vectoriel

2) $T^{\alpha\beta} R_{\gamma\delta} = W^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}$ : 2 fois contra. et 2 fois cov. , i.e. $\tau^{p_1}{}_{q_1} \otimes \tau^{p_2}{}_{q_2} = \tau^{p_1p_2}{}_{q_1q_2}$

3) $T^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta\varepsilon}$ ; $T^{\alpha\beta}{}_{\beta\delta\varepsilon} = T^{\alpha}{}_{\delta\varepsilon}$ : contraction , i.e. $\tau^p{}_q \to \tau^{p-1}{}_{q-1}$

4) $\partial_\alpha T^{\beta\gamma} = T^{\beta\gamma}{}_{,\alpha}$

**Remarque** : – le tenseur métrique $\eta^{\alpha\beta}$ est un tenseur 2 fois contravariant
– le tenseur métrique $\eta_{\alpha\beta}$ est un tenseur 2 fois covariant $\Big\}$ et invariant : $\eta^{\alpha\beta} \overset{\eta = \Lambda\eta\Lambda^t}{=} \Lambda^\alpha{}_\gamma \eta^{\gamma\delta} \Lambda^\beta{}_\delta = \Lambda^\alpha{}_\gamma\Lambda^\beta{}_\delta\eta^{\gamma\delta}$

→ correct car :

$V^\alpha \to \eta_{\alpha\beta}V^\beta = u_\alpha$

$\delta^\alpha{}_\beta \to \eta^{\alpha\gamma}\eta_{\gamma\beta} = \delta^\alpha{}_\beta \Rightarrow \delta^\alpha{}_\beta$ 1 fois contra, 1 fois covariant invariant

**Définition** : – pseudo-tenseur de Levi-Civita

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} +1 & \text{si } \alpha,\beta,\gamma,\delta \text{ permut. paire de } (0,1,2,3) \\ -1 & \text{si } \alpha,\beta,\gamma,\delta \text{ permut. impaire de } (0,1,2,3,4) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

– est-ce un tenseur ?

$$\Lambda^\alpha{}_{\alpha'}\Lambda^\beta{}_{\beta'}\Lambda^\gamma{}_{\gamma'}\Lambda^\delta{}_{\delta'}\varepsilon^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} = (\det\Lambda)\cdot\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

$$\Rightarrow \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = (\det\Lambda)^{-1}\Lambda^\alpha{}_{\alpha'}\Lambda^\beta{}_{\beta'}\Lambda^\gamma{}_{\gamma'}\Lambda^\delta{}_{\delta'}\varepsilon^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}$$

$\Rightarrow$ pseudo-tenseur $\neq$ tenseur

**Remarque** : – soit S.C. $\{x\}$ , on définit un vecteur contravariant $e_0 = (1,0,0,0) = \{e_0{}^\alpha\}$
$e_1 = (0,1,0,0) = \{e_1{}^\alpha\}$
$e_\beta = \{e_\beta{}^\alpha = \delta^\alpha{}_\beta\}$

→ vecteurs contravariants tangeants aux lignes de coord. $x_\alpha$

→ $e_\alpha \cdot e_\beta = \eta_{\mu\nu}e_\alpha{}^\mu e_\beta{}^\nu = \eta_{\alpha\beta}$

S.C. $\{x'\}$ : $(e_\alpha)'^\beta = \Lambda^\beta{}_\gamma\delta^\gamma{}_\alpha = \Lambda^\beta{}_\alpha$

→ $(V'^0, V'^1, V'^2, V'^3) = \sum_\alpha V'^\alpha e'_\alpha$ ; $e_\alpha = \Lambda^\beta{}_\alpha e'_\beta$ ; $\Lambda = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix}$

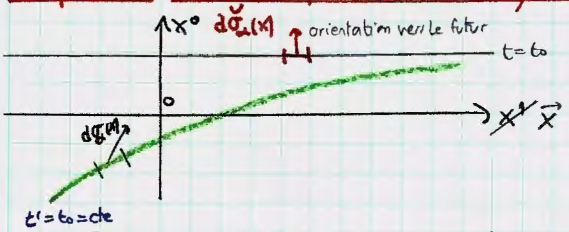
→ $\sum_\alpha V^\alpha e_\alpha = \sum_\alpha (V^\alpha\Lambda^\beta{}_\alpha)e'_\beta = \sum_\alpha V'^\alpha e'_\alpha$

et : $V\cdot e_\beta = V^\alpha e_\alpha e_\beta = V^\alpha\eta_{\alpha\beta}$

**Transformation infinitésimale** : $\Lambda^0{}_0 = 1$ ; $\Lambda^0{}_i = \Lambda^i{}_0 = -\frac{\delta v^i}{c}$ ; $\Lambda^i{}_j = \delta^i{}_j$ ; $e_\alpha \to e'_\alpha = (\Lambda^{-1})^\beta{}_\alpha e_\beta$

$$\Rightarrow \begin{cases} e'_0 = e_0 + \frac{\delta v^i}{c}e_i \\ e'_i = e_i - \frac{\delta v^i}{c}e_0 \end{cases}$$

## Chapitre IV : Les 2 principes de la thermodynamique




= pseudo-vecteur : ne change pas de signe après inversion du temps

$d\tilde\sigma(x) = (d^3V, 0,0,0)$

$d\tilde\sigma(x)$ = pseudo-vecteur dirigé vers le futur , $d\tilde\sigma_0 > 0$ , temporel
$d\sigma\cdot d\sigma < 0$
$d\tilde\sigma_\alpha(x) = \Lambda^0{}_\alpha(d^3V')$

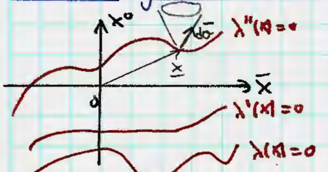
**Définition** : – époque : $\lambda(x) = 0$ t.q. $d\tilde\sigma_\alpha(x)$ soit : i) $d\sigma\cdot d\sigma < 0$ : temporel
ii) vers le futur
iii) $d\tilde\sigma_0(x) > 0$

**Définition** : – grandeur extensive : $\breve F$ extensive si $\exists$ un courant de $\breve F$ , F pseudochrone , $j^\alpha_F(x)$ t.q. $\forall$ époque $\lambda(x) = 0$

- on a : $\boxed{F[\lambda(\cdot)] = \frac{1}{c}\int_{\lambda(x)=0} d\breve{\sigma}_\alpha(x)\, j_F^\alpha(x)}$

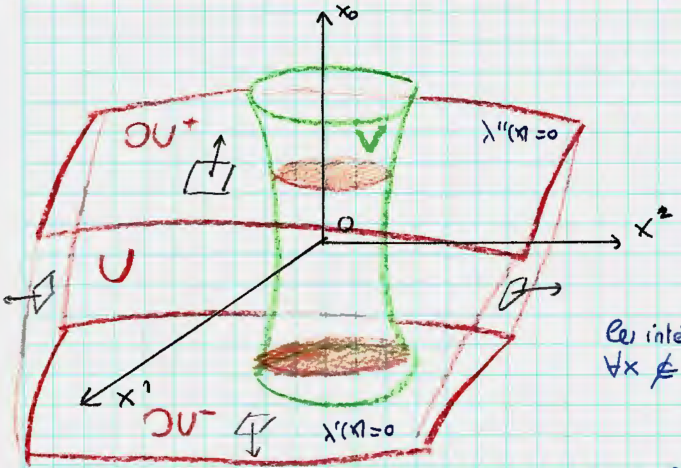
- en particulier : $\boxed{\breve{F}(t) = \frac{1}{c}\int_{\mathbb{R}^3} d^3v\; j_F^0(t,\underline{x})}$ $\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{c} j_F^0(ct,x) = \text{densité de } F \text{ au point } x \\ \vec{j}_F(ct,x) = \text{flux de la grandeur } F \end{cases}$

<u>Définition</u> : - <u>grandeur conservée</u> : F extensive, F est dite conservée si $\boxed{\partial_\alpha j_F^\alpha = 0}$ $\forall x$




$\Rightarrow F[\lambda''(\cdot)] = F[\lambda'(\cdot)]$ $\forall \lambda''(\cdot) \in$ futur $\lambda'(\cdot)$ ($\nexists$ intersection)
$\Leftrightarrow F(t_2) = F(t_1)$ $\forall t_2, t_1$

<u>Preuve</u> : - <u>hypothèse</u> : $j_F^\alpha \neq 0$ dans un domaine fini de l'espace $V$ ; $U$ domaine fermé




$$\oint_{\partial D} d\sigma_\alpha(x)\, j_F^\alpha(x) = \int_D d^4x\, \overbrace{\partial_\alpha j_F^\alpha(x)}^{=0} = 0$$

$$= \int_{\lambda''(x)=0} d\breve{\sigma}_\alpha\, j_F^\alpha(x) - \int_{\lambda'(x)=0} d\breve{\sigma}_\alpha\, j_F^\alpha(x)$$

$\Rightarrow F[\lambda''(\cdot)] - F[\lambda'(\cdot)] = 0$
$\Rightarrow F[\lambda''(\cdot)] = F[\lambda'(\cdot)]$ ※

Les intégrales de surface sont nulles sur les bords verticaux car $j_F^\alpha = 0$ $\forall x \notin V$, donc il ne reste que les 2 surfaces

<u>Définition</u> : - valeur d'une grandeur extensive dans $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$ : $F_\Lambda(t) = \frac{1}{c}\int_\Lambda d^3v\, j_F^0(t,x)$

$$\frac{d}{dt}F_\Lambda(t) = \frac{1}{c}\int_\Lambda d^3v\, \partial_t j_F^0 \quad ; \; \partial_\alpha j_F^\alpha = \partial_0 j_F^0 + \partial_i j_F^i = 0$$

$$= \frac{1}{c}\int_\Lambda d^3v \frac{d}{dt} j_F^0(t,x) = -\frac{1}{c}\int_\Lambda d^3v\, \mathrm{div}\, j_F$$

$$= -\frac{1}{c}\int_{\partial\Lambda} d\sigma\, j_F$$

<u>Définition</u> : - <u>1^er principe</u> : $\forall$ système, i) $\exists$ $\breve{\Pi}^\alpha$ "<u>quantité de mouvement</u>", extensive, conservée, type temporel, dirigé vers le futur $\Pi^0 := E/c > 0$
ii) $\exists$ $\breve{J}^{[\alpha,\beta]}$ "<u>moment cinétique</u>", extensif, conservé, pseudo-chrone

$\breve{\Pi}\cdot\breve{\Pi} = -Mc^2 < 0$ $\Rightarrow -\left(\frac{E}{c}\right)^2 + \Pi^2 = -M c^2$ $\Rightarrow E^2 = M^2c^4 + \Pi^2c^2$

<u>Remarques</u> : i) $\Rightarrow$ type temporel : $\breve{\Pi}\cdot\breve{\Pi} = -M\cdot c^2 < 0$
dirigé vers le futur : $\Pi^0 = E/c > 0$ $\Big\}$ $-\left(\frac{E}{c}\right)^2 + \Pi^2 = -M\cdot c^2$ $\Rightarrow$ $\boxed{E^2 = M^2\cdot c^4 + \Pi^2\cdot c^2}$
extensive, conservée : $\boxed{j^\alpha_{\Pi^\beta} = T^{\alpha\beta}(x)}$ : tenseur énergie-impulsion

$$\boxed{\breve{\Pi}^\beta[\lambda(\cdot)] = \frac{1}{c}\int_{\lambda(x)=0} d\breve{\sigma}_\alpha\, T^{\alpha\beta}(x)}$$

$$\boxed{\breve{\Pi}^\beta(t) = \frac{1}{c}\int_{\mathbb{R}^3} d^3x\; T^{0\beta}(x)}$$

système isolé : grandeur conservée :

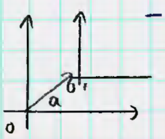
$$\boxed{\partial_\alpha T^{\alpha\beta}(x) = 0}$$

ii) $\boxed{\breve{J}^{[\beta\gamma]}[\lambda(\cdot)] = \frac{1}{c}\int_{\lambda(x)=0} d\breve{\sigma}_\alpha(x)\cdot\left\{x^\beta T^{\alpha\gamma} - x^\gamma T^{\alpha\beta}\right\}(x)}$

- grandeur conservée $\Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left\{x^\beta T^{\alpha\gamma} - x^\gamma T^{\alpha\beta}\right\} = 0 \;\Rightarrow\; \delta^\beta_\alpha T^{\alpha\gamma} + x^\beta \cancel{\partial_\alpha T^{\alpha\gamma}}^{=0} - \delta^\gamma_\alpha T^{\alpha\beta} - x^\gamma \cancel{\partial_\alpha T^{\alpha\beta}}^{=0} = 0$$

$\Rightarrow$ $\boxed{T^{\beta\gamma} = T^{\gamma\beta}}$ <u>tenseur symétrique d'ordre 2</u>




- soit la transformation : $x^\alpha \to x'^\alpha = x^\alpha + a^\alpha$, alors :

$$J'^{[\beta\gamma]}_{O'} = \frac{1}{c}\int_{\lambda(x)=0} d\sigma_\alpha'(x')\cdot\left\{(x^\beta + a^\beta)T^{\alpha\gamma} - (x^\gamma + a^\gamma)T^{\alpha\beta}\right\}$$

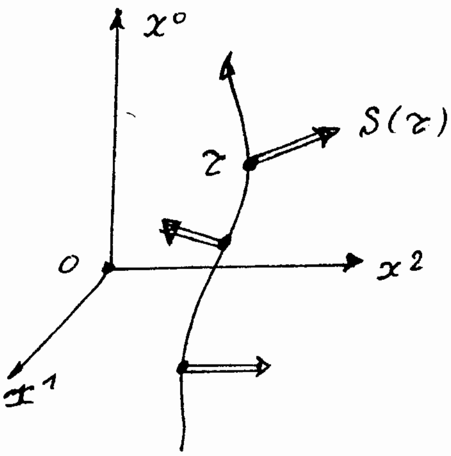
$$= J_O^{[\beta\gamma]} + \left(a^\beta\Pi^\gamma - a^\gamma\Pi^\beta\right)$$

$\longrightarrow$ on aimerait avoir une grandeur intrinsèque qui ne dépend pas du point

<u>Définition</u> : - <u>moment cinétique intrinsèque (ou "spin")</u> : vecteur covariant défini par : soit $\frac{\breve{\Pi}^\beta}{\breve{M}} := \omega^\beta$, $\breve{M} > 0$
"orthochrone" $\breve{\Pi}^\beta := M\cdot\omega^\beta$, alors :

$$\boxed{\breve{S}_\alpha := \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\,\breve{J}^{\beta\gamma}\cdot\frac{\omega^\delta}{c}}$$

# Point Matériel avec Spin (masse $m$; spin $\rho$)




## Evolution

$$\begin{cases} x^\alpha = x^\alpha(\tau) \\ S_\alpha = S_\alpha(\tau) \end{cases}$$

avec
$$\boxed{\begin{array}{lll} w^\alpha \doteq \dfrac{dx^\alpha}{d\tau} & ; & w \cdot w = -c^2 \\ S \cdot S = +\rho^2 & ; & S \cdot w = 0 \end{array}}$$ (1) (2)

**Remarque :**

$$\varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}\,\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} = 2\left[\delta^\rho_\mu\,\delta^\sigma_\nu - \delta^\sigma_\mu\,\delta^\rho_\nu\right] \quad (3)$$

## Equations du mouvement — I) Formulation champ

Soit

$$\begin{cases} T^{(\alpha\beta)}(x) \doteq m\, w^\alpha(t)\, w^\beta(t)\, \dfrac{c}{w^0(t)}\, \delta^3(\vec{x} - \vec{x}(t)) & (4) \\ J^{\cdot\alpha}_{[\beta\gamma]}(x) \doteq \underset{\text{orbital}}{\underset{\uparrow}{\ell^\alpha_{[\beta\gamma]}}}(x) + \underset{\text{spin}}{\underset{\uparrow}{\rho^\alpha_{[\beta\gamma]}}}(x) & (5) \end{cases}$$

avec

$$\ell^\alpha_{[\beta\gamma]}(x) \doteq x_\beta\, T^\alpha{}_\gamma(x) - x_\gamma\, T^\alpha{}_\beta(x) \quad (6)$$

$$\rho^\alpha_{[\beta\gamma]}(x) \doteq \varepsilon_{\beta\gamma\mu\nu}\, w^\alpha(t)\, w^\mu(t)\, S^\nu(t)\, \frac{1}{w^0(t)}\, \delta^3(\vec{x} - \vec{x}(t)) \quad (7)$$

Alors :

Equations du mouvement.
$$\boxed{\begin{array}{l} \partial_\alpha T^{\alpha\beta} = f^\beta \\ \partial_\alpha J^{\cdot\alpha}_{[\beta\gamma]} = x_\beta f_\gamma - x_\gamma f_\beta + m_{[\beta\gamma]} \end{array}}$$ (8) (9)

avec $f^\beta \cdot w_\beta = 0$

$\Rightarrow$

$$p^{\beta}(t) \doteq \frac{1}{c}\int d^3x \; T^{0\beta}(t,x) = m\, w^{\beta}(t) \qquad (10)$$

$$J_{\beta\gamma}(t) \doteq \frac{1}{c}\int d^3x \; j^{\,0}_{[\beta\gamma]}(t,x) = L_{\beta\gamma}(t) + S_{\beta\gamma}(t)$$

avec
$$L_{\beta\gamma}(t) = \frac{1}{c}\int d^3x \left[ x_\beta T^{0}{}_{\gamma} - x_\gamma T^{0}{}_{\beta} \right] \equiv x_\beta P_\gamma - x_\gamma P_\beta$$

$$S_{\beta\gamma}(t) = \frac{1}{c}\int d^3x \; \varepsilon_{\beta\gamma\mu\nu}\, w^{\mu}(t)\, s^{\nu}(t)\, \delta^3(\vec{x}-\vec{x}(t))$$

c.à d.
$$\boxed{S_{\beta\gamma}(t) = \varepsilon_{\beta\gamma\mu\nu}\, \frac{w^{\mu}(t)}{c}\, S^{\nu}(t)} \qquad (11)$$

$$\boxed{L_{\beta\gamma}(t) = x_\beta P_\gamma - x_\gamma P_\beta} \qquad (12)$$

Remarque : De l'équation (3) et (11)

$$\varepsilon^{\beta\gamma\rho\sigma} S_{\beta\gamma} = \varepsilon^{\beta\gamma\rho\sigma}\, \varepsilon_{\beta\gamma\mu\nu}\, \frac{w^{\mu}}{c}\, s^{\nu}$$
$$= \frac{2}{c}\left(w^{\rho} s^{\sigma} - w^{\sigma} s^{\rho}\right)$$

et
$$\varepsilon^{\beta\gamma\rho\sigma} S_{\beta\gamma}\, w_\sigma = \frac{2}{c}\Big( w^{\rho}\, \underbrace{(s\cdot w)}_{=0} - \underbrace{(w\cdot w)}_{=-c^2}\, s^{\rho}\Big)$$

c.à d.
$$\boxed{S^{\rho} \equiv \frac{1}{2}\, \varepsilon^{\rho\beta\gamma\sigma}\, S_{\beta\gamma}\, \frac{w_\sigma}{c}} \qquad (13)$$

Equations du mouvement. II) Formulation Point Matériel

- $$\frac{d}{dt} P_\beta(t) \overset{(10)}{=} \frac{1}{c}\int d^3x \; \partial_t T^{0\beta} \overset{(8)}{=} \int d^3x \left[ f(t,\vec{x}) - \partial_i T^{i}{}_{\beta}(t,\vec{x}) \right]$$

$\Rightarrow$
$$\boxed{\frac{d}{d\tau} P_\beta(t) = F_\beta(t)} \qquad (14)$$

avec
$$F_\beta(t) = \frac{w^{0}(t)}{c}\int d^3x \; f_\beta(t,\vec{x}) \qquad (15)$$

c.à d. $$\boxed{f_\beta(t,\bar{x}) = \frac{c}{\omega^0(t)} F_\beta(t) \; \delta^3(\vec{x}-\vec{x}(t))} \quad (16)$$

- Moment cinétique:

$$\partial_\alpha \ell^\alpha_{[\beta\gamma]} \overset{(6)}{\underset{(8)}{=}} \underbrace{T_{\beta\gamma} - T_{\gamma\beta}}_{=0} + [x_\beta f_\gamma(x) - x_\gamma f_\beta(x)] \quad (17)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} L_{\beta\gamma} = \frac{1}{c}\int d^3x \; \partial_t (\ell^0_{\beta\gamma}) =$$

$$= \int d^3x \, [x_\beta f_\gamma(t,x) - x_\gamma f_\beta(t,x)]$$

$$= \frac{c}{\omega^0(t)} (x_\beta F_\gamma(t) - x_\gamma F_\beta(t))$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{d\tau} L_{\beta\gamma} = x_\beta F_\gamma - x_\gamma F_\beta} \quad \otimes \quad (18)$$

De (9), (5), (17) $\Rightarrow$

$$\boxed{\partial_\alpha \rho^\alpha_{[\beta\gamma]} = m_{[\beta\gamma]}} \quad (19)$$

Mais:

$$\partial_i \rho^i_{[\beta\gamma]} \overset{(7)}{=} \varepsilon_{\beta\gamma\mu\nu} \, w^\mu \, s^\nu \, \underbrace{\frac{v^i(t)}{c}\frac{\partial}{\partial x^i}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}(t))}_{v_i = \frac{dx^i}{dt}}$$

$$- \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}(t))$$

$$= \varepsilon_{\beta\gamma\mu\nu} S^\nu \Big\{ -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}[\omega^\mu \delta^3(\vec{x}-\vec{x}(t))]$$

$$+ \frac{1}{c}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}(t)) \frac{d}{dt}\omega^\mu(t) \Big\}$$

$$= \varepsilon_{\beta\gamma\mu\nu} \Big\{ -\partial_0 [S^\nu \frac{\omega^\mu}{c} \delta^3(\vec{x}-\vec{x}(t))$$

$$+ \omega^\mu \delta^3(\vec{x}-\vec{x}(t)) \frac{dS^\nu}{d\tau} \frac{1}{\omega^0}$$

$$+ \frac{1}{c} \delta^3(\vec{x}-\vec{x}(t)) \dot{\omega}^\mu \, S^\nu \Big\}$$

d'où

$$\boxed{\begin{aligned} \partial_\alpha \rho^{\alpha}_{[\beta\gamma]} &= \varepsilon_{\beta\gamma\mu\nu} \{ \dot{\omega}^{\mu} s^{\nu} + \omega^{\mu} \dot{s}^{\nu} \} \frac{\delta^3(\vec{x} - \vec{x}(t))}{w^0(t)} \\ &\overset{(19)}{=} m_{[\beta\gamma]} \end{aligned}} \quad (20)$$

De $S \cdot w = 0$ on a $\frac{dS}{d\tau} \omega = - S \frac{dw}{d\tau}$ (21)

et de (3)

$$\varepsilon^{\beta\gamma\rho\sigma} \varepsilon_{\beta\gamma\mu\nu} A^{\mu} B^{\nu} C_{\sigma} = 2 [ A^{\rho} (B \cdot C) - B^{\rho} (A \cdot C) ]$$

il vient.

$$\varepsilon^{\beta\gamma\rho\sigma} m_{[\beta\gamma]} w_{\sigma} =$$

$$\overset{(20)}{=} \varepsilon^{\beta\gamma\rho\sigma} [ \varepsilon_{\beta\gamma\mu\nu} ( \dot{\omega}^{\mu} s^{\nu} + \omega^{\mu} \dot{s}^{\nu} ) \omega_{\sigma} ] \frac{\delta^3(\vec{x} - \vec{x}(t))}{\omega^0(t)}$$

$$= 2 [ \dot{\omega}^{\rho} \underbrace{(s \cdot \omega)}_{=0} - s^{\rho} \underbrace{(\dot{w} \cdot \omega)}_{=0} + \omega^{\rho} \underbrace{(\dot{s} \omega)}_{\overset{(21)}{=} -(S \dot{\omega})} - \dot{s}^{\rho} \underbrace{(\omega \cdot \omega)}_{-c^2} ] \frac{\delta^3(\ )}{\omega^0(t)}$$

$$= 2 [ c^2 \frac{dS^{\rho}}{d\tau} - (S \cdot \dot{\omega}) \omega^{\rho} ] \frac{\delta^3 (\vec{x} - \vec{x}(t))}{\omega^0(t)}$$

d'où $\boxed{\frac{dS^{\rho}}{d\tau} = \frac{1}{c^2} (\dot{\omega} S) w^{\rho} + M^{\rho}}$

avec $M^{\rho}(t) = \left( \frac{\omega^0(t)}{c} \right) \frac{1}{2} \varepsilon^{\rho\sigma\beta\gamma} \frac{w_{\sigma}(t)}{c} \int d^3x \, m_{[\beta\gamma]}(t, \vec{x})$

similaire à (15) et (11)

et l'on doit avoir : $\boxed{\begin{aligned} M^{\rho} S_{\rho} &= 0 \\ M^{\rho} \omega_{\rho} &= 0 \\ F^{\rho} \omega_{\rho} &= 0 \end{aligned}}$

Remarque : – l'envoi de la transformation $x^\alpha \to x'^\alpha = x^\alpha + a^\alpha$, car :

$$\breve{S}'_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\left(\breve{J}^{\beta\gamma} + \underbrace{a^\beta \Pi^\gamma - a^\gamma \Pi^\beta}_{\text{tenseur symétrique sommé avec tenseur antisymétrique} \to 0}\right)\cdot\frac{\Pi^\delta}{c\cdot M} = S_\alpha \Rightarrow \boxed{S_\alpha(t) = S_\alpha(t')}$$

idem

$$S_\alpha \cdot \omega^\alpha = 0 \Rightarrow S_\alpha \perp \omega^\alpha$$

– interprétations : $\beta = 0$ :

$$\Pi^\beta_{(t)} = \left(\frac{E(t)}{c}; \Pi_{(t)}\right) = \frac{1}{c}\int d^3x\ T^{0\beta}(x,t) \Rightarrow \boxed{T^{00}(t,x) = \rho_E(x)} : \text{densité d'énergie}$$

$$\boxed{c\cdot T^{i0}(t,x) = j^i_E(x)} : \text{courant d'énergie}$$

– avec $\partial_\alpha T^{\alpha 0} = 0$, on a :

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\rho_E(x) + \frac{1}{c}\partial_i j^i_E(x) = 0 \Rightarrow \boxed{\partial_t \rho_E + \operatorname{div} j_E = 0}$$

– interprétation : $\beta = i$ :

$\frac{1}{c}T^{0i}(x) = \Pi^i(x)$ : densité de 3-quantité de mouvement

$T^{ij} = j_{\pi\ j}^{\ i}$ : flux selon $i, j$ de $\pi$

$$\partial_\alpha T^{\alpha i} = 0 \Rightarrow \boxed{\partial_t \Pi^i + \partial_k T^{ki} = 0}$$

$$\boxed{j_E(x) = c^2\cdot \Pi(x)}$$

– interprétation :

$$J^{i0}(t) = \frac{1}{c}\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left\{x^i T^{00} - x^0 T^{0i}\right\} = \frac{1}{c}\int d^3x \left\{x^i \cdot \rho_E(t,x)\right\} - c\cdot t\,\breve{\Pi}^i(t)$$

$$= \frac{1}{c}E(t)\cdot z_E(t) - c\cdot t\cdot \Pi^i$$

$$\underbrace{\tfrac{1}{c}E(t)}_{=\Pi^0}$$

$$\boxed{z_E(t) = \frac{\int d^3x\ \bar{x}\ \rho_E(t,x)}{\underbrace{\int d^3x\ \rho_E(t,x)}_{=E(t)}}} \quad \text{centre d'énergie}$$

$$\Rightarrow z^i_E(t) = t\cdot c\cdot \frac{\Pi^i}{\Pi^0} + \frac{J^{i0}}{\Pi^0}$$

$$\Rightarrow \boxed{z^i_E(t) = z^i_E(0) + t\cdot V^i} \quad \text{Vitesse du centre d'énergie} \quad \vec{V}_E = \frac{c^2\vec{\Pi}}{E}$$

Rappel : – $\forall$ système physique, $\exists\ T^{(\alpha,\beta)}(x) = T^{\alpha\beta}(x)$ t.q.

$$\breve{\Pi}^\beta[\lambda(\cdot)] = \frac{1}{c}\int_{\lambda(x)=0} d\breve{\sigma}_\alpha\ T^{\alpha\beta}(x)$$

$$\breve{\Pi}^\beta(t) = \frac{1}{c}\int_{\mathbb{R}^3} d^3v\ T^{\alpha\beta}(t,x) \quad , \breve{\Pi} = \left(\frac{E}{c}, \pi\right)$$

– isolé : $\partial_\alpha T^{\alpha\beta}(x) = 0$

$$J^{\beta\gamma}[\lambda(\cdot)] = \frac{1}{c}\int_{\lambda(x)=0} d\breve{\sigma}_\alpha(x)\left\{x^\beta T^{\alpha\gamma} - x^\gamma T^{\alpha\beta}\right\}(x)$$

$$\breve{S}_\alpha = \frac{1}{2}\cdot \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\cdot J^{\beta\gamma}\cdot\frac{\omega^\delta}{c} \quad , \omega^\delta = \frac{\breve{\Pi}^\delta}{\breve{M}} \quad , \breve{M} = \begin{cases} +M : \text{orthochrone} \\ -M : \text{pseudochrone}\end{cases}$$

$$z_E(t) = \frac{\int d^3v\ z\cdot\rho_E(t,z)}{\int d^3v\ \rho_E(t,z)}$$

– isolé : $\bar{z}_E(t) = \bar{V}_E\cdot t + \bar{z}_E(0)$ ; $\bar{V}_E = c\cdot\frac{\bar{\Pi}}{\Pi^0} = \frac{c^2\bar{\Pi}}{E}$ ; $z^i_E(0) = \frac{J^{i0}}{\Pi^0} = \frac{c\cdot J^{i0}}{E}$

Remarque : – suite : $d\tau = \pm dt\sqrt{1 - V_E^2(t)/c^2}$ $\begin{cases} + \text{orthochrone} \\ - \text{pseudochrone}\end{cases}$, on veut $z^\alpha_E = z^\alpha_E(\tau)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega^\alpha_E = \dfrac{dz^\alpha_E}{d\tau} = \pm\dfrac{c\cdot\Pi^0}{\sqrt{(\Pi^0)^2 - \Pi^2}} = \pm\dfrac{\Pi^0}{M} = \dfrac{\Pi^0}{\breve{M}} \\ \boxed{\overline{\omega_E} = \dfrac{d\bar{z}_E}{d\tau} = V_E\cdot\dfrac{\Pi^0}{M\cdot c} = c\cdot\dfrac{\bar{\Pi}}{\Pi^0}\cdot\dfrac{\Pi^0}{M\cdot c} = \dfrac{\bar{\Pi}}{\breve{M}} = \bar{\omega}} \end{cases}$$

Définition : – référentiel du centre d'énergie : $\vec{V}_{R^*/R} = \vec{V}_E$ ; $z^*_E(t^*) = 0$. On veut de plus mettre le centre d'énergie à l'origine $\Rightarrow$ dans $R^*$ :

$$\begin{aligned} &\omega_E \overset{*}{=} (c,0,0,0) \\ &\breve{\Pi} \overset{*}{=} (M\cdot c,0,0,0) \qquad \text{i.e. } E^* = \breve{M}\cdot c^2 \\ &\breve{J}^{0\alpha} \overset{*}{=} 0 \\ &\breve{S}^* = (0, S^*_1, S^*_2, S^*_3) \qquad , \breve{S}^*_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}J^{*jk} = J^{*jk} \end{aligned}$$

– référentiel du laboratoire : $x^\alpha = \Lambda(-V_E)^\alpha{}_\beta\, x^{*\beta} = \Lambda^\alpha{}_\beta\, x^{*\beta}$ ; $\vec{V})_{R^*/R} = \vec{V}_E = \bar{V}$

$$\breve{\Pi}^\alpha = (\operatorname{sign}\Lambda^0{}_0)\cdot\Lambda^\alpha{}_\beta\,\breve{\Pi}^{*\beta} = (\operatorname{sign}\Lambda^0{}_0)\Lambda^\alpha{}_0\,\breve{M}\cdot c = \Lambda^\alpha{}_0\, M c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Lambda^0{}_0 = \gamma \\ \Lambda^i{}_0 = \gamma\cdot v^i/c \\ \Lambda^i{}_j = \delta^i{}_j + \dfrac{v_i v_j}{|V|^2}\cdot(\gamma - 1)\end{cases}$$

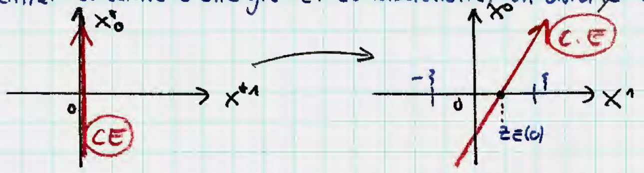
$$\Rightarrow \begin{cases} E = \gamma\cdot M\cdot c^2 \\ \Pi = \gamma\cdot M\cdot V_E\end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \breve{J}^{ij} = (\operatorname{sign}\Lambda^0{}_0)\cdot \Lambda^i{}_j\,\Lambda^0{}_k\,\breve{J}^{*jk}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\breve{J}^{i0}}{E} = \frac{1}{M\cdot c^2}\,\varepsilon^{ike}\cdot s^*_e\cdot V_k$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{z_E(0) = \frac{\bar{V}\wedge\bar{S}^*}{M\cdot c^2}}$$

Conclusion : – dans le référentiel du centre d'énergie et du laboratoire, on aura le mouvement suivant du centre d'énergie : (on n'est pas l'image de l'ancien C.E)




$$z_E(0) = \frac{\bar{V}\wedge\bar{S}^*}{M\cdot c^2} \leq \frac{|S^*|}{M\cdot c} = \xi$$

Définition : – principe 2 : $\exists\, j^\alpha_{N}(x)$ "flux d'entropie" t.q. $\partial_\alpha j^\alpha_S(x) = i(x)$ où $i(x) \geq 0$, avec

– l'entropie sur l'époque :
$$\breve{S}[\lambda(\cdot)] = \frac{1}{c}\int_{\lambda(x)=0} d\bar{\sigma}_\alpha(x)\,j^\alpha_S(x)$$

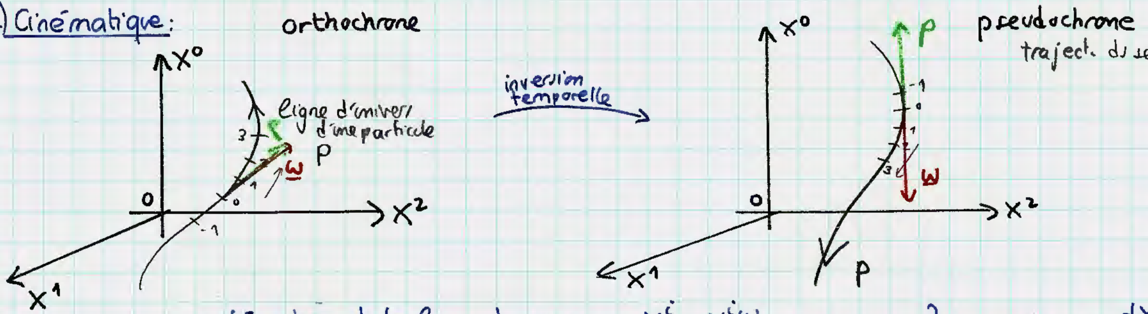
– l'entropie à l'instant t :
$$\breve{S}(t) = \frac{1}{c}\int d^3V\, j^0_S(x)$$

– avec :
$$\breve{S}[\lambda''(\cdot)] \geq \breve{S}[\lambda'(\cdot)] \quad ,\ \lambda''(\cdot) \in \text{futur } \lambda'(\cdot)$$

# Chapitre V : Systèmes de particules

## 1) Cinématique :

orthochrone — pseudochrone




– caractérisation de la ligne d'univers : $x^i = x^i(t)$
– temps propre : $c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - d\bar{x}^2$

$$\Rightarrow v^i(t) = \frac{dx^i}{dt}$$
$$\Rightarrow d\tau = \pm dt\cdot\sqrt{1 - v^2/c^2} \quad \begin{cases} + : \text{orthochrone} \\ - : \text{pseudochrone}\end{cases}$$
$$\Rightarrow x^\alpha = x^\alpha(\tau)$$

– quadrivecteur vitesse : $\boxed{\omega^\alpha(\tau) := \frac{dx^\alpha}{d\tau}}$

– avec : $\omega\cdot\omega = \eta_{\alpha\beta}\,W^\alpha W^\beta = -c^2$

– quadrivecteur accélération : $\boxed{\dot{\omega}^\alpha(\tau) = \frac{d\omega^\alpha(\tau)}{d\tau}}$

– avec : $\dot{\omega}\cdot\omega = 0$ $\quad$ (car $\frac{d}{d\tau}\omega\cdot\omega = 2\dot{\omega}\cdot\omega = 0 \Rightarrow \dot{\omega}\perp\omega$)

Définition : $R^*(\tau)$ : référentiel de repos de la particule ; $\omega \stackrel{*}{=} (c,0,0,0)$ ; $\dot{\omega} \stackrel{*}{=} (0, a^{*1}, a^{*2}, a^{*3})$ ; $a^{*i} = \frac{dv^{*i}}{dt^*}$

Particule avec spin : – $S_\alpha = S_\alpha(\tau)$ ; $S\cdot S = \text{cte} \geq 0$ ; $S\cdot\omega = 0$ (conditions qui caractérisent le spin)

– 1 particule libre : – masse m, alors les équations du mouvement sont données par :

$$\frac{d\omega^\kappa}{d\tau} = 0 \iff \boxed{\frac{d}{d\tau}p^\alpha = 0} \boxed{\breve{p}^\alpha = \breve{m}\cdot\omega^\alpha} \quad , \ \breve{m} = \begin{cases} +m : \text{orthochrone} \\ -m : \text{pseudochrone}\end{cases}$$

$$\breve{p}\cdot\breve{p} = -\breve{m}^2 c^2$$

– évolution du spin : $\frac{dS_\alpha}{d\tau} = 0$

– moment cinétique : $\boxed{j^{\alpha\beta} = x^\alpha\cdot p^\beta - x^\beta p^\alpha + \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\, S_\gamma\,\frac{\omega_\delta}{c}}$

Dynamique d'un pt. matériel sans spin : $\begin{cases} \boxed{m\cdot\frac{d\omega^\alpha}{d\tau} = f^\alpha} \\ f\cdot\omega = 0 \end{cases}$ t.q. par déf. de $\bar{\omega}$ on doit avoir $\dot{\omega}\cdot\omega = 0 \Rightarrow$

– dans le référentiel de repos : $R^*(\tau)$ : $m\cdot a^*(t) = \bar{F}^*(t^*)$ ; $F^*(t^*) = 0$

$$\Rightarrow F^{*\alpha} \text{ mesurable}$$
$$\Rightarrow \boxed{f^\alpha = \Lambda(-v)^\alpha{}_i\, F^{*i}}$$

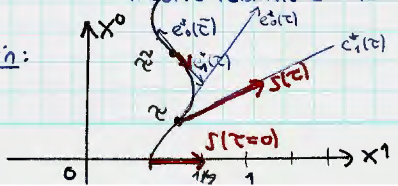
– on a : $p^\alpha = \left(\frac{E}{c}, p\right)$, alors : $\frac{d}{d\tau}p^\alpha = f^\alpha \Rightarrow \frac{d}{d\tau}E = c\cdot f^0$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = c\cdot f^0\cdot\frac{d\tau}{dt} = v\cdot F^*$$

– théorie classique : $\frac{dE^{cin}}{dt} = F\cdot V$

– théorie relativiste : $R^*$, $E^* = m\cdot c^2 \Rightarrow E = m\cdot c^2 + E^{cin}$ $\quad$ ← par identification $E^*_{cin} = 0$

Dynamique pt. mat. avec spin :




– évolution par rapport à $R^*(\tau)$ : $S^*_\alpha(\tau) = S^*_\alpha(0)$

$$\Rightarrow \boxed{S(\tau) = S^{*\alpha}\, e^*_\alpha(\tau)}$$

- comment passer de $e^*_\alpha(\tau)$ à $e^*_\alpha(\tau+\delta\tau)$ ; avec des boost infinitésimaux sans rotation

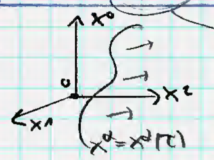
$$\begin{cases} e^*_0(\tau+\delta\tau) = e^*_0(\tau) + \frac{\delta V^{*i}}{c}\, e^*_i(\tau) \\ e^*_i(\tau+\delta\tau) = e^*_i(\tau) + \frac{\delta V^{*i}}{c}\cdot e^*_0(\tau) \end{cases}, \quad \delta V^{*i} = V_{R^*(\tau+\delta\tau)/R^*(\tau)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{de^*_0}{d\tau}} = \frac{1}{c}\cdot\frac{dV^{*i}}{d\tau}\cdot e^*_i = \frac{1}{c}\cdot\frac{dV^{*i}}{d\tau^*}\cdot e^*_i = \frac{1}{c}\,\dot\omega^{*\alpha}\cdot e^*_\alpha = \boxed{\frac{1}{c}\cdot\dot\omega}$$

- car dans le référentiel de repos, on a : $\omega \overset{*}{=} (c,0,0,0) = c\cdot e^*_0$

$$\boxed{\frac{de^*_i}{d\tau}} = \frac{1}{c}\frac{dV^{*i}}{d\tau}\cdot e^*_0 = \frac{1}{c}\frac{dV^{*i}}{d\tau^*}\, e^*_0 = \frac{1}{c}\cdot\dot\omega^{*\alpha} e^*_0 = \boxed{(\dot\omega\cdot e_i^*)\cdot\frac{\omega}{c^2}}$$

- car dans notre métrique : $\dot\omega^{*i} \overset{i=1,..,3,\ \text{et}\ \alpha=0,1,2,3}{=} \dot\omega^*_i = \dot\omega\cdot e_i^* = \frac{1}{c^2}(\dot\omega\cdot e_i^*)\cdot\omega$



<u>Transport d'un vecteur selon Fermi-Walker</u> : - par définition :

le long de la courbe $x^\alpha(\tau)$

$$V(\tau) = V^\alpha\cdot e^*_\alpha(\tau) \qquad \Big(\frac{1}{c^2}\dot\omega\cdot\overbrace{(V^i e^*_i + \underbrace{V^0 e^*_0}_{=0})}^{=V}\Big)\omega$$

$$\frac{dV}{d\tau} = V^\alpha\,\frac{de^*_\alpha}{d\tau} = \underbrace{V^0}_{=-V_0=-V\cdot e^*_0=-V\cdot\frac{\omega}{c}}\cdot\frac{1}{c}\dot\omega + V^i\cdot\Big(\frac{\dot\omega e_i^*}{c^2}\Big)\cdot\omega$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dV}{d\tau} = \frac{1}{c^2}\cdot(\dot\omega\cdot V)\cdot\omega - \frac{1}{c^2}(V\cdot\omega)\cdot\dot\omega}, \quad V(\tau=0)=V$$

- transf. un vecteur de façon // à lui-même relativement au réf. de repos.

<u>Rappel</u> : - transport // : $\frac{d}{d\tau}V^\alpha(\tau)=0$ ; $V^\alpha(\tau_0)=V^\alpha$ (indép. de la courbe)

- transport de Fermi-Walker : $\frac{d}{d\tau}V^\alpha(\tau) = \frac{1}{c^2}(\dot\omega\cdot V)\,\omega^\alpha - \frac{1}{c^2}(V\cdot\omega)\,\dot\omega^\alpha$ (dépend de la courbe)

<u>Exemple</u> : - particule de masse $m$, spin $S$ : $\omega\cdot\omega = c^2$ ; $\dot\omega\cdot\omega=0$ ; $x^\alpha = x^\alpha(\tau)$ ; $\omega^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}$ ; $S_\alpha = S_\alpha(\tau)$ ; $S^2 = s^2$ ; $S\cdot\omega$

- si les conditions $S\cdot S = s^2$ ; $S\cdot\omega=0$ ; $\omega\cdot\omega = -c^2$ sont satisfaites à $\tau=0$, alors elles le sont $\forall\tau$

- en effet :

$$\begin{cases} \omega\cdot\dot\omega = \frac{1}{m}\cdot\underbrace{\omega\cdot f}_{\omega\perp f} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\tau}(\omega\cdot\omega)=0 \Rightarrow (\omega\cdot\omega)(\tau) = (\omega\cdot\omega)(0) = -c^2 \\ \omega\cdot\dot S = \frac{1}{c^2}\cdot(\dot\omega\cdot S)(-c^2) \Rightarrow \omega\cdot\dot S + \dot\omega\cdot S = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\tau}(\omega\cdot S)=0 \Rightarrow (\omega\cdot S)(\tau) = (\omega\cdot S)(0) = 0 \\ S\cdot\dot S = \frac{1}{c^2}(\dot\omega\cdot S)\cdot\underbrace{(\omega\cdot S)}_{=0} \Rightarrow \frac{d}{d\tau}(S\cdot S)=0 \Rightarrow (S\cdot S)(\tau) = (S\cdot S)(0) = s^2 \end{cases}$$

#

<u>Remarque</u> : - <u>évolution d'un point matériel avec spin</u> : - on définit le tenseur énergie-impulsion par :

$$\boxed{T^{\alpha\beta}(x)} := m\cdot c\int_{\mathbb{R}} d\tau\;\omega^\alpha(\tau)\,\omega^\beta(\tau)\,\underbrace{\delta^4(x-x(\tau))}_{=\delta^0(x^0-x(\tau))\cdot\delta^3(\bar x-\bar x(\tau))}$$

$$= m\cdot c\cdot\omega^\alpha(t)\cdot\omega^\beta(t)\cdot\frac{1}{|\omega^0(t)|}\,\delta^3(x-x(\tau))$$

$$= \boxed{\breve m\cdot\frac{\omega^\alpha(t)\cdot\omega^\beta(t)}{\omega^0(t)/c}\,\delta^3(x-x(\tau))}$$

$$\breve\Pi^\beta(t) = \frac{1}{c}\int d^3v\; T^{0\beta}(t,\bar x) = \breve m\int d^3v\;\omega^\beta(t)\,\delta^3(x-x(\tau)) = \breve m\cdot\omega^\beta = \breve p^\beta$$

$$\boxed{j^\alpha_{[\beta\gamma]}(x) = \underbrace{x_\beta T^\alpha{}_\gamma(x) - x_\gamma T^\alpha{}_\beta(x)}_{=\,\ell^\alpha_{[\beta\gamma]}\ :\ \text{mo.cin.orbital}} + \underbrace{S^\alpha_{[\beta\gamma]}(x)}_{\text{mo.cin. de spin}}}$$

notation : $[\cdots] \equiv$ antisymétrique

$$\breve J_{\beta\gamma}(t) = \frac{1}{c}\int d^3v\; j^0_{\beta\gamma}(t,x) = [x_\beta p_\gamma - x_\gamma p_\beta] + S_{[\beta\gamma]}$$

- soit : $\partial_\alpha T^{\alpha\beta}(x) = f^\beta(x)$

$$\boxed{\partial_\alpha j^\alpha_{[\beta\gamma]}} = \partial_\alpha\{x_\beta T^\alpha{}_\gamma(x) - x_\gamma T^\alpha{}_\beta(x)\} + \partial_\alpha S^\alpha_{[\beta\gamma]}(x) = \boxed{x_\beta f_\gamma - x_\gamma f_\beta + \overbrace{m_{[\beta\gamma]}}^{=\partial_\alpha S^\alpha_{[\beta\gamma]}(x)}}$$

$$S^\alpha_{[\beta\gamma]} = \varepsilon_{\beta\gamma\mu\nu}\,\omega^\alpha(t)\,\omega^\mu(t)\,S^\nu(t)\cdot\frac{1}{\omega^0(t)}\,\delta^3(\bar x - x(t))$$

$$S^\alpha_{[\beta,\gamma]} = \varepsilon_{\beta\gamma\mu\nu}\cdot\frac{\omega^\mu(t)}{c}\cdot S^\nu(t) \Rightarrow S\cdot\omega = 0$$

- cf. feuilles photocopiées annexes. En définissant :

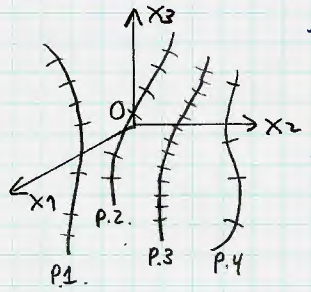
$$F_\beta(t) = \frac{\omega^0(t)}{c}\int d^3x\; f_\beta(t,\underline{x})$$

on obtient :

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau}p_\beta(t) = F_\beta(t) \\ \frac{d}{d\tau}L_{\beta\gamma} = x_\beta F_\gamma - x_\gamma F_\beta \end{cases}$$

- cf. feuilles $\Rightarrow$ $\boxed{m_{[\beta,\gamma]} = \varepsilon_{\beta\gamma\mu\nu}\{\dot\omega^\mu S^\nu + \omega^\mu\dot S^\nu\}\frac{\delta^3(\bar x - x(t))}{\omega^0(t)}}$

Systèmes de points matériels : $x_n^\alpha = x_n^\alpha(\tau_n)$ ; $\boxed{\omega_n^\alpha = \frac{dx_n^\alpha}{d\tau}}$ ; $\boxed{\Pi^\alpha_{(t)} = \sum_n \breve{m}_n \omega_n^\alpha(t)}$




– tenseur énergie-impulsion (extensivité)

$$\boxed{T^{\alpha\beta}_{mat}(t,\underline{x}) = \sum_n p_n^\alpha(t)\, v_n^\beta(t)\, \delta^3(x - x_n(t))} = \sum_n m_n c \int_{\mathbb{R}} d\tau\, \omega_n^\alpha(\tau)\, \omega_n^\beta(\tau)\, \delta^4(x - x_n(\tau))$$

– de manière analogue : $\Pi\cdot\Pi = -M^2\cdot c^2$ ; $\breve{\Pi}^\alpha = M\cdot\breve{\omega}_E^\alpha$

$$\begin{cases} E = M\cdot c\cdot \omega_E^0 = \dfrac{M\cdot c^2}{\sqrt{1 - V_E^2/c^2}} \\ \Pi = M\cdot\breve{\omega}_E = \dfrac{M\cdot V_E}{\sqrt{1 - V_E^2/c^2}} \end{cases}$$

– équations du mouvement : $\partial_\alpha T^{\alpha\beta}_{(n)} = f^\beta_{(n)}(x)$ pour 1 particule, alors en sommant sur $n$ on a :

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta}(x) = \sum_n f^\beta_{(n)}(x) \quad ; \quad f^\beta_{(n)}(x) = \frac{c}{\omega_n^0(t)} F^\beta_{(n)}\, \delta^3(x - x_n(t))$$

$$\Rightarrow \partial_\alpha T^{\alpha\beta}(x) = G^\beta(x) \quad ; \quad G^\beta(x) = \sum_n \frac{c}{\omega_n^0(t)} F^\beta_{(n)}\, \delta^3(x - x_n(t))$$

## VI. Electrodynamique

Introduction : – système CGS rationalisé utilisé

– $\mathrm{div}\, D = q \Rightarrow \sum_{i=1}^{3} \partial_i D^i = q$

– $\mathrm{rot}\, H = \frac{1}{c}\partial_t D + \frac{1}{c} j \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} H &= (H_1 = H^{23}\ ;\ H_2 = H^{31}\ ;\ H_3 = H^{12}) \\ B &= (B_1 = B_{23}\ ;\ B_2 = B_{31}\ ;\ B_3 = B_{12}) \\ j &= (j^1, j^2, j^3) \\ D &= (D^1, D^2, D^3) \\ E &= (E_1, E_2, E_3) \end{aligned}$$

$$j = j^\alpha(x) = (c.q(x)\ ;\ j(x)) \Longrightarrow \partial_\alpha j^\alpha = 0$$

$$Q(t) = \frac{1}{c}\int d^3x\, j^0(x) = \frac{1}{c}\int d^3x\, q(x)$$

$$H^{\alpha\beta} := \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & D^1 & D^2 & D^3 \\ \hline -D^1 & & & \\ -D^2 & & H^{ij} & \\ -D^3 & & & \end{array}\right)$$ , antisymétrique tens. électrodyn. ; $\partial_\alpha H^{\alpha\beta} = -\frac{1}{c} j^\beta$

$$B_{\alpha\beta} := \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ \hline E_1 & & & \\ E_2 & & B_{ij} & \\ E_3 & & & \end{array}\right)$$ , antisymétrique tens. induction

somme des permutations cycliques

$$\circlearrowleft_{\alpha\beta\gamma}\ \partial_\alpha B_{\beta\gamma} = 0$$

– dans le vide ds le syst. CGS rationalisé : $E_i = D^i$ ; $H_{ij} = B^{ij} \Longrightarrow$

$$H^{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\delta}\,\eta_{\beta\gamma}\, B_{\delta\gamma} \quad ; \quad \exists !\ \text{tenseur.}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -\frac{1}{c} j^\beta \\ \circlearrowleft \partial_\alpha F_{\beta\gamma} = 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow \exists\, A_\alpha(x)$ t.q. $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ ; $\boxed{A_\alpha(x) = (-\phi(x,t)\ ;\ A(x,t))}$

– $\forall \chi = \chi(x)$, alors : $A_\alpha(x) \longrightarrow A'_\alpha(x) = A_\alpha(x) + \partial_\alpha \chi(x)$
$\downarrow$
$F'_{\alpha\beta}(x) = F_{\alpha\beta}(x)$ } transformation de Jauge

$$\Longrightarrow \partial^\alpha F_{\alpha\beta} = -\frac{1}{c} j_\beta \Rightarrow \boxed{\partial^\alpha\partial_\alpha A_\beta - \partial^\alpha\partial_\beta A_\alpha = -\frac{1}{c} j_\beta}$$

– choix de jauge : $\partial_\alpha A^\alpha = 0 \Longrightarrow \boxed{\Box A^\alpha = -\frac{1}{c} j^\alpha}$

– avec : $j(t,x) = \sum_n \breve{e}_n\cdot V_n(t)\cdot \delta^3(x - x_n(t))$

$$\partial_i j^i(t,x) = \sum_n \breve{e}_n\, V_n^i(t)\, (-1)\frac{\partial}{\partial x_i^n}\, \delta^3(x - x_n(t))\frac{dx_i^n}{dt} = -\sum_n \breve{e}_n\cdot V_n^i(t)\cdot\frac{\partial}{\partial t}\,\delta^3(x - x_n)$$

$$\Longrightarrow \partial_i j^i(t,x) + \frac{\partial}{c\partial t}\underbrace{\left\{\sum_n \breve{e}_n\, V_n^i(t)\, \frac{\partial}{\partial t}\delta^3(x - x_n)\right\}}_{= j^0} = 0$$

$$\Longrightarrow \partial_\alpha j^\alpha(t,x) = 0 \quad \#$$

Définition : – tenseur énergie-impulsion : $\boxed{T^{(\alpha\beta)}_{em}(x) = F^{\alpha\rho}(x)\cdot F^\beta_{\ \rho}(x) - \frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta}\, F^{\rho\sigma}(x)\cdot F_{\rho\sigma}(x)}$

Remarque : – tenseur énergie-impulsion : 

$$\begin{aligned} \partial_\alpha T^{(\alpha\beta)}_{em}(x) &= (\partial_\alpha F^{\alpha\rho})\, F^\beta_{\ \rho} + \underbrace{F^{\alpha\rho}(\partial_\alpha F^\beta_{\ \rho}) - \tfrac{1}{2}(\partial^\beta F^{\rho\sigma})\, F_{\rho\sigma}}_{=0} \\ &= \frac{1}{c} j^\rho F^\beta_{\ \rho} \\ &= -\sum_n \breve{e}_n \frac{\omega_n^\rho(t)}{\omega_n^0(t)}\, \delta^3(x - x_n(t))\, F^\beta_{\ \rho}(x) \quad , f_n^\alpha(x) = \frac{c}{\omega_n^0} F_n^\alpha\, \delta(x - x_n) \\ &= -\partial_\alpha T^{(\alpha\beta)}_{matière} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ il y a échange d'énergie / qtté mvt entre le champ e.m. et les particules (matière)

$$\Rightarrow \partial_\alpha \left( T^{(\alpha\beta)}{}_{em} + T^{(\alpha\beta)}{}_{\text{matière}} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{T^{(\alpha,\beta)} := T^{(\alpha,\beta)}{}_{e.m.} + T^{(\alpha,\beta)}{}_{\text{matière}}} \quad \text{t.q.} \quad \partial_\alpha T^{(\alpha,\beta)} = 0 \quad \text{1er principe}$$

## VII. Hydrodynamique relativiste

**Introduction:** – motivation: en relativité générale, la matière joue le rôle des sources ; la structure sera la même que celle de l'hydrodynamique.

– on commence par un cas simple où $\exists$ que 1 fluide sans réactions (1 composante chimique)

– cas classique: – état défini par 5 champs: $\{\vec{V}(x,t) ; m(x,t) ; s(x,t)\}$ avec 5 équations du mouvement
conséquence par l'invariance/groupe de Galilée

– cas relativiste: – on doit remplacer la condition pour $m(x,t)$. Postulat: $\exists$ grandeur extensive conservée, scalaire par rapport au groupe de Lorentz, appelée quantité de substance, i.e. $j_N^\alpha(x)$ t.q.

$$N[\lambda(\cdot)] = \frac{1}{c}\int_{\lambda(x)=0} d\sigma_\alpha(x)\, j_N^\alpha(x) \quad ; \quad N(t) = \frac{1}{c}\int_{\mathbb{R}^3} d^3v(x)\, j_N^0(t,x)$$

$$j_N(x)\cdot j_N(x) \le 0$$

$$j_N^0 > 0 \quad \text{(référentiel orthochrone)}$$

– on va caractériser le fluide par un tenseur énergie–impulsion

6 équations
$$\begin{cases} T^{(\alpha\beta)}(x) & \text{t.q.} \quad \partial_\alpha T^{(\alpha\beta)}(x) = 0 \quad \beta = 0,\dots,3 \quad (1^{er}\text{ principe}) \\ j_S^\alpha(x) & \text{t.q.} \quad \partial_\alpha j_S^\alpha(x) = i(x) \quad (\text{irréversibilité})\ (2^{è}\text{ principe}) \\ j_N^\alpha(x) & \text{t.q.} \quad \partial_\alpha j_N^\alpha(x) = 0 \quad (\text{continuité}) \end{cases}$$

– postulat: état du fluide est caractérisé par 5 champs
$\Rightarrow \exists$ 6 champs $\{w_\beta(x) ; T(x) ; \mu(x)\}$ t.q. (équation de liaison)

$$\boxed{\begin{aligned} &w_\beta \partial_\alpha T^{\alpha\beta} + T(x)\left[\partial_\alpha j_S^\alpha - i\right] + \mu\, \partial_\alpha j_N^\alpha = 0 \quad (\ast) \\ &w\cdot w < 0 \quad ; \quad w\cdot w = -c^2 \quad ; \quad w^0 > 0 \end{aligned}}$$

$$(w^0)^2 = c^2 + \vec{w}^2$$

**Postulat:** – l'état du fluide est défini par les 6 champs $w_\alpha(x)$, $T(x)$, $\mu(x)$, où $w\cdot w = -c^2$, $w_0(x) > 0$
– champs physiques $T^{\alpha\beta}$, $j^\alpha_S$, $j^\alpha_N$, $i$ sont fonction de $w_\beta$, $T$, $\mu$ et des gradients (linéaire)

**Définition:** – fluide parfait: – un fluide qui ne dépend que $w_\beta(x)$, $T(x)$, $\mu(x)$ et non des gradients ($T^{\alpha\beta}(x)$ fct. de $w, T, \mu$)

$$\Rightarrow \boxed{T^{\alpha\beta}(x) = m\cdot w^\alpha w^\beta + \eta^{\alpha\beta}\cdot p(x)} \quad , \quad m(x) = m(T(x), \mu(x)) \quad p(x) = p(T(x), \mu(x))$$

**Remarque:** – il faut que avec cette déf. de $T^{\alpha\beta}(x)$, l'équation $(\ast)$ soit satisfaite

$$\begin{aligned} w_\beta \partial_\alpha T^{\alpha\beta} &= w_\beta\, \partial_\alpha(m\cdot w^\alpha w^\beta) + w_\beta\, \partial^\beta p(x) \\ &= \partial_\alpha(m\cdot w^\alpha \underbrace{w^\beta w_\beta}_{=-c^2}) - m\cdot w^\alpha \underbrace{w^\beta \partial_\alpha w_\beta}_{=0} + \underbrace{w_\beta\, \partial_\beta p(x)}_{= w_\beta\cdot\{s\,\partial_\beta T + \eta\, \partial_\beta \mu\}} \end{aligned}$$

$$s = \frac{\partial p}{\partial T} \quad , \quad n = \frac{\partial p}{\partial \mu}$$

$$= \partial_\beta(w^\beta s T) - T\,\partial_\beta(w^\beta s) + \partial_\beta(w^\beta n \mu) - \mu\, \partial_\beta(w^\beta n)$$

$$= \partial_\alpha\left\{w^\alpha\cdot(-mc^2 + s\cdot T + n\mu)\right\} - T\,\partial_\beta\{w^\beta s\} - \mu\,\partial_\beta\{w^\beta n\}$$

$$\overset{(\ast)}{=} -T\cdot\left\{\partial_\beta j^\beta_S - i\right\} - \mu\, \partial_\beta j^\beta_N \qquad \forall x, t$$

$\Rightarrow i \equiv 0$ : fluide parfait $\Leftrightarrow \nexists$ production d'entropie dans le système: pas de viscosité, etc.

– identification des termes:

$$\boxed{j^\beta_S = w^\beta s} \quad \boxed{j^\beta_N = w^\beta n} \quad \boxed{n = \frac{\partial p}{\partial \mu}} \quad \boxed{T\cdot s + n\cdot\mu = m\cdot c^2}$$

– par analogie avec le cas classique $u = T\cdot s - p + \mu n$, on pose par définition:

$$\rho_E := -p + T\cdot s + \mu\cdot n = \boxed{-p + T\cdot\frac{\partial p}{\partial T} + \mu\cdot\frac{\partial p}{\partial \mu} = \rho_E(s,n) = -p + m\cdot c^2}$$

– interprétation des grandeurs: $j^\alpha_N(x) = n(x)\cdot w^\alpha(x)$

$\Rightarrow$ vitesse du fluide au point $x$:
$$\begin{cases} \vec{v}(x) = c\cdot\dfrac{\vec{j}(x)}{j_0(x)} = c\cdot\dfrac{\vec{w}(x)}{w^0(x)} \\ w^0(x) = \dfrac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases} \Rightarrow (w^0)^2 - \overbrace{\vec{w}^2}^{= w_0^2\cdot\frac{v^2}{c^2}} = c^2$$

– référentiel local de repos du fluide: – c'est le réf. t.q. le centre d'énergie est au repos, i.e. c'est le référentiel où $w_\alpha(x) = (c,0,0,0)$ $\forall x$

$$R^*(x) \quad \text{t.q.} \quad w^\alpha(x) \overset{*}{=} (c,0,0,0)$$

$$\Rightarrow \{j^\alpha_N\} \overset{*}{=} (n(x)\cdot c, 0, 0, 0) \quad ; \quad N(t) = \frac{1}{c}\int d^3v(x)\, j^0(t,x)$$

$\Rightarrow \begin{cases} n(x) \equiv \text{densité locale par rapport à } R^* \\ s(x) \equiv \text{densité d'entropie par rapport à } R^* \end{cases}$ (car $N$ indép. de $R$, mais $V$ dépend de $R^*$) $\{j_S^\alpha(x)\} \overset{*}{=} (s(x)\cdot c, 0, 0, 0)$

$$T^{00} \overset{*}{=} m\cdot c^2 - p := \rho_E \quad (\text{densité d'énergie par rapport à } R^*)$$

$$\frac{\partial \rho_E}{\partial s} = T \; ; \; \frac{\partial \rho_E}{\partial n} = \mu \quad \Rightarrow \quad T = \text{temp.}/R^* \; ; \; \mu = \text{pot. chim.}/R^* \; ; \; p = \text{pression}/R^*$$

$$\Rightarrow \boxed{T^{(\alpha,\beta)} = (\rho_E + p)\cdot\frac{\omega^\alpha\omega^\beta}{c^2} + \eta^{\alpha\beta}\,p}$$

<u>Equations d'évolution</u> : – pour le fluide parfait : $\partial_\alpha j^\alpha_N = 0$ ; $\partial_\alpha(n\omega^\alpha) = 0$ ; $\Rightarrow$

1) $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(n\cdot\omega^0\cdot\frac{\omega^\alpha}{\omega^0}\right) \overset{\alpha=1}{=} 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(n\cdot\frac{\omega^0}{c}\right) + \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(n\cdot\frac{\omega^0}{c}\cdot v^\alpha\right) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{n}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right\} + \partial_i\left\{\frac{n}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\cdot v^i\right\} = 0} \qquad \text{I}$$

2) $\partial_\alpha j^\alpha_s = 0 \Rightarrow \partial_\alpha\left(\frac{s}{n}(n\cdot\omega^\alpha)\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{d\tau}\left(\frac{s}{n}\right) = 0$

$\frac{\omega_0}{c}v^\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{s}{n}\right) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_t\frac{s}{n} + v^i\,\partial_i\left(\frac{s}{n}\right) = 0} \qquad \text{II}$$

3) $\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow$, avec $\beta = 0$ : $\partial_\alpha(m\omega^\alpha\omega^\beta) + \partial^\beta p = 0$

$\Rightarrow n\cdot\omega^\alpha\partial_\alpha\underbrace{\left(\frac{m}{n}\omega^\beta\right)}_{\frac{m}{n}\cdot\frac{\omega^0}{c}\cdot v^\beta} + \partial^\beta p = 0$

$$\overset{\beta=0}{\Longrightarrow} \boxed{m\cdot\omega^\alpha\partial_\alpha\left(\frac{m}{n}\omega^0\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}p^0 = 0}$$

pour $\beta \neq 0$ : $m\cdot\omega^\alpha\partial_\alpha\left(\frac{m}{n}\frac{\omega^0}{c}v^\alpha\right) - \frac{1}{c}\partial_i p = 0$

$v_i\cdot\frac{1}{c}\partial_t p + m\left(\frac{\omega^0}{c}\right)^2 v_\alpha\partial_\alpha v^i$

$v^\alpha\partial_\alpha v^i = -\left\{\partial^i p + \frac{v_i}{c}\partial_t p\right\}\cdot\frac{1}{m\cdot\left(\frac{\omega^0}{c}\right)^2}$

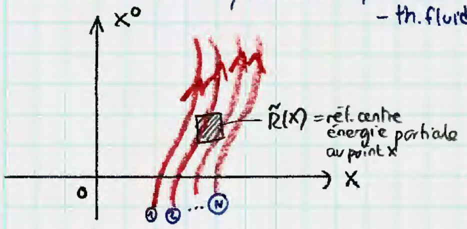
$\partial_t v^i + v^j\partial_j v^i = -\frac{1}{m}\cdot(1-v^2/c^2)\left\{\partial^i p + \frac{v_i}{c}\partial_t p\right\}$

$$\boxed{\partial_t\vec{v} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\cdot\vec{v} = -\underbrace{\frac{1-v^2/c^2}{m}}_{\text{correction relativiste}}\left[\overrightarrow{\text{grad}}\,p + \underbrace{\frac{\vec{v}}{c}\partial_t p}_{\text{correction relativiste}}\right]} \qquad \text{III} \to \text{V}$$

– en conclusion, on a $\vec{v}(t,x)$, $n(t,x)$, $s(t,x)$ + 1 équation d'état $\rho_E = \rho_E(s,n)$ $\Rightarrow$ 5 éqn. ; 5 grandeurs

<u>Remarque</u> : – soit $\tilde{R}(x)$ le référentiel local de repos au point $x$, alors : $\tilde{T}^i{}_i = p \Rightarrow \boxed{p(x) = \frac{1}{3}\,Tr_3(\tilde{T}(x))}$

<u>Connection</u> : – <u>entre système de particules et fluide au repos</u> : $T^{\alpha\beta}(x) = \sum_N c^2\frac{p_N^\alpha p_N^\beta}{E_N}\delta^3(x - x_N(t)) = \sum_{r=1}^N M^2c^2\frac{\omega_r^\alpha\omega_r^\beta}{E_r}\delta^3(x - x_r(t))$




– th. fluides :

- $n(x) = \sum_{r=1}^N \delta^3(x - x_r(t))$
- $\rho_E(x) = \tilde{T}^{00}(x) \Rightarrow \rho_E(x) = \sum_{r=1}^N \tilde{E}_r\,\delta^3(x - x_r(t))$
- $p(x) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^3 \tilde{T}^i{}_i(x) = \frac{1}{3}\sum_N c^2\frac{\vec{p}_N^{\,2}}{\tilde{E}_N}\delta^3(x - x_N(t)) \leq \frac{1}{3}\sum_{r=1}^N \tilde{E}_r\,\delta^3(x - x_r(t))$

$\Rightarrow 0 \leq p(x) \leq \frac{1}{3}\rho_E(x)$ , égalité : $p(x) = \frac{1}{3}\rho_E(x) \Longleftrightarrow M = 0$

– de la même manière :

$p_r^2 = \left(\frac{E_r}{c}\right)^2 - M^2c^2 \geq \frac{E_r^2}{c^2} - E_r\cdot M$ , $M\cdot c^2 < E_r \Rightarrow -Mc^2 > -E_r$

$\Rightarrow c^2\cdot\frac{p_r^2}{E_r} \geq E_r - M\cdot c^2$

$\Rightarrow p(x) \geq \frac{1}{3}\sum_r\left\{E_r - M\cdot c^2\right\}\delta^3(x - x_r(t)) \geq \frac{1}{3}\left\{\rho_E(x) - M\cdot c^2 n(x)\right\}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{3}\left[\rho_E - M\cdot c^2 n(x)\right] \leq p(x) \leq \frac{1}{3}\rho_E(x)}$$

<u>Gaz froid</u> : $|p_r|^2 \ll M^2\cdot c^2$ $\forall r$, alors dans le cas du gaz froid :

$E_r = M\cdot c^2\cdot\sqrt{1 + \frac{p_r^2}{M^2\cdot c^2}} \simeq M\cdot c^2\cdot\left\{1 + \frac{1}{2}\frac{p_r^2}{M^2\cdot c^2}\right\} = M\cdot c^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{p_r^2}{M}$ (rel. classique)

$\rho_E(x) = \sum_{r=1}^N\left\{M\cdot c^2 + \frac{1}{2M}p_r^2\right\}\delta^3(x - x_r(t)) \cong M\cdot c^2\cdot n(x) + \sum_{r=1}^N\frac{1}{2\cdot M\cdot c^2}c^2 p_r^2\,\delta^3(x - x_r(t)) = M\cdot c^2\cdot n(x) + \frac{3}{2}p(x)$

$$\Rightarrow \boxed{p(x) = \frac{2}{3}\left(\rho_E(x) - M\cdot c^2\cdot n(x)\right) = \frac{2}{3}u(x)}$$

– alors que le G.P. en thermodynamique : $p = \rho\cdot R\cdot T$ ; $u = \frac{3}{2}\rho\cdot R\cdot T \Rightarrow p = \frac{2}{3}u$

<u>Gaz chaud</u> : relativiste, ou bien rayonnement pur : $|p_r|^2 \gg M^2\cdot c^2$ : $E_r^2 = c^2 p_r^2 + M^2\cdot c^4 \approx c^2\cdot p_r^2$, i.e. $M = 0 \Rightarrow$

$p(x) \simeq \frac{1}{3}\sum_{r=1}^N E_r\,\delta^3(x - x_r(t)) \Rightarrow \boxed{p(x) = \frac{1}{3}\rho_E(x)}$

<u>Généralisation</u> : $\rho_E(x) = M\cdot c^2\cdot n(x) + \frac{1}{\gamma - 1}\cdot p(x)$ , $\gamma = 5/3$ gaz froid ; $\gamma = 4/3$ gaz chaud. (GAZ POLYTROPE)

et $\Rightarrow \gamma \geq 4/3$

<u>Conclusion</u> : – toute la rel. restreinte a été discutée dans le cas de coordonnées cartésiennes, et à chaque fois nous avons pu définir le tenseur énergie-impulsion, ainsi que les éqn. du mouvement.

# II) Relativité GÉNÉRALE

**Introduction :** – nous avons discuté l'approche : 1630 : Galilée, 1680 : Newton $\} \to \{$ Mach 1900 $\} \to \{$ Einstein relativité générale $\}$

– que peut-on dire à propos de la relativité de Galilée ? Idée : chute des corps m. vitesse $\to$ loi de gravitation universelle
$\to$ Newton formule le principe d'équivalence : les masses d'inertie et gravifiques sont les mêmes

– principe d'équivalence : $m = m^*$ (1680)

– $\boxed{\text{Mach}}$ : 3 questions qui remontent à Newton et Galilée :
(1900) i) mvt. relatif et mvt. absolu : distinction ? Impossible à réaliser pour Newton : $\nexists$ définition réf. absolu/relatif
ii) quelle est l'origine de l'inertie (masse d'inertie $m$)
iii) pourquoi $m = m^*$ (Cavendish)

$\to$ conclusion de Mach : tous les référentiels sont équivalents pour la description des phénomènes physiques, mais l'accélération dépend du référentiel, ainsi que de la force

$\to$ controverse entre Mach et Einstein : manière de définir le référentiel d'inertie.

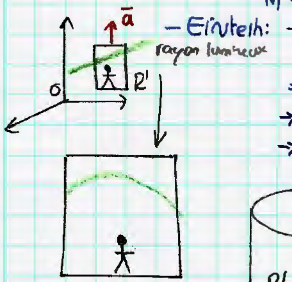
– expérience du seau : l'origine de la masse d'inertie est due à l'action gravifique de l'ensemble de l'univers sur la particule.

$\to$ hypothèse que la masse a la même action que la charge électrique $\Rightarrow m = m^*$

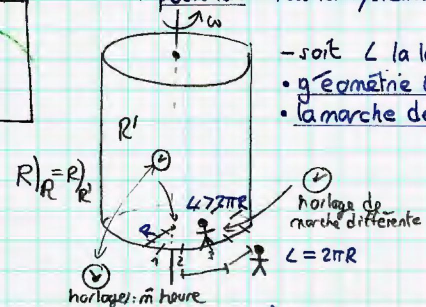
– il faut introduire une force d'inertie pour passer d'un réf. à l'autre : $\begin{cases} \bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_e \\ \bar{a} = g(x) \end{cases}$ $\to$ par un bon choix du réf. on peut éliminer le champ gravifique

– principe d'équivalence de Einstein : – avec un référentiel bien choisi, on peut toujours avoir un système où $\nexists$ de champ gravifique $\to$ la rel. restreinte sera encore valable dans ce réf.
$\to$ va nous permettre de construire la rel. générale.

– Mach : i) Tous les référentiels (immobile, en mouvement, par rapport à l'univers) sont équivalents
(1900) ii) accélération ET force sont des concepts relatifs
iii) „ $g(x,t)$ est un concept relatif : $\exists\ \mathbb{R}^4(x,t)$ t.q. $g(x,t)|_{\mathbb{R}^4} = 0$
iv) l'„inertie" est due à la répartition de masse dans l'univers




– Einstein : – pour l'observateur dans $R'$, il n'a aucune manière de savoir si il est accéléré par rapport au vide ou si il est soumis à un champ gravifique (surface de la terre p.ex.) : $\boxed{\text{gravitation} \leftrightarrow \text{accélération}}$
$\Rightarrow$ tous les phénomènes sont observés par rapport à un référentiel immobile en présence de champ gravifique.
$\to \exists$ action du champ de gravitation sur la lumière
$\to$ postulat : tous les systèmes de coordonnée sont équivalents



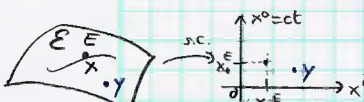

– soit $L$ la longueur de la circonférence, alors en présence d'un champ de gravitation la
• géométrie Euclidienne n'est plus valable
• la marche des horloges est différente

– relativité générale : i) théorie classique ($\neq$ quantique) de la gravitation relativement à n'importe quel système de coordonnée (on retrouve la relativité restreinte dans la limite sans champ gravitationnel)

**Principes :** 1) Principe d'objectivité : $\{\text{événements}\} \longrightarrow \mathbb{R}^4$ : paramétrisation sur des VARIÉTÉS : variété de dimension 4
$\mathcal{E} = \{\text{événement}\} \longrightarrow \mathbb{R}^4$ : tous les syst. de coord. sont équivalents.

2) Principe de covariance : – tous les syst. de coord. étant équivalents $\Rightarrow$ les lois de la physique ont la même forme par rapport à n'importe quel système de coordonnées (covariance des équations) $\Rightarrow$ ANALYSE TENSORIELLE

3) Principe d'équivalence : – faible : parmi tous les syst. de coordonnées, $\exists$ syst. coord. inertiel local t.q. par rapport à ce syst. de coordonnées, le principe d'inertie est valable (cmpt. mat. soumis à aucune force a un mouvement rectiligne uniforme) $\Rightarrow$ la variété $\mathcal{E}$ est pseudo-riemannienne ; le mvt. particule libre en chute correspond à une géodésique sur cette variété : tenseur métrique $g_{\mu\nu}(x)$ (cinématique)

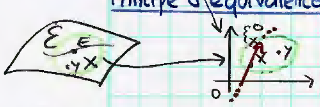



– fort : – par rapport au système de coordonnée inertiel local, les lois de la physique sont localement identiques à celles de la relativité restreinte.

4) Principe de Mach : – la matière crée la géométrie (métrique), et la géométrie agit sur la matière (géodésiques)

5) Principe de correspondance : – la théorie de la gravitation (Einstein) doit redonner la théorie de Newton dans la limite de champ gravifique faible et statique.

## Chapitre 8 : Principe d'équivalence et conséquences




**Principe d'équivalence :** – faible : $\forall x \in \mathcal{E}\ \exists$ syst. coord. inertiel local t.q. dans un voisinage le mvt d'une particule en chute libre ait la même forme qu'en relativité restreinte, i.e. en l'absence de gravitation.
– fort : $\forall x \in \mathcal{E}\ \exists$ syst. coord. inertiel local t.q. dans un voisinage les lois de la physique ont la même forme que celles d'une particule libre en relativité restreinte, i.e. en l'absence de gravitation.

$$\xi_x^\alpha = \xi_x^\alpha(x^0, x^1, x^2, x^3)\ \forall\alpha \Rightarrow x^\alpha = x^\alpha(\xi_x^0, \xi_x^1, \xi_x^2, \xi_x^3) \in C^2$$

$$\left\{\frac{\partial \xi_x^\alpha}{\partial x^\mu}\right\}_{\alpha,\mu=1}^4 \text{ possède une inverse } \left\{\frac{\partial x^\mu}{\partial \xi_x^\alpha}\right\}_{\mu\alpha=1}^4 ; \begin{cases} \dfrac{\partial \xi_x^\alpha}{\partial x^\mu}\cdot\dfrac{\partial x^\nu}{\partial \xi_x^\alpha} = \delta_\mu^\nu \\ \dfrac{\partial \xi_x^\alpha}{\partial x^\mu}\cdot\dfrac{\partial x^\mu}{\partial \xi_x^\beta} = \delta^\alpha_\beta \end{cases}$$

**Particule en chute libre :** – le principe d'équivalence faible nous dit que par rapport à ce syst. de coord, le principe d'inertie est valable. En rel. restreinte : $\frac{du}{d\tau} = 0$ : par rapport à ce syst. coord.

– principe équiv. faible : $\frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = 0$ ; $d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha d\xi^\beta$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\tau}\left(\frac{d}{d\tau}\xi^\alpha(x^0(\tau),x^1(\tau),x^2(\tau),x^3(\tau))\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\tau}\left[\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\cdot\frac{dx^\mu}{d\tau}\right] = \frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu\partial x^\nu}\cdot\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau} + \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\cdot\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial\tau^2} = 0 \qquad \cdot\frac{\partial x^\rho}{\partial\xi^\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial x^\rho}{\partial\xi^\alpha}\cdot\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu\partial x^\nu}\cdot\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau} + \delta^\rho_\mu\cdot\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial\tau^2} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\underbrace{\frac{\partial x^\rho}{\partial\xi^\alpha}\cdot\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu\partial x^\nu}\cdot\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau}}_{\text{nouveau terme}} + \underbrace{\frac{d^2x^\rho}{d\tau^2}}_{\text{relativité restreinte}} = 0}$$

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\cdot\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu}dx^\mu dx^\nu = -\underbrace{g_{\mu\nu}(x)}_{\text{champ tensoriel qui dépend de } x \text{ (métrique)}}dx^\mu dx^\nu$$

$$\boxed{g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\cdot\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu}\eta_{\alpha\beta}} = g_{\nu\mu}(x)$$

$$\boxed{\Gamma^\rho_{\mu\nu} := \frac{\partial x^\rho}{\partial\xi^\alpha}\cdot\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu\partial x^\nu}} = \Gamma^\rho_{\nu\mu}(x) \qquad \text{CONNEXION AFFINE}$$

→ équation du mouvement : $\boxed{\frac{d^2x^\rho}{d\tau^2} + \Gamma^\rho_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\cdot\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0}$ : particule en chute libre ; $m>0$.

valable aussi avec $x\to x'$, $\tau\to\tau'$ ; $\Gamma\to\Gamma'$, $g\to g'$

EQUATION DES GÉODÉSIQUES : distance minimale entre 2 points (éqn de la droite) (équation du mouvement)

– éqn. du mvt. pour une particule de masse $m=0$ :

$\xi^\alpha = \xi^\alpha(\sigma)$ ; $\frac{d^2\xi^\alpha}{d\sigma^2} = 0$ ; $\boxed{0 = -\eta_{\alpha\beta}\frac{d\xi^\alpha}{d\sigma}\cdot\frac{d\xi^\beta}{d\sigma}}$ ; $g_{\mu\nu}(x)\cdot\frac{dx^\mu}{d\sigma}\cdot\frac{dx^\nu}{d\sigma} = 0$

$$\boxed{\frac{d^2x^\rho}{d\sigma^2} + \Gamma^\rho_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\sigma}\cdot\frac{dx^\nu}{d\sigma} = 0}$$

– unicité de $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ ; $g_{\mu\nu}(x)$ : il faut que ce soit les mêmes ∀ référentiel inertiel local : de tels réf. sont obtenus par transf. de Lorentz sur un réf. inertiel local : $\xi^\alpha \to \xi'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta\xi^\beta + a^\alpha$

$$\text{indép. du syst. inert. local}\begin{cases}\tilde g_{\mu\nu}(x) := \frac{\partial\xi'^\alpha}{\partial x^\mu}\cdot\frac{\partial\xi'^\beta}{\partial x^\nu}\eta_{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha{}_\gamma\frac{\partial\xi^\gamma}{\partial x^\mu}\Lambda^\beta{}_\delta\frac{\partial\xi^\delta}{\partial x^\nu}\eta_{\alpha\beta} = \tilde g_{\mu\nu}(x) \\ \tilde\Gamma^\rho_{\mu\nu}(x) = \dots = \Gamma^\rho_{\mu\nu}(x)\end{cases}$$

$\Lambda\Lambda\eta \overset{\text{déf.}}{=} \eta_{\gamma\delta}$ # métrique indép. du syst. inertiel local choisi

<u>Remarque</u> : – changement de coordonnées : $g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x'^\mu}\cdot\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x'^\nu}\eta_{\alpha\beta}$ : les lois restent les mêmes, avec $\xi = \xi(x(x'))$ ⇒

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\rho}\cdot\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\sigma}\cdot\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\cdot\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\eta_{\alpha\beta}$$
$$= g_{\rho\sigma}(x(x'))\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\cdot\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}$$

⇒ formule de transformation de la métrique :

$$\boxed{g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\cdot\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\cdot g_{\rho\sigma}}$$

⇒ connexion affine :

$$\Gamma'^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial\xi^\rho}\cdot\frac{\partial^2\xi^\rho}{\partial x'^\nu\partial x'^\mu}$$
$$= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha}\cdot\frac{\partial x^\alpha}{\partial\xi^\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left\{\frac{\partial\xi^\rho}{\partial x^\gamma}\cdot\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu}\right\}\cdot\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu}$$
$$= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha}\cdot\frac{\partial x^\alpha}{\partial\xi^\rho}\cdot\left\{\frac{\partial^2\xi^\rho}{\partial x^\beta\partial x^\gamma}\cdot\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu} + \frac{\partial\xi^\rho}{\partial x^\gamma}\cdot\frac{\partial^2x^\gamma}{\partial x^\beta\partial x'^\nu}\right\}\cdot\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu}$$
$$= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha}\cdot\frac{\partial x^\alpha}{\partial\xi^\rho}\cdot\left\{\frac{\partial^2\xi^\sigma}{\partial x^\beta\partial x^\gamma}\underbrace{\delta^\rho_\sigma}_{=\frac{\partial\xi^\rho}{\partial x^\delta}\cdot\frac{\partial x^\delta}{\partial\xi^\sigma}}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu}\cdot\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} + \frac{\partial\xi^\rho}{\partial x^\gamma}\cdot\frac{\partial^2x^\gamma}{\partial x'^\nu\partial x'^\mu}\right\}$$
$$= \Gamma^\rho_{\beta\gamma}\cdot\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha}\cdot\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu}\cdot\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu} + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha}\cdot\frac{\partial^2x^\alpha}{\partial x'^\nu\partial x'^\mu} \rightarrow \Gamma \text{ pas un tenseur (cf. plus loin)}$$

$$\boxed{\Gamma'^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\beta\gamma}\cdot\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha}\cdot\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu}\cdot\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu} + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha}\cdot\frac{\partial^2x^\alpha}{\partial x'^\nu\partial x'^\mu}}$$

– on peut vérifier que avec le changement de coordonnées ci-dessus on a :

$$\frac{d^2x^\rho}{d\sigma^2} + \Gamma^\rho_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\sigma}\cdot\frac{dx^\nu}{d\sigma} = 0 \Longrightarrow \frac{d^2x'^\rho}{d\sigma^2} + \Gamma'^\rho_{\mu\nu}\frac{dx'^\mu}{d\sigma}\cdot\frac{dx'^\nu}{d\sigma}, \quad \sigma = \tau$$

→ c'est une illustration du principe de covariance : <u>les équations ont la même forme ∀ système de coordonnées</u> : ≠ éq. de Newton où on doit ajouter les forces de Coriolis, etc.

<u>Remarques</u> : – connaissant $g_{\mu\nu}(x)$ et $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x)$ par rapport à un système de coordonnées, alors on peut déterminer le système de coordonnées locales $\xi^\alpha_x$ à des constantes près : ces constantes correspondent aux transformations de Lorentz.

– distinction entre un esp. Riemanien sans/avec gravitation : si ∃ un système de coordonnées t.q. $g'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ ; $\Gamma'^\lambda_{\mu\nu} = 0$, alors on dira que l'on a un système sans gravitation ∀ $x \in \mathbb{R}^4$. Sinon on dira que l'on a un système en présence de gravitation ⇒ Tous les effets de la gravitation sont contenus dans $g_{\mu\nu}$ et $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$. On verra de plus que $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ est entièrement déterminé par $g_{\mu\nu}$ ⇒ tous les effets de la gravitation sont contenus dans $g_{\mu\nu}$.

– le tenseur métrique possède un inverse : $g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\cdot\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu}\eta_{\alpha\beta}$ ; inverse : $g^{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x^\mu}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial\xi^\beta}\eta^{\alpha\beta}$

$\eta^{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1_3\end{pmatrix}$, alors on vérifie que : $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = \mathbb{1}$

– si on a de la gravitation, alors on est tenté d'introduire une distribution de masse (analogie : distribution de charge), mais la forme des équations change : gravitation : non linéaire ; champ E.M. : linéaire.
– soit le syst. coord. inertiel local $\{\xi\}$, alors :

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial \xi_x^\alpha}{\partial x^\mu}\cdot\frac{\partial \xi_x^\beta}{\partial x^\nu}\, g_{\alpha\beta}(\xi(x))$$

avec le principe d'équivalence faible : on sait que en $\xi=\bar\xi$ on a $g^x_{\alpha\beta}(\xi) = \eta_{\alpha\beta} \Rightarrow \begin{cases} g^x_{\alpha\beta}(\xi(x)) = \eta_{\alpha\beta} + h(\xi) \\ h_{\alpha\beta}(\xi=\bar\xi) = 0 \end{cases}$

avec : $h(\xi) = \underbrace{h(\bar\xi)}_{=0} + \cancel{\frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial \xi_\lambda}}(\xi=\bar\xi)\cdot(\xi-\bar\xi) + \frac{\partial^2 h_{\alpha\beta}}{\partial\xi_\lambda\partial\xi_{\lambda'}}(\xi=\bar\xi)\cdot(\xi-\bar\xi)^2 + \dots$

$=0$ par le principe d'équivalence faible

remplaçant ce développement et en l'explicitant : $=0$ (principe d'équivalence ci-dessus)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x^\lambda} g_{\mu\nu}(x)\Big|_X &= \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left[\frac{\partial \xi_x^\alpha}{\partial x^\mu}\cdot\frac{\partial \xi_x^\beta}{\partial x^\nu}\, g^x_{\alpha\beta}(\xi(x))\right]_X \\
&= \underbrace{g^x_{\alpha\beta}(\xi(x))\big|_{\bar\xi}}_{=\eta_{\alpha\beta}}\cdot\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left[\frac{\partial \xi_x^\alpha}{\partial x^\mu}\cdot\frac{\partial \xi_x^\beta}{\partial x^\nu}\right]_X \\
&= \eta_{\alpha\beta}\cdot\frac{\partial^2 \xi_x^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\mu}\cdot\frac{\partial \xi_x^\beta}{\partial x^\nu} + \eta_{\alpha\beta}\,\frac{\partial \xi_x^\alpha}{\partial x^\mu}\cdot\frac{\partial^2 \xi_x^\beta}{\partial x^\lambda\partial x^\nu} \qquad ;\ \alpha,\beta\to\gamma\delta \\
&= \eta_{\gamma\delta}\cdot\frac{\partial^2 \xi_x^{\cancel{\alpha}\gamma}}{\partial x^\lambda\partial x^\mu}\cdot\frac{\partial \xi_x^\delta}{\partial x^\nu} + \eta_{\gamma\delta}\cdot\frac{\partial \xi_x^\gamma}{\partial x^\mu}\cdot\frac{\partial^2 \xi_x^\delta}{\partial x^\lambda\partial x^\nu}
\end{aligned}$$

$$\cdot\,\delta^\gamma_\alpha = \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial x^\rho}\cdot\frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha}$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{\frac{\partial^2 \xi_x^\alpha}{\partial x^\lambda\partial x^\mu}\cdot\frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha}}\cdot\frac{\partial \xi^\gamma}{\partial x^\rho}\cdot\frac{\partial \xi_x^\delta}{\partial x^\nu}\,\eta_{\gamma\delta} + \frac{\partial \xi_x^\gamma}{\partial x^\mu}\cdot\frac{\partial^2 \xi_x^\delta}{\partial x^\lambda\,\partial x^\nu} \\
&= \Gamma^\rho_{\lambda\mu}\,\frac{\partial \xi^\gamma}{\partial x^\rho}\cdot\frac{\partial \xi_x^\delta}{\partial x^\nu}\,\eta_{\gamma\delta} + \frac{\partial \xi_x^\gamma}{\partial x^\mu}\cdot\frac{\partial^2 \xi_x^\delta}{\partial x^\lambda\partial x^\nu} \\
&= \Gamma^\rho_{\lambda\mu}\cdot g_{\rho\nu} + \frac{\partial \xi_x^\gamma}{\partial x^\mu}\cdot\frac{\partial^2 \xi_x^\delta}{\partial x^\lambda\partial x^\nu}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\partial_\lambda g_{\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\lambda\mu}\cdot g_{\rho\nu} + \Gamma^\rho_{\lambda\nu}\cdot g_{\rho\mu}} \quad \oplus$$

$$\partial_\mu g_{\nu\lambda} = \Gamma^\rho_{\mu\nu}\cdot g_{\rho\lambda} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\cdot g_{\rho\nu} \quad \oplus$$

$$\partial_\nu g_{\lambda\mu} = \Gamma^\rho_{\nu\lambda}\cdot g_{\rho\mu} + \Gamma^\rho_{\nu\mu}\, g_{\rho\lambda} \quad \ominus$$

$$\Longrightarrow \partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\nu g_{\lambda\mu} = 2\cdot\Gamma^\rho_{\lambda\mu}\cdot g_{\rho\nu}$$

la métrique possédant un inverse, on multiplie par $g^{\sigma\nu}$ et on obtient :

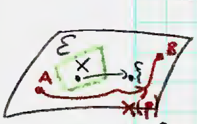
$$g^{\sigma\nu}\partial_\lambda g_{\mu\nu} + g^{\sigma\nu}\partial_\mu g_{\nu\lambda} - g^{\sigma\nu}\partial_\nu g_{\lambda\mu} = 2\cdot\Gamma^\rho_{\lambda\mu}\cdot\delta^\sigma_\rho \quad \text{symétrie de } g$$

$$\Longrightarrow \boxed{\Gamma^\sigma_{\lambda\mu}(x) = \frac{1}{2}\, g^{\sigma\nu}\cdot\left\{\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\nu g_{\lambda\mu}\right\}} \quad \text{symbole de Christoffel } \left\{ {\sigma \atop \lambda\mu} \right\}(x)$$

⟹ le principe d'équivalence faible implique que la connexion affine s'identifie avec le symbole de Christoffel et est entièrement déterminée par $g$
⟹ toute la gravitation est contenue dans $g$

__Remarque__ : $d\tau^2 = -g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \Longrightarrow 1 = -g_{\mu\nu}(x)\cdot\frac{dx^\mu}{d\tau}\cdot\frac{dx^\nu}{d\tau}$ ⊛⊛ ; de plus on a l'équation : ⊛ $\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$

– propriété : – soit $x^\mu = X^\mu(\tau)$ solution de l'équation du mouvement ⊛, alors : $g_{\mu\nu}(x)\frac{dx^\mu}{d\tau}\cdot\frac{dx^\nu}{d\tau} = \text{cte}$
avec C.I : $X^\mu(0)$ ; $\frac{dx^\mu}{d\tau}(0)$ si on impose à $\tau=0$ : $g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\cdot\frac{dx^\nu}{d\tau}(\tau=0) = 1$
⟹ ⊛⊛ satisfait $\forall\tau>0$
– on définit alors aussi : $\omega^\mu := \frac{dx^\mu}{d\tau}$ ; $g_{\mu\nu}\,\omega^\mu\omega^\nu = -1$.

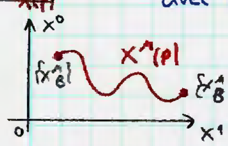



__Remarque__ : – __principe variationnel__ : on cherche le principe variationnel qui nous redonne les équations du mouvement. Soit $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x,\xi)$ une fonction donnée de $x\in\mathcal{E}$ et $\xi\in\tau_x$ (espace tangeant de $x$). Soit $x = x(p)$ t.q. $X(a) = A$ ; $X(b) = B$, alors on définit :

$$\boxed{S[x(\cdot)] = \int_a^b dp\ \mathcal{L}\left(x(p);\ \frac{dx(p)}{dp}\right)} \in \mathbb{R} \qquad \text{l'action de } X(p).$$

avec $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\{x^\mu(p)\};\{\frac{d}{dp}x^\mu(p)\})$. La courbe $x^\mu = X^\mu(p)$ rend l'action $S[x(\cdot)]$ extrémale ssi :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot x^\mu}\mathcal{L}\right) - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\mathcal{L} = 0 \qquad \text{(éqn. Euler-Lagrange)}$$




$\{x^\mu_B\}$ de plus pour n'importe quelle sol. des éq. Euler-Lagrange, ∃ une constante du mouvement :

$$\dot x^\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot x^\mu} - \mathcal{L} = \text{cte} \qquad \forall p\in[a,b]$$

__Théorème__ : – Soit $\boxed{\mathcal{L}(x^\mu;\dot x^\mu) = -\frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}(x)\cdot\dot x^\mu\cdot\dot x^\nu}$ ; $\dot x^\mu = \frac{d}{dt}x^\mu$, alors $X^\mu = X^\mu(p)$ rend l'action extrémale
$\Longleftrightarrow \frac{d^2}{dp^2}X^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\,\frac{dx^\mu}{dp}\cdot\frac{dp}{dx^\nu} = 0$

– de plus : $\dot x^\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot x^\mu} - \mathcal{L} = -\dot x^\mu\cdot(g_{\mu\nu}(x)\cdot\dot x^\nu) + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(x)\,\dot x^\mu\cdot\dot x^\nu = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(x)\cdot\dot x^\mu\cdot\dot x^\nu = \text{cte}$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow g_{\mu\nu}(x)\cdot\dot x^\mu\cdot\dot x^\nu = \text{cte} \\
&\Longrightarrow g_{\mu\nu}(x)\cdot\frac{dx^\mu}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{dp}\cdot\frac{dx^\nu}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{dp} = \text{cte} \\
&\Longrightarrow g_{\mu\nu}(x)\cdot\frac{dx^\mu}{d\tau}\cdot\frac{dx^\nu}{d\tau}\cdot\left(\frac{d\tau}{dp}\right)^2 = \text{cte} \\
&\Longrightarrow g_{\mu\nu}(x)\cdot\frac{dx^\mu}{d\tau}\cdot\frac{dx^\nu}{d\tau} = \text{cte}\cdot\left(\frac{dp}{d\tau}\right)^2 \overset{\text{c.I.}}{=} -1 \\
&\Longrightarrow \boxed{p = a\cdot\tau + b}
\end{aligned}$$

<u>Preuve</u> : – équations de Euler-Lagrange vérifiées : $\frac{d}{dp}\left(-g_{\mu\nu}\cdot\dot{x}^\nu\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} g_{\rho\nu}(x)\right)\dot{x}^\rho\dot{x}^\nu = 0$ , avec $\mathcal{L} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu$

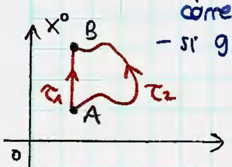
$$\Rightarrow g_{\mu\nu}(x)\cdot\frac{d^2x^\nu}{dp^2} + \Big\{\underbrace{\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu}}_{=\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\mu} g_{\rho\nu}\Big\}\frac{dx^\rho}{dp}\cdot\frac{dx^\nu}{dp} = 0 \qquad \cdot g^{\lambda\mu}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x^\lambda}{dp^2} + \underbrace{\frac{1}{2} g^{\lambda\mu}\cdot\left\{\partial_\rho g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\mu g_{\rho\nu}\right\}}_{=\Gamma^\lambda_{\rho\nu}}\cdot\dot{x}^\rho\cdot\dot{x}^\nu = 0$$

\#

– de plus on a obtenu : $p = a\cdot\tau + b \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^\mu(p) \\ x^\mu(\tau)\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$ lignes d'univers (ligne droite), car $\overbrace{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}^{=d\tau} < 0$

<u>Théorème</u> : – $\exists$ une autre <u>action</u> qui est rendue extrémale. Soit $T_{AB}[x(\cdot)] = \int_a^b dp\sqrt{-g_{\mu\nu}(x)\frac{dx^\mu}{dp}\cdot\frac{dx^\nu}{dp}}$ , alors $T_{AB}$ représente le temps propre pour une particule qui suit une ligne d'univers. Parmi toutes les lignes d'univers qui relient a, b, l'évolution de la particule en chute libre <u>rend extrémale le temps propre</u> $T_{AB}[x(\cdot)]$. Cela correspond aussi à la longueur minimale entre 2 points (droite pour les géodésiques). ↳ MAXIMUM.




– si $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$ en coord. cartésiennes : $\tau_1 > \tau_2 \Rightarrow \tau_2$ "plus jeune" ("paradoxe" des jumeaux)

<u>Preuve</u> : – éqn. Euler-Lagrange : $\frac{d}{dp}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^\mu} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0$

avec : $\left\{-g_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{dp}\cdot\frac{dx^\sigma}{dp}\right\}^{1/2} = \left(\frac{d\tau}{dp}\right)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dp}\Big\{\cancel{\tfrac{1}{2}}\underbrace{\left(-g_{\rho\sigma}(x)\cdot\dot{x}^\rho\cdot\dot{x}^\sigma\right)^{-1/2}}_{=\left(\frac{d\tau}{dp}\right)^{-1}}\cdot g_{\lambda\nu}\cdot\dot{x}^\nu\Big\} - \frac{1}{2}\underbrace{\left(-g_{\rho\sigma}(x)\cdot\dot{x}^\rho\dot{x}^\sigma\right)^{-1/2}}_{=\left(\frac{d\tau}{dp}\right)^{-1}}\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\mu}\dot{x}^\rho\dot{x}^\nu = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\frac{d}{dp}\left(\frac{\partial\tau}{\partial p}\right)^{-1}\right)}_{=-\left(\frac{d\tau}{dp}\right)^{-2}\cdot\frac{d^2\tau}{dp^2}} g_{\mu\nu}(x)\cdot\dot{x}^\nu + \left(\frac{\partial\tau}{\partial p}\right)^{-1}\Big\{\underbrace{\frac{d}{dp}\left(g_{\mu\nu}\cdot\dot{x}^\nu\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\mu}\cdot\dot{x}^\rho\cdot\dot{x}^\nu}_{\text{déjà calculé}\downarrow}\Big\} = 0 \qquad \cdot\frac{d\tau}{dp}\ \cdot g^{\lambda\mu}$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{d\tau}{dp}\right)^{-1}\cdot\frac{d^2\tau}{dp^2}\underbrace{g_{\mu\nu}(x)\cdot g^{\lambda\mu}(x)}_{=\delta^\lambda{}_\nu}\cdot\dot{x}^\nu + \frac{d^2x^\lambda}{dp^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dp}\cdot\frac{dx^\nu}{dp} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x^\lambda}{dp^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dp}\cdot\frac{dx^\nu}{dp} - \frac{dp}{d\tau}\cdot\frac{d^2\tau}{dp^2}\cdot\frac{dx^\lambda}{dp} = 0$$

\#

– on peut tjs choisir le chgt. variables : $\frac{d^2\tau}{dp^2} = 0 \Rightarrow \frac{d\tau}{dp} = \text{cte}$ , avec $p \to \tau = \alpha\cdot p + \beta$ on a $\frac{d^2x^\lambda}{dp^2} = 0$, donc on retrouve l'équation des géodésiques. Donc certains appellent géodésique la courbe t.q. $p = \alpha'\tau + \beta'$ et on dit que l'on a un <u>paramètre affine</u> (changement de l'origine du temps).

<u>Remarque</u> : – relation entre équation de Newton et équation des géodésiques : <u>limite (approximation) newtonienne</u> :
i) $v \ll c$ ii) champ gravitatique (champ de gravitation indépendant du temps) iii) champ gravitatique très faible.

i) $\Rightarrow \frac{dx^i}{dt} \ll c \Rightarrow \left|\frac{dx^i}{d\tau}\right| \ll c\cdot\left|\frac{dt}{d\tau}\right| = c\left|\frac{dx^0}{d\tau}\right| \Rightarrow$ néglige $\frac{dx^i}{d\tau}$ devant $c\cdot\frac{dx^0}{d\tau}$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{00}\frac{dx^0}{d\tau}\cdot\frac{dx^0}{d\tau} = 0$$

ii) $\Rightarrow \Gamma^\lambda_{00}$ indépendant du temps car $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x) \neq g_{\mu\nu}(t)$

iii) $\Rightarrow$ Si le chmp. de gravit est nul, alors $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$, alors "très faible" $\Rightarrow \boxed{g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x)}$ ⟶ ne garde que les termes de plus bas ordre

– les 3 hypothèses , avec $\Gamma^\lambda_{00} = \frac{1}{2}\underbrace{g^{\lambda\sigma}}_{\substack{i=1\ldots3\\ =\eta^{\lambda i}\cdot h^{\lambda i}\cdot(-1)+\ldots}}\cdot\Big\{\underbrace{\partial_0 g_{\sigma 0}}_{=0\ (ii)} + \underbrace{\partial_0 g_{\sigma 0}}_{=0\ (ii)} - \underbrace{\partial_\sigma g_{00}}_{\substack{i=1\ldots3\\ =\partial_i h_{00}(x)}}\Big\}$

$$= \frac{1}{2}\eta^{\lambda i}\cdot\left(-\partial_i h_{00}(x)\right)$$

$\boxed{\lambda=0} \Rightarrow \frac{d^2x^0}{d\tau^2} + \cancel{\Gamma^0_{00}}^{=0}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{d^2x^0}{d\tau^2} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dx^0}{d\tau} = \text{cte}}$

$\boxed{\lambda\neq 0} \Rightarrow \frac{d^2x^i}{d\tau^2} + \Gamma^i_{00}\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{d^2x^i}{d\tau^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}h_{00}(x)\right)\cdot\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 = 0$

$$\Rightarrow \frac{d^2x^i}{d\tau^2} = \text{cte}\cdot\frac{\partial}{\partial x^i}h_{00}(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2\vec{x}}{d\tau^2} = \text{cte}\cdot\vec{\text{grad}}\, h_{00}(x)} \quad ;\ \text{cte} = \frac{c^2}{2}$$

– Newton : $\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\text{grad}\,\Phi(x)$ ; $\Phi(x) = 4\cdot\pi\cdot G\cdot\rho_{mat}(x)$ , d'où avec comparaison :

$$\Rightarrow h_{00}(x) = -\frac{2}{c^2}\Phi(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{g_{00}(x) = -\left(1 + \frac{2}{c^2}\Phi(x)\right)}$$

– avec cette définition de $g_{00}(x)$ on retrouve les mêmes solutions. Pour une sphère homogène, on a :

$$\Phi(x) = -\frac{G\cdot M}{r}$$

– donc dans le cas de la symétrie de rotation :

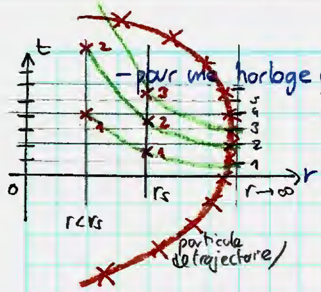
$$\boxed{g_{00}(x) = -\left(1 - \frac{2}{c^2}\cdot\frac{G\cdot M}{r}\right)}$$ (correspondance Newton–Einstein)

– le point $r_s = \frac{2\cdot G\cdot M}{c^2}$ est appelé <u>horizon de Schwarzschild</u> , i.e. $g_{00}(x)|_{x=r_s} = 0$ , ou bien :

$$\boxed{g_{00}(x) = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)}$$

– condition initiales $\Rightarrow x = x(t)$ (Newton ou Einstein). Où est la différence ? Einstein : le temps n'est pas absolu et est donné par $d\tau = \sqrt{-g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}$ ; $t$ "paramètre" utilisé ici est celui qui donne la corresp. Newton–Einstein. $\Rightarrow$

$d\tau = \sqrt{-g_{\mu\nu}(x)\frac{dx^\mu}{dt}\cdot\frac{dx^\nu}{dt}}\,dt$ , $t$ : temp paramètre




- pour une horloge immobile : $\frac{dx^i}{dt} = 0 \Rightarrow d\tau = \sqrt{-g_{\mu\nu}(x)}\big|_{\mu=\nu=0} \cdot dt = \sqrt{-g_{00}}\,dt = \sqrt{1 - r_s/r}\,dt$

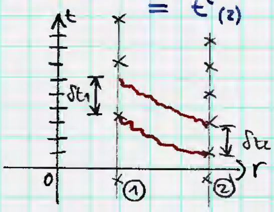
$$\boxed{d\tau = \sqrt{1 - r_s/r}\,dt}$$

$\Rightarrow$ la présence de gravitation modifie le temps (et l'espace) : plus on s'éloigne de gravitation, plus on vieillit vite.

$\Rightarrow$ différence Newton $\leftrightarrow$ G.R. : temps : $d\tau^2 = -g_{\mu\nu}\,dx^\mu dx^\nu$ : DILATATION RÉELLE du temps sous l'effet de la gravitation.

Résumé : - champ gravitatique, faible, petites vitesses $\Rightarrow$ principe d'équivalence (géodésiques) $\Longleftrightarrow$ th. Newton : $g_{00}(x) = -(1 - \frac{r_s}{r})$

Remarque : - équation du rayon lumineux : $\frac{d^2x^\lambda}{dp^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dp}\cdot\frac{dx^\nu}{dp} = 0$ ; $\Gamma = \Gamma(x)$ ; $x^i(p=0) = x^i_{(2)}$ ; $t^i(p=0) = t^i_{(2)}$




$$\left.\begin{array}{l}\delta t_1 = \dfrac{1}{\sqrt{1+2\frac{\phi(x_1)}{c^2}}}\,\delta\tau \\ \quad \parallel \\ \delta t_2 = \dfrac{1}{\sqrt{1+2\frac{\phi(x_2)}{c^2}}}\,\delta\tau\end{array}\right\} \quad \boxed{\frac{\nu \text{ fréq. reçue en } 2}{\nu \text{ fréq. reçue en } 1} = \frac{\delta t_1}{\delta t_2} = \sqrt{\frac{1+2\phi(x_2)/c^2}{1+2\phi(x_1)/c^2}}} \quad \begin{array}{l}\overset{\text{Newton}}{=1} \\ \neq 1 : \text{G.R.}\end{array}$$

- pour l'exemple de la terre, le pot. gravifique est de l'ordre de $10^{-9}$, donc par un D.L.

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} \cong \frac{1+\phi(x_2)/c^2}{1+\phi(x_1)/c^2} \cong \left(1 + \frac{\phi(x_2)}{c^2}\right)\cdot\left(1 - \frac{\phi(x_1)}{c^2}\right) = 1 + \frac{\phi(x_2)-\phi(x_1)}{c^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\nu(x_2)-\nu(x_1)}{\nu(x_1)} = \frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta\phi}{c^2}}$$

GRAVITATIONAL RED SHIFT
(effet gravito-optique)

- $\exists$ décalage des $\nu$ qui n'est pas dû à Doppler, mais à la variation du champ de gravitation.

Illustration numérique : 1) Satellite géostationnaire :

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = 1 + \frac{G\cdot M}{c^2}\left(\frac{-r_1+r_2}{r_1\cdot r_2}\right) > 1 \qquad , r_2 > r_1$$

$\rightarrow$ gravitationnal "blue shift" : avance de l'horloge géostationnaire $H_{géo}$ : 1 ms/an

2) Jungfraujoch : avance : $H_J$ : 1 ms/an

3) Réalité : MIT : sommet d'un bâtiment de ~ 25 mètres de hauteur : $r_2 - r_1 = 72$ feet $\Rightarrow$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = 10^{-15}$$

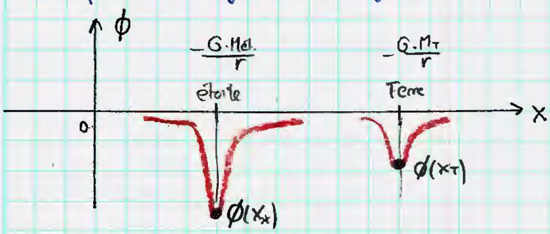
observation en accord à ~ 5% près (1960).

4) Horloges envoyées ds avions faire le tour du monde ; et comparaison avec horloge au sol : dilatation due à la relativité restreinte et à la gravitation $\Rightarrow$ correction du même ordre de grandeur entre rel. restreinte et générale

$\Rightarrow$ tous les résultats expérimentaux donnent en moyenne :

$$\left.\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_{exp} = \left.\frac{\Delta\nu}{\nu}\right|_{théorique} \quad \text{à} \sim 1\%$$

Remarque : - décalage vers le rouge :

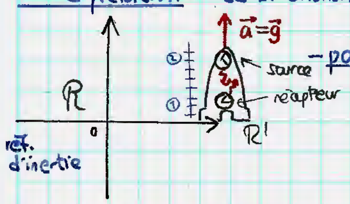



$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\phi(x_\star)-\phi(x_T)}{c^2} < 0$$

: le décalage vers le rouge >> celui vers le bleu.

- en fait il est très difficile de distinguer le décalage dû à l'effet Doppler (mvt, éloignements etc.) et celui dû à la gravitation.

Interprétation : - de la dilatation effective du temps : $t \leq 0$ : fusée immobile
$t > 0$ : $\vec{a} = \vec{g}$




- pour R : effet Doppler :

$$\nu_{rec.} = \nu_{émission}\cdot\frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+v_r/c} \quad \begin{array}{l}\text{\} effet Doppler standard} \\ \text{\} correct. relativiste}\end{array}$$

$\vec{v}$ : vitesse de la source (à l'émission) — vitesse du récepteur (au moment de recevoir le signal)

$v_r$ : projection du vecteur $\vec{v}$ qui va de l'observateur à la source

$v_{récepteur}^{\text{reçoit le signal}} = g\cdot t_1$ , $t_1$ : temps nécessaire pour $S \longrightarrow R$.

$t_1 = \frac{\Delta e}{c} \Rightarrow v_r = -g\cdot\frac{\Delta e}{c}$

- avec $v^2 = v_r^2$ (i.e. $\vec{v} \parallel \hat{OR}$) $\Rightarrow$

$$\nu_{rec} = \nu_{ém.}\cdot\frac{\sqrt{1-v_r^2/c^2}}{1+v_r/c} = \sqrt{\frac{1-v_r/c}{1+v_r/c}}\cdot\nu_é \cong \nu_é\left(1 - \frac{v_r}{c}\right) = \left(1 + g\cdot\frac{\overbrace{\Delta e}^{=x_2-x_1}}{c^2}\right)\cdot\nu_é$$

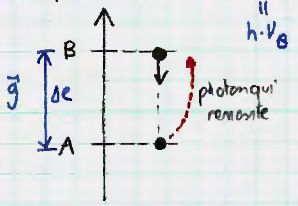
$$\Rightarrow \boxed{\nu_{rec.} = \nu_{ém}\cdot\left(1 + \frac{\phi(x_2)-\phi(x_1)}{c^2}\right)}$$

- pour R' : - horloges immobiles, mais $\exists$ champ de gravitation :

$$\boxed{\frac{\nu_{réc}}{\nu_{ém}} = 1 + \frac{\phi(x_2)-\phi(x_1)}{c^2}}$$

$\Rightarrow$ effet gravito-optique

<u>Interprétation</u> : $\underset{h\cdot\nu_B}{\overset{}{E_{mec}(B)}} = m\cdot c^2$ ; $E_A^{mec} = \underset{h\nu_A}{m\cdot c^2} + \underset{h\nu_B}{\frac{1}{2}mv^2}$ ; $\frac{1}{2}mv^2 = g(x_B - x_A)\cdot m$




Conservation de l'énergie : $h\cdot\nu_A = h\cdot\nu_B + \frac{1}{2}mv^2 = h\cdot\nu_B + m\cdot g\cdot(x_B - x_A)$

$\Rightarrow \frac{\Delta\nu}{\nu} = g\cdot(x_B - x_A)\frac{1}{c^2} = \frac{\Delta\phi}{c^2}$ car : $\underbrace{\frac{\cancel{h}(\nu_A-\nu_B)}{\cancel{h}\nu_B}}_{=\Delta\nu/\nu} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{m\cdot c^2} = \frac{\cancel{m}\cdot g\cdot(x_B-x_A)}{\cancel{m}\cdot c^2} = g\cdot\frac{x_B-x_A}{c^2} = \frac{\phi(x_B)-\phi(x_A)}{c^2}$ #

<u>Principe de Covariance</u> : 1) on dira que les lois pour être acceptables doivent être covariantes ($\forall$ syst. coordonnées)

2) si dans les lois on remplace $\left.\begin{matrix} g_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu} \\ \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \to 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ on retrouve les lois de la relativité restreinte

– question : transformation de nos éqn. sous un chgt. de coordonnées quelconque :

$$x'^\mu = x'^\mu(x^0,\dots,x^3)$$

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\cdot\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} = \delta^\mu_\nu$$

<u>Définition</u> : – <u>champ scalaire</u> : – grandeur $S(x^\mu)$ si en termes de coordonnées $S'(x'^0,\dots,x'^3) = S(x^0,\dots,x^3)$ (grandeur indépendante de tout système de coordonnées)

– <u>vecteur contravariant au point x</u> : – vecteur caractérisé relativement au système de coordonnées $\{x^\mu\}$ : $V^\mu = V^\mu(x)$
au système de coordonnées $\{x'^\mu\}$ : $V'^\mu = V'^\mu(x')$

• on pourrait le définir indép. de tout syst. de coordonnées, avec des classes d'équivalence (sur l'espace des événements)

si : $$\boxed{V'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}(x)\cdot V^\nu(x)} \quad , x' = x'(x)$$

– <u>vecteur covariant au point x</u> : – vecteur caractérisé relativement au système de coordonnées $\{x^\mu\}$ : $V_\mu = V_\mu(x)$

$$\boxed{V'_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}(x)\cdot V_\nu(x)}$$

<u>Exemple</u> : 1) soit : $\left.\begin{matrix} x^\mu \ ; \{dx^\mu\} \\ x'^\mu = x'^\mu(x) \ ; \{dx'^\mu\} \end{matrix}\right\} \Rightarrow dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}dx^\nu$ est un vecteur contravariant

2) soit une certaine courbe sur la variété : $X(\lambda)$, alors dans le S.C. $\{x^\mu\}$ : $x^\mu = x^\mu(\lambda)$, alors : $\theta^\mu := \frac{dx^\mu}{d\lambda}$

$x'^\mu = x'^\mu(x)$

dans le S.C. $\{x'^\mu\}$ : $x'^\mu = x'^\mu(\lambda)$ et : $\theta'^\mu = \frac{dx'^\mu}{d\lambda} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\cdot\frac{dx^\nu}{d\lambda} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\theta^\nu$ est un vect. contra.

$\theta \equiv$ <u>vecteur tangeant</u> à $X(\lambda)$ en $\lambda_0$ $\Rightarrow$ on peut définir le concept de vecteur tangeant.

3) point matériel : évolution paramétrisée par le temps propre $x^\mu = x^\mu(\tau)$, alors :

$\omega^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ = quadrivecteur vitesse contravariant.

4) Soit $\{\omega^\mu(\tau)\}$ un vecteur défini en chaque point de $x = x(\tau)$, alors $\frac{d\omega^\mu}{d\tau}$ n'est pas un vecteur contravariant :

$\frac{d\omega^\mu}{d\tau}$ par rapport à $\{x'^\mu\}$, $x'^\mu = x'^\mu(\tau)$ : $\omega'^\mu(\tau) = \frac{dx'^\mu}{d\tau}$

$$\frac{d\omega'^\mu(\tau)}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}\omega'^\mu(\tau) = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}(x(\tau))\cdot\omega^\nu(\tau)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d\omega'^\mu}{d\tau}(\tau) = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\cdot\frac{d\omega^\nu}{d\tau} + \underbrace{\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu\partial x^\rho}\omega^\rho\cdot\omega^\nu}_{\text{nouveau terme par rapport à la relativité spéciale (restreinte)}}$$

$$\Rightarrow \left\{\frac{d\omega'^\mu}{d\tau}\right\} \neq \text{vecteur}$$

<u>Définition</u> : – <u>tenseur</u> : $T^{\mu_1\dots\mu_p}{}_{\nu_1\dots\nu_q}(x)$ est un tenseur p fois contravariant, q fois covariant <u>au point X</u> si (nouveauté)

$$T'^{\mu_1\dots\mu_p}{}_{\nu_1\dots\nu_q}(x') = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}}\cdots\frac{\partial x'^{\mu_q}}{\partial x^{\rho_q}}\cdot\frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}}\cdots\frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}}\, T^{\rho_1\dots\rho_p}{}_{\sigma_1\dots\sigma_q}(x)$$

notation $\Rightarrow T(x) \in \mathcal{T}^p_q(x)$

<u>Propriétés</u> : 1) soit $V(x) \in \mathcal{T}^1_0(x)$, $U(x) \in \mathcal{T}^0_1(x)$, alors $V^\mu(x)U_\mu(x) = S(x)$ "scalaire"

2) transformation de la métrique : $g'_{\mu\nu}(x) \to g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\cdot\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}g_{\rho\sigma}(x)$ , $\{g_{\mu\nu}(x)\} \in \mathcal{T}^0_2(x)$

3) Matrice unité $M_4(\mathbb{R})$ : $\mathbb{1} = \{\delta^\mu{}_\nu\} \in \mathcal{T}^1_1(x)$ : $\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\right)\cdot\left(\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\right)\delta^\rho_\sigma = \delta^\mu{}_\nu = \delta'^\mu{}_\nu \ \forall x$

4) Tenseur métrique : $(g^{\mu\nu}) = (g^{-1})^{\mu\nu}$ t.q. $gg^{-1} = \mathbb{1} \in \mathcal{T}^1_1(x)$, $g \in \mathcal{T}^0_2(x) \Rightarrow g^{-1} \in \mathcal{T}^2_0(x)$

5) $x^\mu, x'^\mu$, $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x)$, $\Gamma'^\lambda_{\mu\nu}$ ne sont pas des tenseurs

<u>Définition</u> : – <u>vecteurs tangeants</u> : – soit $\{x^\mu\}$ un système de coordonnées, alors on définit le <u>vecteur contravariant tangeant à</u> la ligne de coordonnée $x_\lambda$ au point x

$$e_\lambda = \{(e_\lambda)^\mu\} = \{\delta^\mu_\lambda\}$$

$\forall$ vecteur contravariant $\{V^\mu\}$ on a : $\{V^\mu\} = V^\mu e_\mu$ ; $V^\mu$ : composantes contra. du vecteur $\{V^\mu\}$ dans la base $e_\lambda$ :

$$e_\lambda = \{(e_\lambda)^\mu\} = \{(e_\lambda)'^\mu\} = \left\{\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\delta^\rho_\lambda = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}\right\} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}e'_\mu$$

où : $e'_\mu$ = vecteur tangeant à la ligne de coordonnée $x'^\mu$

$$\Rightarrow \boxed{e_\lambda = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x_\lambda}e_\mu}$$

– ainsi : $V = V'^\mu e'_\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}V^\rho\cdot e'_\mu = V^\rho e_\rho$

<u>Remarque</u>: – <u>formules de transformation</u>: – on définit l'espace tangeant au point $x$ par : $\mathcal{T}^1_0(x) = \mathcal{T}(x)$, et :

$\mathcal{T}^0_1(x) = \mathcal{T}^*(x)$ t.q. : $\begin{cases} \mathcal{T}(x) \longrightarrow \mathbb{R} \\ V \longmapsto \omega(V) \\ e_\lambda \longmapsto \omega(e_\lambda) \end{cases}$ (application linéaire)

– avec un chgt. de coordonnées : $\{x^\mu\} \longrightarrow \{x'^\mu\}$, alors : $e'_\mu = \dfrac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} e_\lambda \mapsto \omega(e'_\mu) = \dfrac{\partial x'^\lambda}{\partial x'^\mu} \cdot \omega(e_\lambda)$

$\Rightarrow$ considérons $\{\omega_\mu = \omega(e_\mu)\}$, $\{\omega'_\mu = \omega(e'_\mu)\}$, alors il s'agit d'un vecteur covariant, i.e.

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{T}^*(x) \subset \mathcal{T}^0_1(x) \\ \\ \text{et } \forall\, \omega_\mu \in \mathcal{T}^0_1(x) : \begin{cases} \mathcal{T}(x) \rightarrow \mathbb{R} \\ V \mapsto \omega_\mu V^\mu \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{T}^*(x) \subseteq \mathcal{T}^0_1(x)$$

– en conclusion on voit que : $\mathcal{T}^0_1(x) \subset \mathcal{T}^*(x)$

– généralisation : $\mathcal{T}^p{}_q(x) : \underbrace{\mathcal{T}^*(x) \times \ldots \times \mathcal{T}^*(x)}_{p \text{ fois}} \times \underbrace{\mathcal{T}(x) \times \ldots \times \mathcal{T}(x)}_{q \text{ fois}} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(\omega_1, \ldots, \omega_p) \times (V_1, \ldots, V_q) \longmapsto T(\omega_1, \ldots, \omega_p; V_1, \ldots, V_q)$$

<u>Illustration</u>: – <u>métrique</u> : $g(x) \in \mathcal{T}^0_2(x)$ : $\mathcal{T}(x) \times \mathcal{T}(x) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(U, V) \longmapsto g(u,v) = g(v,u)$$

– en particulier : $(e_\mu, e_\nu) \longmapsto g(e_\mu, e_\nu) = g_{\mu\nu}(x)$ : tens. métrique au pt. $x$ du syst. coord.

– comme : $U = U^\mu e_\mu$, $V = V^\nu e_\nu$ $(U, V) \longmapsto U^\mu V^\nu g_{\mu\nu} = U^\mu V_\nu$

– on peut construire l'application $\left.\begin{array}{l} V \in \mathcal{T}(x) \\ g(x) \end{array}\right\} \mathcal{T}^*(x) \in g(\cdot, V)$ : $\begin{array}{l} \mathcal{T}(x) \longrightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto g(u,v) = U^\mu V^\nu g_{\mu\nu} = U^\mu V_\nu \\ e_\mu \mapsto g(e_\mu, e_\nu) = g_{\mu\nu}(x) \end{array}$

<u>Définition</u>: – <u>densité tensorielle</u> : – soit un système de coordonnée et une métrique $g_{\mu\nu}(x)$, alors on définit $g := |\det g_{\mu\nu}(x)|$

Soit un chgt. de coord., $g'_{\mu\nu}(x') = \dfrac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \cdot \dfrac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}(x)$, alors : $g'(x) = |\det g'_{\mu\nu}(x')|$

Comme $g'(x') = A g(x) A^t$, alors :

$$g'(x) = |\det g'_{\mu\nu}(x)| = |\det(A \cdot g(x) A^t)| = |\det g(x)|\,|\det(A \cdot A^t)| = g \cdot |\det(A \cdot A^t)|$$

$$\Longrightarrow g'(x) = |\det g'_{\mu\nu}(x)| = g(x) \cdot \left(\det \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\right)^2$$

$$SC \longrightarrow SC'$$
$$x^\mu \longmapsto x'^\mu = x'^\mu(x^0, \ldots, x^3)$$
$$J(x) := \det\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{g'(x) = J^{-2} g(x)}$$

$\rightarrow$ attention : ce signe dépend du fait de si on part d'un objet co-contravariant : $\{\pm 2\}$

– on introduit donc une <u>densité tensorielle de poids $W$</u> : $\tilde{T}^{\mu_1 \ldots \mu_p}{}_{\nu_1 \ldots \nu_q}$ t.q.

$$\tilde{T}^{\mu_1 \ldots \mu_p}{}_{\nu_1 \ldots \nu_q} = \underbrace{J(x)^W}_{\text{nouveau} \rightarrow \text{densité tensorielle}} \cdot \ldots \cdot T^{\rho_1 \ldots \rho_p}{}_{\sigma_1 \ldots \sigma_q}$$

<u>Propriétés</u> : i) $T := g^{W/2}\, \tilde{T}$ est un tenseur, car lors du chgt. de coord. : $T' \overset{\text{déf.}}{=} g^{\frac{W}{2}} \cdot \tilde{T}' = J(x)^{-W} g(x)^{\frac{W}{2}} J(x)^W \tilde{T} \ldots$
$= T$ ※

<u>Exemple</u> : i) $\left.\begin{array}{l} S.C. : d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \\ S.C.' : d^4x' = dx'^0 dx'^1 dx'^2 dx'^3 = J(x)^{-2} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \end{array}\right\}$ $dv(x) = \sqrt{g(x)}\, d^4x$ est un vrai scalaire

ii) Tenseur de Levy-Cevitta :

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu\nu\lambda\rho \equiv \text{permut. paire de } 0,1,2,3 \\ -1 & \text{si } \mu\nu\lambda\rho \equiv \text{permut. impaire de } 0,1,2,3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est-ce un tenseur ? Avec la loi de transformation des tenseurs :

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\delta} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \left|\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\right| \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = J(x)\, \varepsilon'^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

$$\Longrightarrow \varepsilon'^{\alpha\beta\gamma\delta} = J(x)^{-1} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \ldots$$

$\Longrightarrow$ densité de poids $\{-1\}$ invariante (p. rapport à n'importe quel S.C.)

<u>Définition</u>: – <u>dérivée covariante</u> : – soit $T$ un champ tensoriel, $T = T(x)$, i.e. $T \in \mathcal{T}^p{}_q(x)$ $\forall x \in \mathcal{E}$, alors la dérivée covariante :

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} T^{\cdots}{}_{\cdots}(x) \equiv D_\mu T^{\cdots}{}_{\cdots}(x)$$

par une application <u>linéaire</u> : $\mathcal{T}^p{}_q \longrightarrow \mathcal{T}^p{}_{q+1}$

satisfaisant la règle de <u>Leibniz</u> t.q. la dériv. covariante = dériv. partielle, i.e. $D_\mu = \partial_\mu$ si $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ et $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0$

$\rightarrow$ <u>champ scalaire</u> : c'est un champ $S(x)$ t.q.

$$D_\mu S(x) \overset{\text{déf.}}{=} \partial_\mu S(x)$$

$\rightarrow$ <u>champ. vectoriel contravariant</u> : – soit un S.C. alors $V(x) = V^\mu(x)\, e_\mu(x)$, alors

$$D_\lambda V(x) \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda} V^\mu(x)\right) e_\mu(x) + V^\mu(x) \left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda} e_\mu(x)\right)$$

– soit le chgt. de coord par rapport au syst. coord. local :

$$e_\mu(x) = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} e'_\alpha \quad , \quad e'_\alpha \neq e'_\alpha(x)$$

– alors : $D_\lambda V(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda} V^\mu(x)\right) e_\mu(x) + \underbrace{\left(\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha}\right)}_{= \Gamma^\rho_{\lambda\mu}} e_\rho \cdot V^\mu(x)$

$$\Rightarrow D_\lambda V^\rho(x) = \partial_\lambda V^\rho(x) + V^\rho(x) \cdot \Gamma^\mu_{\lambda\rho}$$

Définition : $\boxed{D_\lambda V^\mu(x) \overset{\text{déf.}}{=} \partial_\lambda V^\mu(x) + \Gamma^\mu_{\lambda\rho}(x) V^\rho(x)}$ : dérivée covariante du champ de vecteurs contravariant

S.C.' : $D'_\lambda V'^\mu(x') = \frac{\partial}{\partial x'^\lambda} V'^\mu(x') + \Gamma'^\mu_{\lambda\rho}(x') V'^\rho(x')$
$= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \cdot \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\lambda} D_\sigma V^\rho(x)$ on peut le vérifier

$\Longrightarrow$ on peut définir une applic. à partir de la définition ci-dessus qui permet ensuite de définir les formules de transformation.

– on veut encore imposer la condition : $D_\lambda S = \partial_\lambda S = (D_\lambda V^\mu) u_\mu + V^\mu (D_\lambda u_\lambda) \Longrightarrow D_\lambda u_\mu$