

ECOLE POLYTECHNIQUE FEDERALE DE LAUSANNE

*INTRODUCTION A L'ELECTRODYNAMIQUE  
ET OPTIQUE QUANTIQUES*

**EXERCICES**

---

Dr. F. REUSE

1997 - 98

---

## Chapitre 1

---

Exercice 1.1

On dispose de l'application  $\psi$  qui à chaque orientation  $\mathbf{n}$  fait correspondre un vecteur  $\psi_{\mathbf{n}} \in \mathbb{C}^2$  décrivant l'état quantique (interne) d'un neutron dont le moment magnétique (ou le spin) est orienté selon  $\mathbf{n}$ . Considérons alors une rotation  $R(\omega)$  de vecteur de rotation  $\omega$  agissant sur chaque orientation  $\mathbf{n}$ . Déterminer l'opérateur (unitaire)  $U(\omega)$  traduisant l'effet de cette rotation dans l'espace des états, c'est-à-dire l'opérateur tel que l'on ait l'égalité (1.20).

$$U(\omega) \psi_{\mathbf{n}} = \psi_{R(\omega)\mathbf{n}}, \quad \forall \mathbf{n}$$

à une phase dépendant de  $\omega$  et de  $\mathbf{n}$  près.

Y a-t-il indétermination sur l'opérateur  $U(\omega)$ ? Si oui quelle est sa nature?

Montrer ensuite que la correspondance  $U: R \rightarrow U(R)$  est telle que

$$U(R_1) U(R_2) = \omega(R_1, R_2) U(R_1 \cdot R_2)$$

pour tout couple de rotations  $R_1$  et  $R_2$ . Le symbole  $\omega(R_1, R_2)$  désigne un facteur de phase dont on discutera les valeurs. Discuter également le sens physique de la relation qui précède.

Finalement on utilisera les résultats précédemment acquis pour interpréter et déterminer l'évolution du moment magnétique d'un neutron (porteur d'un moment magnétique  $\mu$ ) mis en présence d'un champ d'induction  $\mathbf{B}$  indépendant du temps. L'hamiltonien régissant l'évolution s'écrit

$$H = -\mu \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}$$

Exercice 1.2

Existe-t-il un opérateur  $U_{\mathbf{T}}$  unitaire ou antiunitaire tel que :

$$U_{\mathbf{T}} \psi_{\mathbf{n}} = \psi_{-\mathbf{n}}, \quad \forall \mathbf{n} \quad (\text{à une phase près})$$

Tenter de donner une interprétation de cette opération  $U_{\mathbf{T}}$ .

Exercice 1.3

Calculer la matrice densité décrivant l'ensemble statistique des moments magnétiques (ou des spins) des neutrons d'un faisceau non-polarisé. Même question pour un faisceau dont la moitié des neutrons possèdent un moment magnétique orienté selon une direction fixe  $\mathbf{n}$  et l'autre moitié un moment magnétique orienté selon  $-\mathbf{n}$ . Comparer les résultats.

## Chapitre 2

### Exercice 2.1

Ecrire les équations d'évolution d'une particule relativiste classique, massive et chargée, en présence d'un champ électromagnétique extérieur, en fonction du temps propre  $s$  associé à cette particule.

$$\frac{dq(s)}{ds} = ? \quad \frac{dp(s)}{ds} = ?$$

$$\frac{dt(s)}{ds} = ? \quad \frac{dE(s)}{ds} = ?$$

Indication : 1) voir rappel § 2.1

2)  $ds^2 = dt^2 - dq^2/c^2$  *temps propre*

### Exercice 2.2

Montrer que la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement interdit les réactions suivantes (dans le vide) :

- i)  $e_- \rightarrow e_- + \text{photon}$
- ii)  $e_- + \text{photon} \rightarrow e_-$
- iii)  $e_- + e_+ \rightarrow \text{photon}$
- iv)  $\text{photon} \rightarrow e_- + e_+$

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4$$

$$\begin{cases} E' = E \\ p' = p \end{cases}$$

*cf. le C.H.*

### Exercice 2.3

Cet exercice constitue un bref survol des notions de base de la théorie de la relativité restreinte.

lière partie

A l'exception des relations phénoménologiques (4.4) et de leurs conséquences (4.12), transcrire les équations fondamentales de l'électrodynamique classique dans le cadre du formalisme quadridimensionnel d'espace-temps.

Par définition posons :

1)  $x \equiv (x^1, x^2, x^3, x^4) \equiv (x, t)$

2)  $(j^1(x), j^2(x), j^3(x)) \equiv \mathbf{j}(x)$  et  $j^4(x) \equiv \rho(x)$

3)  $F_{i4}(x) \equiv E_i(x)$   $i = 1, 2, 3$  et  $F_{ij}(x) \equiv B^k(x)$   $i, j, k$  perm. circ. 1, 2, 3  
avec  $F_{\mu\nu}(x)$ ,  $\mu, \nu = 1, \dots, 4$  antisymétrique

4)  $(f_1(x), f_2(x), f_3(x)) \equiv \mathbf{f}(x)$  et  $f_4(x) \equiv -s(x)$   
avec  $s(x)$  la densité de puissance.  
*densité des forces de Lorentz*

5)  $H^{4i}(x) \equiv D^i(x)$   $i = 1, 2, 3$  et  $H^{ij}(x) = H_k(x)$   $i, j, k$  perm. circ. 1, 2, 3  
avec  $H^{\mu\nu}(x)$ ,  $\mu, \nu = 1, \dots, 4$  antisymétrique

6)  $(A_1(x), A_2(x), A_3(x)) \equiv \mathbf{A}(x)$  et  $A_4(x) \equiv -\Phi(x)$

Notons  $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$

$\downarrow$   
*cf. cours électrodyn.*

Montrer que l'équation de continuité de la charge (4.1) s'écrit maintenant

$$\partial_\mu j^\mu(x) \equiv 0 \quad (1)$$

que l'action des champs sur les courants (4.2) s'écrit

$$f_\mu(x) = F_{\mu\nu}(x) j^\nu(x) \quad \begin{cases} \vec{f} = \mathbf{j} \wedge \mathbf{B} + \rho \cdot \vec{E} \\ f_4 = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \end{cases} \quad \mu = 1, 2, 3 \quad (2)$$

que les équations de Maxwell homogènes et inhomogènes s'écrivent respectivement

$$\partial_\mu F_{\nu\rho}(x) + \partial_\nu F_{\rho\mu}(x) + \partial_\rho F_{\mu\nu}(x) \equiv 0 \quad \mu, \nu, \rho \text{ différents} \quad (3)$$

et

$$\partial_\mu H^{\mu\nu}(x) = -j^\nu(x) \quad \text{Eq. Maxwell inhomogène} \quad (3 \text{ ii})$$

que les relations (4.10) s'écrivent

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \quad (4)$$

et, finalement, que les transformations de jauge (4.11) s'écrivent

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x) \quad (5)$$

fonction scalaire quelconque

2ième partie

$\Lambda_0 = V_0$

On considère un changement de coordonnées d'espace-temps fourni par une transformation linéaire de la forme

$$x' = \Lambda x \quad \text{ou encore} \quad x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad (6)$$

avec  $\det \Lambda = 1^*$ . Vérifier que, par un tel changement de coordonnées, les équations (1) à (5) se transforment de manière "covariante", c'est-à-dire sans changer de "forme", lorsque les lois de transformation des densités et champs concernés sont les suivantes\*\* :

$$\begin{aligned} j'^\mu(x') &= \Lambda^\mu_\nu j^\nu(x) \\ H'^{\mu\nu}(x') &= \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\lambda H^{\rho\lambda}(x) \\ f'_\mu(x') &= (\Lambda^{-1})^\nu_\mu f_\nu(x) \end{aligned} \quad (7)$$

$$F'_{\mu\nu}(x') = (\Lambda^{-1})^\rho_\mu (\Lambda^{-1})^\lambda_\nu F_{\rho\lambda}(x)$$

$$A'_\mu(x') = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu A_\nu(x)$$

$$\text{et} \quad \Lambda'(x') = \Lambda(x)$$

\* Cette restriction a des raisons pédagogiques. Elle permet une première discussion ne faisant pas intervenir le caractère densitaire de la densité de courant, de la densité de force et des champs  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{H}$  autrement dit  $H^{\mu\nu}$ .

\*\* En fait ces lois de transformations sont imposées par l'hypothèse physique de l'invariance de la charge électrique. (charge électrique est invariante)

Suggestion : commencer par établir les relations

$$\partial_\nu = \Lambda^\mu_\nu \partial'_\mu \quad \text{où} \quad \partial'_\mu \equiv \partial/\partial x'^\mu \quad (8)$$

3ième partie (mise en application du Principe de Relativité)

Jusqu'ici nos considérations ont été purement mathématiques. La transformation  $\Lambda$  est arbitraire et peut notamment coïncider aussi bien avec une transformation de Galilée qu'une transformation de Lorentz. Considérons maintenant les relations phénoménologiques (4.4), écartées jusqu'à maintenant de la discussion. Ces dernières relations, traduites dans le formalisme quadridimensionnel d'espace-temps, impliquent une relation linéaire

$$F_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2} \mu_{\mu\nu\rho\lambda} H^{\rho\lambda}(x) \quad \begin{matrix} \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \end{matrix} \quad (v_{\text{light}}) \quad (9)$$

entre les champs  $F_{\mu\nu}$  et  $H^{\rho\lambda}$ . Le "tenseur phénoménologique"  $\mu_{\mu\nu\rho\lambda}$  est antisymétrique relativement aux permutations des indices  $\mu$  et  $\nu$  et relativement aux permutations des indices  $\rho$  et  $\lambda$ . En fait, les relations phénoménologiques (4.4) sont telles que l'on peut écrire le tenseur phénoménologique  $\mu_{\mu\nu\rho\lambda}$  sous la forme

$$\mu_{\mu\nu\rho\lambda} = \mu_0 (\epsilon_{\mu\rho} \epsilon_{\nu\lambda} - \epsilon_{\mu\lambda} \epsilon_{\nu\rho}) \quad (10)$$

avec  $\epsilon_{\mu\nu} = \epsilon_{\nu\mu}$  symétrique. On montre alors que le tenseur (10) traduit les relations phénoménologiques (4.4) si et seulement si

$$\epsilon_{\mu\nu} = 0 \quad \mu \neq \nu \quad \text{et} \quad \epsilon_{\mu\mu} = \pm(1, 1, 1, -c^2) \quad (11)$$

Vérifier la suffisance de cette condition. De sa nécessité déduire que les changements de coordonnées qui préservent les relations phénoménologiques doivent satisfaire la condition

$$\epsilon'_{\mu\nu} \equiv (\Lambda^{-1})^\rho_\mu (\Lambda^{-1})^\lambda_\nu \epsilon_{\rho\lambda} = \epsilon_{\mu\nu} \quad (12)$$

L'ensemble  $\mathcal{L}$  des transformations  $\Lambda$  qui satisfont la condition (12) constitue un groupe pour la composition des applications. Ce groupe est appelé le groupe de Lorentz.

Montrer maintenant que les équations (4.12) peuvent s'écrire sous la forme

$$\square A_\mu(x) - \partial_\mu (\partial_\nu A^\nu(x)) = -\mu_0 j_\mu(x) \quad (13)$$

avec  $j_\mu(x) = g_{\mu\nu} j^\nu(x)$

et  $A^\nu(x) = g^{\nu\mu} A_\mu(x)$

$$g^{\nu\mu} = 0 \quad \text{si} \quad \mu \neq \nu \quad \text{et} \quad g^{\mu\mu} = \frac{1}{g_{\mu\mu}} \quad \text{pour} \quad \mu = 1, \dots, 4 \quad (14)$$

$$\square \equiv g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \quad (15)$$

Notamment que la condition jauge de Lorentz s'écrit

$$\partial_\nu A^\nu(x) \equiv 0 \quad (16)$$

#### 4ième partie

Les transformations de Lorentz correspondant à un changement de référentiels obtenu par accélération sont orthochrones et propres, c'est-à-dire telles que

$$\Lambda^4_{44} \geq 1 \quad \text{et} \quad \det \Lambda = 1$$

↳ change ni l'orient. temps ni orient. espace

respectivement.

Construire explicitement à partir de la condition (12) une transformation de Lorentz  $\Lambda$  correspondant au passage d'un référentiel  $\mathcal{R}$  à un référentiel  $\mathcal{R}'$  animé d'une vitesse  $\mathbf{v}$  relativement à  $\mathcal{R}$  et telle que les composantes de la position  $x_\perp$ , perpendiculaires à  $\mathbf{v}$ , restent inchangées.

⊗ Réponse :

$$x \rightarrow x' = \Lambda x \quad \begin{cases} x'_\perp = x_\perp + \gamma (x_\parallel - \mathbf{v} \cdot t) \\ t' = \gamma (t - \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} / c^2) \end{cases} \quad (17)$$

où nous avons posé  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

Etablir, à choix l'une ou/et l'autre des lois de transformations correspondantes pour les densités et champs suivants

*cf. exo. 4.4*

$$\begin{cases} j'_\parallel(x') = j_\parallel(x) + \gamma (j_\perp(x) - \mathbf{v} \cdot \rho(x)) \\ \rho'(x') = \gamma (\rho(x) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{j}(x)/c^2) \end{cases} \quad (18)$$

⊗

$$\begin{cases} \mathbf{B}'(x') = \mathbf{B}_\parallel(x) + \gamma (\mathbf{B}_\perp(x) - \mathbf{v} \wedge \mathbf{E}(x)/c^2) \\ \mathbf{E}'(x') = \mathbf{E}_\parallel(x) + \gamma (\mathbf{E}_\perp(x) + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}(x)) \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} \mathbf{f}'(x') = \mathbf{f}_\parallel(x) + \gamma (\mathbf{f}_\perp(x) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{s}(x)/c^2) \\ s'(x') = \gamma (s(x) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}(x)) \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} \mathbf{A}'(x') = \mathbf{A}_\parallel(x) + \gamma (\mathbf{A}_\perp(x) - \mathbf{v} \cdot \Phi(x)/c^2) \\ \Phi'(x') = \gamma (\Phi(x) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(x)) \end{cases} \quad (21)$$

Interpréter ces dernières lois de transformations.

#### 5ième partie

Passons à la dynamique de la particule de masse  $m > 0$  et de charge  $e$ . Partant de l'hypothèse qu'à la limite des vitesses nulles la dynamique de Newton est exacte, montrer que l'équation d'évolution d'une particule (non-rayonnante) de masse au repos  $m$  et de charge  $e$  s'écrit

$$m \frac{d^2 q^\mu}{ds^2} = e F^\mu{}_\nu(q) \frac{dq^\nu}{ds} \quad (22)$$

Dans cette équation la variable  $s$  désigne le **temps propre** de la particule défini par

$$ds = \sqrt{dt^2 - d\mathbf{q}^2/c^2} \quad (23)$$

Définissons  $p_\mu$  par la relation

$$m g_{\mu\nu} \frac{dq^\nu}{ds} = p_\mu - e A_\mu(q) \quad (24)$$

Montrer que la grandeur  $p_\mu$  satisfait la condition dite "de masse".

$$g^{\mu\nu} (p_\mu - e A_\mu(q)) (p_\nu - e A_\nu(q)) = -m^2 c^2 \quad (25)$$

- Montrer que  $p$  est canoniquement conjuguée à  $q$ .
- Exprimer la loi de transformation de  $p_\mu$  sous l'action de la transformation de Lorentz (17). Interpréter  $p_4$  et discuter la limite  $c \rightarrow \infty$ .

6ième partie

Dans le cadre de l'exercice 4.5 nous avons établi, à la limite des vitesses galiléennes, l'équation d'évolution suivante (Abraham Lorentz)

$$m \ddot{q} = F_{ext} + \frac{e^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \dddot{q} \quad (26)$$

pour une particule rayonnante de masse  $m$  et de charge  $e$ . Montrer sans aucun calcul que l'on peut en déduire l'équation relativiste exacte suivante

$$m \frac{d^2 q^\mu}{ds^2} = e F^\mu{}_\nu(q) \frac{dq^\nu}{ds} + \frac{e^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \left( \frac{d^3 q^\mu}{ds^3} - \frac{dq^\mu}{ds} \frac{g_{\rho\lambda}}{c^2} \frac{d^2 q^\rho}{ds^2} \frac{d^2 q^\lambda}{ds^2} \right) \quad (27)$$

gouvernant l'évolution d'une particule rayonnante de masse au repos  $m$  et de charge  $e$ . Cette équation est connue sous le nom d'équation de Lorentz-Dirac.

Exercice 2.4

Montrer que chacune des composantes d'une solution  $\psi(x)$  de l'équation de Dirac libre satisfait l'équation de Klein-Gordon libre (2.11) pour la même masse.

Suggestion : Partir de l'équation de Dirac dans sa forme manifestement covariante (2.34). La démonstration ne doit pas excéder 3 lignes lorsque les relations d'anti-commutation (2.38) sont utilisées judicieusement après avoir constaté que l'opérateur  $\square$  peut s'écrire  $g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$  en notation spatio-temporelle.

Exercice 2.5

Etablir les relations suivantes :

- $[\alpha \cdot p, L] = -i \hbar \alpha \wedge p$
- $[\alpha \cdot p, \Sigma] = +2 i \alpha \wedge p$
- $(\alpha \cdot p)(\alpha \cdot q) = p \cdot q - i \Sigma \cdot L$
- $(\alpha \cdot q)(\alpha \cdot p) = q \cdot p + i \Sigma \cdot L$
- $\{\alpha \cdot p, \Sigma \cdot L\}_+ = -2 \hbar \alpha \cdot p$

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C] = \{A, B\}C - B\{A, C\}$$

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{p} = \alpha^i \otimes p_i$$

↙ ↘  
α et p agissent sur des espaces différents

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})_i = \epsilon_{ijk} a^j b^k \quad \epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } i, j, k \text{ p. paire de } 1, 2, 3 \\ -1 & \text{si perm. impaire} \\ 0 & \text{sinon (le 2 indices sont égaux)} \end{cases}$$

$$\Sigma = \frac{1}{2i} \vec{\alpha} \wedge \vec{\alpha} \Rightarrow \Sigma_j = \frac{1}{2i} \epsilon_{jke} \alpha^k \alpha^e$$

Exercice 2.6

Etablir et interpréter les relations de commutation  $[\pi_j, q^k] = -i \hbar \delta_j^k$

$$[\underbrace{\alpha \cdot \omega \cdot \Sigma}_{\text{gén. rot}}] = +2 i \omega \wedge \alpha$$

$$[\alpha_j, \alpha^k] = 2 \delta^{jk} \mathbb{1}$$

$$\mathbb{1} = \mathbb{1} \quad \mathbb{1}^2 = (\mathbb{1}^2, 0^3 x)$$

où  $\omega$  désigne un vecteur arbitraire de  $\mathbb{R}^3$ .

Exercice 2.7

Montrer que les opérateurs

$$S_{NW} = \frac{\hbar}{2} \frac{m c^2}{H} \left( \Sigma + \frac{(\mathbf{p} \cdot \Sigma) \mathbf{p}}{m(H + m c^2)} - \frac{\mathbf{p} \wedge \boldsymbol{\gamma}}{m c} \right)$$

possèdent toutes les propriétés inhérentes aux opérateurs de spin mais qu'en plus ils constituent des constantes du mouvement dans le cas libre. Quel est l'opérateur d'hélicité correspondant ?

**Exercice 2.8**

Thème : Etude de l'atome d'hydrogène relativiste selon l'équation de Klein-Gordon.

L'atome d'hydrogène est assimilé à un électron sans spin de masse  $m$  et de charge  $-e$  dont l'évolution en présence du champ coulombien du proton.

$$A_\mu(x) \equiv (0, -\Phi(x)) \text{ avec } \Phi(x) = \frac{-e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|x|}$$

est gouvernée par l'équation de Klein-Gordon (2.10)

Le spectre d'énergie de l'atome est constitué des valeurs de l'énergie  $E$  pour lesquelles l'équation de Klein-Gordon possède une solution stationnaire de la forme

$$\Psi(x) = \varphi(x) \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)$$

où

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\varphi(x)|^2 d^3x < \infty$$

1) Chercher des solutions de la forme

$$\varphi(x) = R(r) Y_\ell^m(\theta, \varphi), \quad \ell = 0, 1, 2, \dots$$

en coordonnées polaires et montrer que la fonction d'onde radiale satisfait l'équation

$$\left[ \hbar^2 \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r - \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{1}{c^2} \left( E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right)^2 - m^2 c^2 \right] R(r) = 0$$

2) Introduire les grandeurs bien connues

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \quad \lambda = \frac{\hbar}{m c} \quad a_0 = \frac{\hbar}{\alpha m c}$$

$$\rho = \frac{r}{\lambda} \quad \text{et} \quad \varepsilon = \frac{E}{m c^2}$$

puis poser  $u(\rho) \equiv \rho R(\lambda\rho)$  et vérifier que

$$\left[ \frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{\ell(\ell+1) - \alpha^2}{\rho^2} + \frac{2\alpha\varepsilon}{\rho} + (\varepsilon^2 - 1) \right] u(\rho) = 0$$

3) Exploiter l'analogie formelle que présente cette dernière équation radiale avec l'équation radiale de l'atome d'hydrogène non-relativiste de Schrödinger. Montrer que le spectre d'énergie de l'atome est fourni par la formule

$$E = m c^2 \left[ 1 + \frac{\alpha^2}{(\gamma + n')^2} \right]^{-1/2} \quad n' = 1, 2, 3, \dots$$

où

$$\gamma = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(\ell + \frac{1}{2}\right)^2 - \alpha^2}$$

Montrer que c'est la grandeur  $n = n' + \ell$  qui joue le rôle de nombre quantique principal.

Développer le spectre  $E$  en puissance de  $\alpha^2$  jusqu'au terme en  $\alpha^4$  y compris et commenter le résultat.

$$E = m c^2 \left[ 1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} - \frac{\alpha^4}{2n^4} \left( \frac{n}{\ell + 1/2} - \frac{3}{4} \right) + O(\alpha^6) \right]$$

**Exercice 2.9**

On considère la transformation de Lorentz pure  $\Lambda$  de vitesse  $v$

$$\left. \begin{matrix} x \\ t \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\Lambda} \left\{ \begin{matrix} x' = x_\perp + \gamma(x_\parallel - vt) \\ t' = \gamma(t - v \cdot x/c^2) \end{matrix} \right. \quad (1)$$

où

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$



Déterminer la matrice  $S(\Lambda)$  correspondante figurant dans la loi de transformation (2.19) de la fonction d'onde de Dirac.

Il existe de nombreuses manières de traiter ce problème. Celle qui est suggérée dans suite est systématique et ne nécessite aucune connaissance de théorie des groupes bien qu'exploitant le concept de sous-groupe à 1 paramètre d'un groupe de Lie.

1<sup>ère</sup> étape : Introduire un vecteur unité  $\mathbf{n}$  tel que  $\mathbf{v} = v \mathbf{n}$  et supposé fixé. En revanche la vitesse scalaire  $v$  est supposée variable. La transformation de Lorentz  $\Lambda$  devient dépendante de  $v$  et sera notée  $\Lambda(v)$ . La matrice spinorielle correspondante  $S(\Lambda)$  sera alors notée  $S(v)$ .

Partant de la relation (2.41) montrer que

$$[\gamma^\rho, S(v)^{-1} \frac{dS(v)}{dv} S(v)] = (\Lambda(v)^{-1})^\rho{}_\mu \Lambda'(v)^\mu{}_\nu \gamma^\nu \quad (2)$$

où  $S'(v)$  et  $\Lambda'(v)$  désignent respectivement les dérivées de  $S(v)$  et  $\Lambda(v)$  par rapport à  $v$ .

2<sup>ème</sup> étape : Partant de (1) montrer que la matrice  $\Lambda(v)^{-1} \Lambda'(v)$  s'écrit

$$\Lambda(v)^{-1} \Lambda'(v) = -\gamma(v)^2 \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{n} \\ \mathbf{n}/c^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

3<sup>ème</sup> étape : Utilisant les résultats (1) et (2) établir les relations de commutation

$$[\gamma^i, S(v)^{-1} S'(v)] = -\gamma(v)^2 n^i \gamma^4$$

et

$$[\gamma^4, S(v)^{-1} S'(v)] = -\gamma(v)^2 \frac{\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\gamma}}{c^2}$$

Montrer qu'elles impliquent que

$$S(v)^{-1} S'(v) = -\frac{\gamma(v)^2}{2c} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\alpha} + \lambda \mathbb{1} \quad (4)$$

où  $\lambda$  est un nombre complexe arbitraire.

Suggestion : Observer que

$$[\gamma^i, \gamma^4 \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\gamma}] = -2 n^i \gamma^4 \quad \text{et} \quad [\gamma^4, \gamma^4 \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\gamma}] = -\frac{2}{c^2} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\gamma}$$

Utiliser l'irréductibilité de l'ensemble des matrices  $\gamma^\mu$  (Lemme de Schur).

4<sup>ème</sup> étape : Le résultat (4) fournit une équation différentielle en  $v$  pour  $S(v)$ . Intégrer cette dernière équation après avoir préalablement constaté que  $S(0) = \mathbb{1}$  à une phase près.

Résultat final

$$S(v) \equiv S(\Lambda) = \exp\left(-\frac{\boldsymbol{\zeta} \cdot \boldsymbol{\alpha}}{2}\right) \text{ mod une phase} \quad (5)$$

avec

$$\boldsymbol{\zeta} = \frac{v}{|v|} \arg \text{th} \frac{|v|}{c}$$

Observation : La matrice  $S(\Lambda)$  n'est pas "unitaire". En fait elle peut être choisie hermitique.

Exercice 2.10

On considère un électron libre de quantité de mouvement  $\mathbf{p}$  et d'hélicité  $\sigma$ . L'énergie est positive. Effectuer le changement de référentiel correspondant à une transformation de Lorentz pure de vitesse  $v$ . Quel est l'état de quantité de mouvement et d'hélicité de l'électron "vu" du nouveau référentiel.

On limitera la discussion aux cas où  $\mathbf{p}$  est parallèle et perpendiculaire à  $v$ . Discuter les résultats en fonction de la vitesse du nouveau référentiel.



**Exercice 2.11**

Montrer que les solutions de l'équation de Dirac avec champ électromagnétique extérieur satisfait l'équation de Klein-Gordon avec second membre suivante

$$\left\{ g^{\mu\nu} \left( \partial_\mu - i \frac{e}{\hbar} A_\mu(x) \right) \left( \partial_\nu - i \frac{e}{\hbar} A_\nu(x) \right) - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right\} \psi(x) = \frac{e}{\hbar} \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}(x) \psi(x)$$

où  $F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$ . Interpréter physiquement le second membre de l'équation.

**Exercice 2.12**

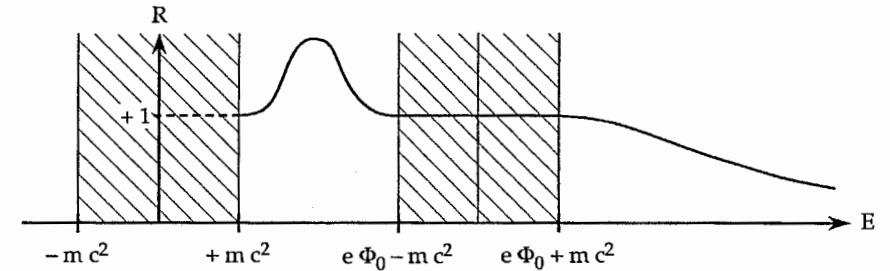
Thème : A la découverte du paradoxe de Klein.

On considère le problème unidimensionnel d'un électron de Dirac en présence d'un potentiel électrostatique extérieur  $\Phi(z)$  de la forme

$$\Phi(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ \Phi_0 & z \geq 0 \end{cases}$$

et nous faisons l'hypothèse  $e\Phi_0 > 2mc^2$ .

Le but de l'exercice est l'étude des coefficients de réflexion  $R$  et de transmission  $T$  d'un faisceau d'électrons incidents de quantité de mouvement  $p > 0$  et d'hélicité  $\sigma$ . Lorsque l'énergie  $E$  des électrons incidents est supérieure à  $mc^2 + e\Phi_0$  le coefficient de réflexion  $R$  est compris entre 0 et 1. Il vaut 1 lorsque  $e\Phi_0 - mc^2 \leq E \leq e\Phi_0 + mc^2$ . En revanche lorsque  $mc^2 \leq E \leq e\Phi_0 - mc^2$  ce coefficient de réflexion devient supérieur à 1. C'est dans ce fait que réside le paradoxe de Klein de la théorie de Dirac



- 1) Ecrire l'équation de Dirac correspondant à la situation unidimensionnelle envisagée puis constater que l'observable caractérisée par l'opérateur  $\Sigma_z$  est une constante du mouvement.
- 2) Supposons que l'électron incident possède une hélicité  $\sigma = +1$ . Montrer que la fonction d'onde stationnaire d'énergie  $E$  correspondant à une telle situation a ses deuxième et quatrième composantes identiquement nulles

$$\Psi(z) = \begin{bmatrix} \Psi_1(z) \\ 0 \\ \Psi_3(z) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Montrer que les composantes non-nulles satisfont les équations couplées

$$\begin{bmatrix} mc^2 + e\Phi(z) & -i\hbar c d_z \\ -i\hbar c d_z & -mc^2 + e\Phi(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_1(z) \\ \Psi_3(z) \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} \Psi_1(z) \\ \Psi_3(z) \end{bmatrix} \quad (1)$$

et que la densité de courant de probabilité a pour expression

$$j(z) = c \left( \Psi_1(z)^* \Psi_3(z) + \Psi_3(z)^* \Psi_1(z) \right) \quad (2)$$

- 3) Il est utile pour la suite d'introduire les grandeurs sans dimension suivantes

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{E}{m c^2} & k &= \frac{p}{m c} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1} & x &= z \frac{m c}{\hbar} \\ \varepsilon_0 &= \frac{e \Phi_0}{m c^2} & k' &= \frac{p'}{m c} = \sqrt{(\varepsilon - \varepsilon_0)^2 - 1} & & , |\varepsilon - \varepsilon_0| \geq 1 \\ & & \chi' &= \sqrt{1 - (\varepsilon - \varepsilon_0)^2} & & , |\varepsilon - \varepsilon_0| \leq 1 \end{aligned}$$

A l'aide des expressions (2.80) montrer que dans la région  $z \leq 0$  (ou  $x \leq 0$ )

$$\begin{bmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_3(x) \end{bmatrix} = U_{\text{inc}} e^{ikx} + \rho U_{\text{refl.}} e^{-ikx} \quad (3)$$

avec

$$U_{\text{inc}} = A \begin{bmatrix} \sqrt{\varepsilon + 1} \\ \sqrt{\varepsilon - 1} \end{bmatrix} \quad U_{\text{refl.}} = A \begin{bmatrix} \sqrt{\varepsilon + 1} \\ -\sqrt{\varepsilon - 1} \end{bmatrix} \quad (4)$$

où  $A$  est un coefficient de normalisation dont la valeur n'est pas importante pour la suite.

Vérifier que les courants incidents et réfléchis ont pour expressions

$$j_{\text{inc}} = 2 c |A|^2 \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \quad \text{et} \quad j_{\text{refl.}} = -2 c |A|^2 |\rho|^2 \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$$

et par conséquent que le coefficient de réflexion s'écrit

$$R = |\rho|^2 \quad (5)$$

4) Considérons maintenant la région  $z \geq 0$  (ou  $x \geq 0$ ). Montrer que si :

i)  $e \Phi_0 + m c^2 \leq E$ , c'est-à-dire si  $\varepsilon_0 + 1 \leq \varepsilon$  alors selon l'équation (1)

$$\begin{bmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_3(x) \end{bmatrix} = U_{\text{trans}} e^{ik'x} \quad \text{avec} \quad U_{\text{trans}} = B \begin{bmatrix} \sqrt{\varepsilon - \varepsilon_0 + 1} \\ \sqrt{\varepsilon - \varepsilon_0 - 1} \end{bmatrix} \quad (6)$$

ii)  $e \Phi_0 - m c^2 \leq E \leq e \Phi_0 + m c^2$ , c'est-à-dire si  $\varepsilon_0 - 1 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0 + 1$  alors selon l'équation (1)

$$\begin{bmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_3(x) \end{bmatrix} = U_{\text{évan}} e^{-\chi'x} \quad \text{avec} \quad U_{\text{évan}} = B \begin{bmatrix} \sqrt{1 + (\varepsilon - \varepsilon_0)} \\ i \sqrt{1 - (\varepsilon - \varepsilon_0)} \end{bmatrix} \quad (7)$$

iii)  $m c^2 \leq E \leq e \Phi_0 - m c^2$ , c'est-à-dire si  $1 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0 - 1$  alors selon l'équation (1)

$$\begin{bmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_3(x) \end{bmatrix} = U_{\text{trans}} e^{ik'x} \quad \text{avec} \quad U_{\text{trans}} = B \begin{bmatrix} \sqrt{\varepsilon_0 - \varepsilon - 1} \\ -\sqrt{\varepsilon_0 - \varepsilon + 1} \end{bmatrix} \quad (8)$$

zone intermédiaire

$e^{\pm}$

: correct: th. champs

5) Imposer maintenant les conditions de continuité de la fonction d'onde en  $z = 0$  dans les 3 situations i), ii), et iii) définies précédemment. Ces conditions fournissent la valeur de  $\rho$  et "a fortiori" le coefficient de réflexion  $R$ . Vérifier que si

i)  $\varepsilon_0 + 1 \leq \varepsilon$  alors

$$\rho = \frac{1 - s}{1 + s} \quad \text{avec} \quad s = \frac{\sqrt{(\varepsilon - \varepsilon_0 - 1)(\varepsilon + 1)}}{\sqrt{(\varepsilon - \varepsilon_0 + 1)(\varepsilon - 1)}} \quad (9)$$

Donc  $\varepsilon_0 + 1 \rightarrow \varepsilon \rightarrow +\infty$  implique  $0 \rightarrow s \rightarrow 1$  et finalement  $1 \rightarrow R \rightarrow 0$

ii)  $\varepsilon_0 - 1 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0 + 1$  alors

$$\rho = \frac{1 - s}{1 + s} \quad \text{avec} \quad s = i \sqrt{\frac{(1 - (\varepsilon - \varepsilon_0))(\varepsilon + 1)}{(1 + (\varepsilon - \varepsilon_0))(\varepsilon - 1)}} \quad (10)$$

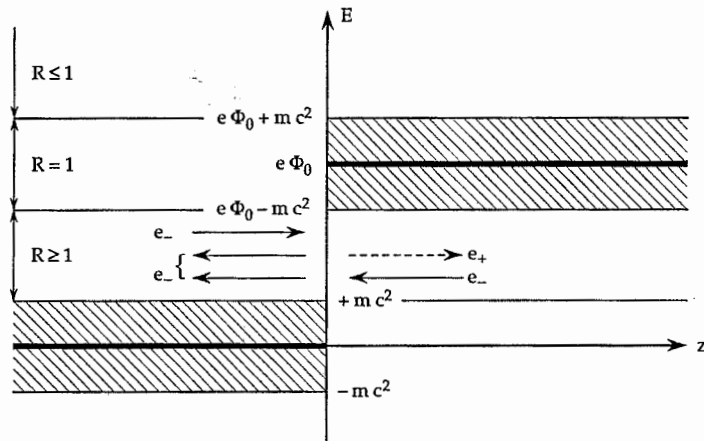
Donc  $\varepsilon_0 - 1 \rightarrow \varepsilon \rightarrow \varepsilon_0 + 1$  implique  $R = |\rho|^2 = 1$

iii)  $1 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0 - 1$  alors

$$\rho = \frac{1-s}{1+s} \quad \text{avec} \quad s = - \sqrt{\frac{(\varepsilon_0 - \varepsilon + 1)(\varepsilon + 1)}{(\varepsilon_0 - \varepsilon - 1)(\varepsilon - 1)}} \quad (11)$$

Donc  $1 \rightarrow \varepsilon \rightarrow \varepsilon_0/2 \rightarrow \varepsilon \rightarrow \varepsilon_0 - 1$  implique  $-\infty \rightarrow s \rightarrow -(\varepsilon_0 + 2)/(\varepsilon_0 - 2)$   
 $\rightarrow s \rightarrow -\infty$  (symétriquement) et finalement  $1 \rightarrow R \rightarrow (\varepsilon_0/2)^2 \rightarrow R \rightarrow 1$

6) Lorsque  $m^2 c^2 \leq E \leq e\Phi_0 - m^2 c^2$  avec  $e\Phi_0 > 2m^2 c^2$  le coefficient de réflexion  $R$  est supérieur (ou égal) à 1. Ce fait constitue le "paradoxe" de Klein. En fournir une explication. Pour ce faire se remémorer l'interprétation du vide dans la théorie des trous de Dirac. Le support de la figure suivante est utile.



### Exercice 2.13

On considère la diffusion d'un électron relativiste par le potentiel coulombien d'un noyau.

$$\Phi(x) = \frac{Z(-e)}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|x|}$$

A l'aide de la règle d'or de Fermi, calculer la section efficace différentielle de diffusion au premier ordre de perturbation. Discussion du résultat.

### Chapitre 3

## Chapitre 4

### Exercice 4.1

Pour une onde électromagnétique plane de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  se propageant dans le vide, déterminer la densité d'énergie et la densité de quantité de mouvement en fonction du temps et en valeurs moyennes temporelles.

Déterminer aussi les densités de courant correspondantes  $\mathbf{S}$  (vecteur de Poynting) et  $\boldsymbol{\tau}_k$ ,  $k = 1, 2, 3$  (tenseur de Maxwell) respectivement.

Qu'est-ce que la pression de radiation et quelle est présentement sa valeur ?

### Exercice 4.2

Dans le cadre de la théorie classique du champ électromagnétique on considère une onde plane décrite par le potentiel-vecteur

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = a_{k\lambda}(t) \mathbf{A}_\lambda(\mathbf{k}, \mathbf{x}) + \text{c.c.} \quad (1 \text{ seul mode})$$

où

$$a_{k\lambda}(t) = a_{k\lambda}(0) e^{-i\omega(\mathbf{k})t}$$

et où  $\mathbf{A}_\lambda(\mathbf{k}, \mathbf{x})$  est défini sous (4.34). Le vecteur de polarisation  $\mathbf{e}_\lambda(\mathbf{k})$ , figurant dans l'expression de  $\mathbf{A}_\lambda(\mathbf{k}, \mathbf{x})$ , écrit sous la forme

$$\mathbf{e}_\lambda(\mathbf{k}) = \mathbf{u} + i\mathbf{v}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$$

satisfait les conditions (4.30). Autrement dit, les vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  satisfont les conditions

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{u}^2 + \mathbf{v}^2 = 1$$

Étudier l'évolution au cours du temps, en  $\mathbf{x}$  fixé, des champs électriques  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  et d'induction  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$  lorsque

- i)  $\mathbf{v} = 0$   
 ii)  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$  et  $\mathbf{u}^2 = \mathbf{v}^2 = 1/2$

Montrer que la condition supplémentaire  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$  n'est pas restrictive. Compte tenu de ce dernier fait discuter le cas général.

### Exercice 4.3

Soient  $\mathbf{e}_\lambda(\mathbf{k})$ ,  $\lambda = 1, 2$  deux vecteurs de polarisation vérifiant les conditions (4.30). Etablir l'identité

$$\sum_{\lambda=1}^2 (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_\lambda(\mathbf{k})) (\mathbf{e}_\lambda(\mathbf{k})^* \cdot \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - \frac{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{k})(\mathbf{k} \cdot \mathbf{y})}{k^2}$$

*vect. orthonormés*

$\forall \mathbf{x}$  et  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ . En déduire la formule

$$\sum_{\lambda=1}^2 \mathbf{e}_\lambda(\mathbf{k})_i \mathbf{e}_\lambda(\mathbf{k})_j^* = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \quad i, j = 1, 2, 3$$

### Exercice 4.4

Dans le cadre de l'électrodynamique classique, on désire étudier le rayonnement émis par un moment dipolaire magnétique  $\boldsymbol{\mu}(t)$  dont le mouvement est donné. On suppose que  $\boldsymbol{\mu}(t)$  est fixé à l'origine des coordonnées. (La réaction du champ sur l'évolution du moment magnétique est bien entendu négligée).

- 1) Lorsque  $t \leq 0$ , il y a absence de rayonnement et  $\boldsymbol{\mu}(t) = \boldsymbol{\mu}(0)$  est immobile.
- 2) Lorsque  $t > 0$ , le moment magnétique  $\boldsymbol{\mu}(t)$  évolue et génère un rayonnement.

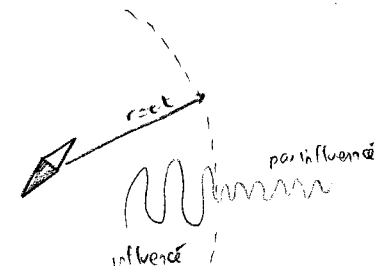
Déterminer  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \forall \mathbf{x}$  et  $\forall t$  en jauge de Coulomb. Étudier et discuter séparément les cas où :

$|\mathbf{x}| \leq ct$  et  $|\mathbf{x}| > ct$

$j(\mathbf{z}, t)$   
 $\downarrow$   
 $j_{k\lambda}$   
 $\downarrow$   
 $a_{k\lambda}$   
 $\downarrow$   
 $(\Pi(\mathbf{x}, t); A(\mathbf{z}, t))$

densité courant  
 eq. 4.50  
 amplitude de mode

$t > 0$



avec eqn. diff. (4.54)  
 $\rightarrow a_{k\lambda}(t) = a_{k\lambda}(0) \cdot e^{-i\omega(\mathbf{k})t} + \int_0^t ds \left[ i \frac{j_{k\lambda}}{\sqrt{2} \omega(\mathbf{k})/\hbar} \right] \cdot e^{i\omega(\mathbf{k}) \cdot (s-t)}$

3

- $\text{div}(f \mathbf{1}_g) = -f \cdot \text{rot} g + g \cdot \text{rot} f$
- $\text{rot}(\text{rot} f) = \Delta f + \text{grad} \text{div} f$

• source ponctuelle:  $\mu(x, t) d^3x = \mu(t) \int_V \delta(x) d^3x$

riche:  $\frac{1}{\epsilon_0} \sum_k \frac{1}{k^2} i k e^{i k x} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{k^2} e^{i k x} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \cos(kx) dk$

riche:  $\xrightarrow{L \rightarrow \infty} \frac{1}{\epsilon_0} \text{grad}_x \sum_k e^{i k x} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^3} \text{grad}_x \left( \int d^3k \frac{e^{i k x}}{k^2} \right) \dots \rightarrow \text{ok}$

Marche à suivre :

L'hamiltonien régissant l'évolution du champ électromagnétique est de la forme :

$$H(p, q, t) = H_{\text{libre}}(p, q, t) + \underbrace{\dot{\mu}(t) \cdot B(0, t)}_{+ H^{\text{int}}(p, q, t)}$$

i) Montrer que le terme d'interaction peut s'écrire sous la forme :

$$- \int d^3x \mathbf{A}(x, t) \cdot \mathbf{j}(x, t)$$

puis calculer les grandeurs  $j_{k\lambda}(t)$  définies sous (4.50)

ii) Pour  $t \leq 0$ , écrire la solution statique de (4.51) pour les  $a_{k\lambda}(t)$  sous la forme

$$a_{k\lambda}(t) = b_{k\lambda}(\mu(0)).$$

iii) Déterminer  $\mathbf{A}(x, t)$  pour  $t \leq 0$  à l'aide de (4.48 i)

Suggestion : utiliser le fait que  $\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{e^{i k x}}{k^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x|}$

iv) Calculer les  $a_{k\lambda}(t)$  pour  $t \geq 0$ . Montrer que

$$a_{k\lambda}(t) = b_{k\lambda}(\mu(t)) - e^{-i\omega(k)t} \int_0^t b_{k\lambda}(\dot{\mu}(t')) e^{i\omega(k)t'} dt'$$

où  $b_{k\lambda}(\mu)$  est l'expression obtenue précédemment pour  $a_{k\lambda}$  en fonction de  $\mu$  lorsque  $t \leq 0$ .

v) Déterminer  $\mathbf{A}(x, t)$  pour  $t \geq 0$

Suggestion : utiliser

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\sin(ka/2)}{ka/2} e^{-ikx} = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{si } -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Exercice 4.5 (long)

Thème : Etude d'un système de charges et de courants en interaction avec le champ électromagnétique (théorie classique). Le système de charges et de courants considéré constitue un modèle classique d'atome du type atome de Thomson.

Commentaire : Il s'agit ici d'un exercice demandant un effort particulier mais dont l'intérêt didactique est très important. Il permet de se familiariser avec des effets tels que la self-énergie, le rayonnement de freinage et l'élargissement des résonances dûs au couplage des charges et des courants avec le rayonnement électromagnétique. Il s'agit là d'effets classiques préfigurant des effets que nous rencontrerons dans la théorie quantique de l'interaction entre atomes et champ électromagnétique.

Le modèle d'atome est défini comme suit : l'atome est formé d'un noyau ponctuel de charge  $-Q > 0$  fixé à l'origine et d'un "nuage électronique" rigide de masse  $M_0$  et de densité de charge

$$\rho(x, t) = \frac{Q}{\pi^{3/2} a^3} \exp\left(-\frac{(x - q(t))^2}{a^2}\right)$$

dont le centre  $q(t)$  est susceptible de se déplacer. La grandeur  $a > 0$  fixe le "rayon de l'atome".

1ère étape : Si l'on se limite à des considérations électrostatiques l'atome décrit ci-dessus constitue un oscillateur harmonique à la limite des mouvements de faible amplitude au voisinage de la position d'équilibre  $q = \bar{0}$ . Montrer que la pulsation propre  $\omega_0$  de cet oscillateur est donnée par la relation

$$\omega_0^2 = \frac{Q^2}{3\pi^{3/2} \epsilon_0 M_0 a^3} \rightarrow M_0 \cdot \omega_0^2 = \frac{Q^2}{3\pi^{3/2} \epsilon_0 a^2}$$

$$\rightarrow M_0 \cdot a^2 \omega_0^2 = \frac{Q^2}{3\pi^{3/2} \epsilon_0 a}$$

2ème étape : Le "nuage électronique" lorsqu'il est en mouvement rayonne. Supposant que le mouvement  $q(t)$  est connu, déterminer le rayonnement électromagnétique produit à l'aide du formalisme hamiltonien.

i) Partant de l'hypothèse que la densité de courant  $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$  s'écrit

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{q}}(t) \rho(\mathbf{x}, t)$$

calculer les grandeurs  $j_{k\lambda}(t)$  définies sous (4.50). Montrer que

$$j_{k\lambda}(t) = \sqrt{\frac{2\omega(\mathbf{k})}{h_0}} Q \exp\left(-\frac{a^2 k^2}{4}\right) \dot{\mathbf{q}}(t) \cdot \mathbf{A}_\lambda(\mathbf{k}, \mathbf{q}(t))^*$$

où  $\mathbf{A}_\lambda(\mathbf{k}, \mathbf{x})$  est défini en (4.34).

ii) Ensuite intégrer les équations d'évolution (4.51) fournissant les amplitudes  $a_{k\lambda}(t)$  des modes  $\mathbf{k}, \lambda$ . Montrer que

$$a_{k\lambda}(t) = a_{k\lambda}(0) e^{-i\omega(\mathbf{k})t} + e^{-i\omega(\mathbf{k})t} \frac{i}{h_0} Q \exp\left(-\frac{a^2 k^2}{4}\right) \int_0^t \dot{\mathbf{q}}(t') \cdot \mathbf{A}_\lambda(\mathbf{k}, \mathbf{q}(t'))^* e^{i\omega(\mathbf{k})t'} dt'$$

Dès lors nous disposons des champs électriques et d'induction en tant que "fonctions" de  $\mathbf{q}(t)$ .

3<sup>ème</sup> étape : Le "nuage électronique" subit des forces de Lorentz fournies par les champs  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  et  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ . Calculer l'expression de la résultante  $\mathbf{F}(t)$  de ces forces, ceci dans le cadre de l'hypothèse d'un mouvement non-relativiste du "nuage électronique".

Hypothèse :  $|\dot{\mathbf{q}}(t)| \ll c, \forall t$

Compte tenu des résultats acquis lors de la 2<sup>ème</sup> étape montrer que la force  $\mathbf{F}(t)$  résulte de deux contributions d'origines distinctes

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}_{\text{ray}}(t) + \mathbf{F}_{\text{ext}}(t)$$

i) Un terme traduisant l'effet sur le "nuage électronique" de son propre rayonnement. Ce terme  $\mathbf{F}_{\text{ray}}(t)$ , dit de freinage, ne dépend que de  $\mathbf{q}(t')$ ,  $t' \leq t$  et s'écrit

$$\mathbf{F}_{\text{ray}}(t) = -\frac{Q^2}{h_0} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} e^{-a^2 k^2 / 2} \omega(\mathbf{k}) \mathbf{A}_\lambda(\mathbf{k}, \mathbf{q}(t)) \times \int_0^t \dot{\mathbf{q}}(t') \cdot \mathbf{A}_\lambda(\mathbf{k}, \mathbf{q}(t'))^* e^{-i\omega(\mathbf{k})(t-t')} dt' + \text{cc}$$

ii) Un terme traduisant l'effet du champ électromagnétique extérieur sur le "nuage électronique". Ce terme, correspondant à la force que l'on aurait en absence de rayonnement, dépend des conditions initiales, c'est-à-dire du champ électromagnétique initial évoluant librement et du champ coulombien du "noyau". Il s'écrit

$$\mathbf{F}_{\text{ext}}(t) = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} Q e^{-a^2 k^2 / 4} \left( i\omega(\mathbf{k}) a_{k\lambda}(0) e^{-i\omega(\mathbf{k})t} \mathbf{A}_\lambda(\mathbf{k}, \mathbf{q}(t)) + \text{cc} \right) - \text{grad } V(\mathbf{q}(t))$$

avec (approximation harmonique)

$$V(\mathbf{x}) = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \left\{ \frac{1-2\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \frac{x^2}{a^2} + O\left(\left(\frac{x^2}{a^2}\right)^2\right) \right\}$$

4<sup>ème</sup> étape : Il s'agit maintenant d'effectuer le passage à la limite  $L \rightarrow \infty$ . Toujours dans le cadre de l'hypothèse  $|\dot{\mathbf{q}}(t')| \ll c, \forall t'$  montrer que

$$\mathbf{F}_{\text{ray}}(t) = \frac{Q^2}{6\pi\epsilon_0} \left( -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\ddot{\mathbf{q}}(t)}{a c^2} + \frac{\ddot{\mathbf{q}}(t)}{c^3} + O\left(\frac{a \dddot{\mathbf{q}}(t)}{c^4}\right) \right)$$

dès que  $ct \gg a$ . Il est suggéré d'utiliser le développement

$$\dot{\mathbf{q}}(t') = \dot{\mathbf{q}}(t) + \ddot{\mathbf{q}}(t)(t'-t) + \frac{\ddot{\mathbf{q}}(t)(t'-t)^2}{2!} + \dots$$

pour évaluer l'expression de  $\mathbf{F}_{\text{ray}}(t)$  établie lors de la 3<sup>ème</sup> étape.

5<sup>ème</sup> étape : Nous sommes maintenant en mesure d'écrire une équation de Newton régissant l'évolution du "nuage électronique" à savoir,

$$M_0 \ddot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{F}_{\text{ray}}(t) + \mathbf{F}_{\text{ext}}(t)$$

i) Montrer qu'alors l'évolution du "nuage électronique" est régie par une équation de la forme

$$M \ddot{\mathbf{q}}(t) - M \tau \ddot{\ddot{\mathbf{q}}}(t) = \mathbf{F}_{\text{ext}}(t), \quad \text{ct} \gg a$$

où

$$M = M_0 + \frac{Q^2}{6\pi\epsilon_0 c^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{Q^2}{6\pi\epsilon_0 M c^3}$$

et où, pour des mouvements de faible amplitude (approximation harmonique)

$$\mathbf{F}_{\text{ext}}(t) = -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{\mathbf{q}(t)}{a^3}$$

$$+ Q \sqrt{\frac{\hbar_0}{\epsilon_0 (2\pi)^3}} \sum_{\lambda} \int d^3k e^{-a^2 k^2/4} \left\{ i \sqrt{\frac{\omega(k)}{2}} a_{k\lambda}(0) e^{-i\omega(k)t} \mathbf{e}_{\lambda}(k) + \text{cc} \right\}$$

ii) Constaté que le couplage du "nuage électronique" avec le rayonnement électromagnétique a pour effet de modifier la masse de ce dernier "nuage" (effet de self-énergie) ainsi que la pulsation propre de l' "atome".

iii) Interpréter la grandeur  $\tau$ . Si  $N$  désigne le nombre d' "électrons" constituant le nuage électronique alors  $M = N m_e$  et  $Q = N e$  d'où

$$\tau = \frac{2}{3} N \frac{r_0}{c} \quad \text{où} \quad r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{m_e c^2}$$

Les symboles  $m_e$  et  $e$  désignent respectivement la masse et la charge de l'électron. La grandeur  $r_0$  est appelée le rayon classique de l'électron.

iv) Montrer que l' "atome" constitue un résonateur de pulsation propre

$$\omega_0^2 = \frac{Q^2}{3\pi^{3/2} \epsilon_0 M a^3}$$

présentant une largeur de résonance

$$\Delta\omega = \omega_0^2 \tau$$

(effet d'élargissement de raie par le rayonnement freinage).

v) Discuter l'ensemble des résultats en fonction du rayon  $a$ .

6<sup>ème</sup> étape : Il s'agit finalement de montrer la consistance de notre démarche. Pour ce faire vérifier que l'évolution du système "atome" + champ électromagnétique est régie par les équations canoniques issues de l'hamiltonien

$$H(p, q, p, q) = H_{\text{v}}^{\text{libre}}(p, q) + \frac{(p - W(q, p, q))^2}{2M_0} + V(q)$$

où

i)  $H_{\text{libre}}$  désigne l'hamiltonien (4.43) du champ électromagnétique libre

$$\text{ii) } W(q, p, q) = \sum_{k\lambda} a_{k\lambda} \int \rho(x) A_{\lambda}(k, x) d^3x + \text{cc}$$

$$\text{iii) } V(q) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{2} \iint \frac{\rho(x)\rho(x')}{|x-x'|} d^3x d^3x' - Q \int \frac{\rho(x)}{|x|} d^3x \right\}$$

Rappelons que dans ces dernières expressions  $\rho(x)$  dépend de  $q$  prise comme variable indépendante.

#### Exercice 4.6 p-38

Montrer que les opérateurs de champ  $E(x)$  et  $B(y)$  (en représentation de Schrödinger) satisfont les relations de commutation suivantes :

$$[E^i(x); E^j(y)] = 0$$

$$[B^i(x); B^j(y)] = 0$$



$$[E^i(x); B^j(y)] = -i \frac{\hbar}{\epsilon_0} (\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j) \cdot \text{grad}_x \delta_V(x-y) \mathbb{1} \quad \forall x, y, \forall i \text{ et } j$$

où l'on a posé

$$\delta_V(x-y) = \frac{1}{L^3} \sum_{k \in \mathcal{L}} e^{i k \cdot (x-y)}$$

**Indication :** Etablir premièrement les relations de commutations pour les opérateurs  $A(x)$  et  $\Pi(y)$ . En particulier montrer que :

$$[\Pi^i(x), A^j(y)] = -i \hbar \Delta_V^{ij}(x-y) \mathbb{1}, \quad \forall x, y, i, j$$

où l'on a posé

$$\Delta_V^{ij}(x-y) = \frac{1}{L^3} \sum_{k \in \mathcal{L}} \left( \delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{k^2} \right) e^{i k \cdot (x-y)}$$

**Exercice 4.7** conseil :  $f(x) = \frac{1}{L^3} \sum_k f_k \cdot e^{i k x}$ ,  $f_k = \frac{1}{L^3} \int_V f(x) e^{-i k x} d^3 x$

Etude des distributions  $\delta_V(x)$  et  $\Delta_V^{ij}(x)$  définies par

$$\delta_V(x) = \frac{1}{L^3} \sum_{k \in \mathcal{L}} e^{i k \cdot x} \quad \text{et} \quad \Delta_V^{ij}(x) = \frac{1}{L^3} \sum_{k \in \mathcal{L}} \left( \delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{k^2} \right) e^{i k \cdot x}$$

i) Pour toute fonction  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) périodique aux bords du domaine cubique  $V$  établir l'égalité

$$\int_V \delta_V(x-y) f(y) d^3 y = f(x)$$

(si  $L \rightarrow \infty$  alors  $\delta_V$  "tend" vers  $\delta^{(3)}$  la distribution de Dirac).

ii) Montrer que  $\Delta_V^{ij}$  et  $\delta_V$  sont reliées par l'équation suivante

$$\Delta_V^{ij}(x-y) = \delta^{ij} \delta_V(x-y) - \partial_x^i \partial_y^j D_V(x-y)$$

où  $D_V(x-y) = \frac{1}{L^3} \sum_{k \in \mathcal{L}} \frac{e^{i k \cdot (x-y)}}{k^2}$

iii) Montrer que pour toute fonction "test"  $f$  (du même type que sous i), on a l'égalité

$$\Delta F = -f \Leftrightarrow F \Delta = -f \Rightarrow F \Delta = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 y \frac{f(y)}{|x-y|}$$

$$\int_V D_V(x-y) f(y) d^3 y = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y)}{|x-y|} d^3 y$$

Indication : Calculer  $\Delta_x \int_V D_V(x-y) f(y) d^3 y$

iv) A l'aide de i), ii) et iii) en déduire la relation

$$\int_V \Delta_V^{ij}(x-y) f(y) d^3 y = \delta^{ij} f(x) + \partial_x^i \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial_y^j f(y)}{|x-y|} d^3 y$$

$\forall f$  dérivable et périodique aux bords du domaine cubique  $V$ .

#### Exercice 4.8

On considère les "moyennes locales" des opérateurs de champ fournies par les produits de convolution

$$E * g(x) = \int_V E(x') g(x'-x) d^3 x'$$

et

$$B * g(x) = \int_V B(x') g(x'-x) d^3 x'$$

où la fonction  $g$  est réelle, positive et telle que

$$\int_V g(x) d^3x = 1$$

La fonction  $g$  définit donc une pondération locale des opérateurs de champ électrique et de champ d'induction. Les opérateurs  $E * g(x)$  et  $B * g(x)$  sont parfois appelés des "opérateurs de champ macroscopique".

Déterminer les relations de commutation

$$[E^i * g(x), B^j * g(y)] = ?$$

Discuter et interpréter la situation dans laquelle

$$g(x) = \pi^{3/2} \frac{1}{a^3} e^{-x^2/a^2}, \quad a \ll L$$

#### Exercice 4.9

Dans le cadre de la théorie quantique du rayonnement électromagnétique exprimer l'opérateur de densité d'énergie

$$u(x) = \frac{\epsilon_0}{2} (E(x)^2 + c^2 B(x)^2)$$

en terme d'opérateurs  $a_{k\lambda}$  et  $a_{k\lambda}^+$ .

Montrer que cette dernière expression peut s'écrire sous la forme

$$u(x) = u_{\text{observable}}(x) + u_{\text{vide}}(x)$$

où  $u_{\text{observable}}(x)$  n'est constitué que de termes en  $a_{k\lambda}, a_{k\lambda}^+, a_{k'\lambda'}, a_{k'\lambda'}^+$  et où  $u_{\text{vide}}(x)$  est un multiple de l'opérateur identité.

Interpréter ce dernier terme  $u_{\text{vide}}(x)$  et montrer que la redéfinition de l'énergie fournie par les expressions (4.104 i) revient à adopter  $u_{\text{observable}}(x)$  comme densité d'énergie.

Effectuer une discussion similaire pour les opérateurs de densité d'impulsion

$$T(x) = \epsilon_0 E(x) \wedge B(x)$$

#### Exercice 4.10

Dans le cas du champ électromagnétique libre, établir la relation

$$U(t)^+ a_{k\lambda} U(t) = a_{k\lambda} e^{-i\omega(k)t}, \quad \forall k, \lambda$$

où  $U(t)$  désigne l'opérateur unitaire d'évolution libre. En déduire la forme explicite de l'opérateur de champ  $A_H(x, t)$  en représentation de Heisenberg. Vérifier que les équations de champ

$$\square A_H(x, t) = 0 \quad \text{et} \quad \text{div} A_H(x, t) = 0$$

sont satisfaites.

#### Exercice 4.11

- Calculer la valeur moyenne de l'opérateur de champ  $A(x)$  (en représentation de Schrödinger) pour un état  $|\{n_{k\lambda}\}\rangle$  quelconque.
- Calculer l'écart quadratique correspondant pour chaque composante de l'opérateur de champ  $A(x)$ .
- Soit le vecteur  $n$  photons dans l'état  $k, \lambda$

$$|\Omega\rangle = \alpha |k, \lambda; \dots; k, \lambda\rangle + \beta |k', \lambda'; \dots; k', \lambda'\rangle$$

où  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  et où les vecteurs  $|k, \lambda; \dots; k, \lambda\rangle$  et  $|k', \lambda'; \dots; k', \lambda'\rangle$  décrivent des états à  $n_{k\lambda}$  et  $n_{k'\lambda'}$  photons respectivement. Calculer la valeur moyenne  $\langle \Omega | A(x) | \Omega \rangle$ . Dans quelles conditions cette valeur moyenne est-elle non-nulle ?

#### Exercice 4.12

On considère les "opérateurs de champ macroscopique"  $E * g(x)$  et  $B * g(x)$  définis dans le cadre de l'exercice 4.8.

- Calculer leurs valeurs moyennes pour un état  $|\{n_{k\lambda}\}\rangle$  quelconque.

ii) Calculer les écarts quadratiques moyens correspondants pour chacune des composantes du champ.

Exercice 4.13

Même question que dans l'exercice 4.12 qui précède mais pour l'état à 1 photon le plus général

$$|\Omega\rangle = \sum_{k\lambda} \psi_\lambda(k) |k, \lambda\rangle, \quad \psi_\lambda(k) \in \mathbb{C}$$

avec

$$\sum_{k\lambda} |\psi_\lambda(k)|^2 = 1.$$

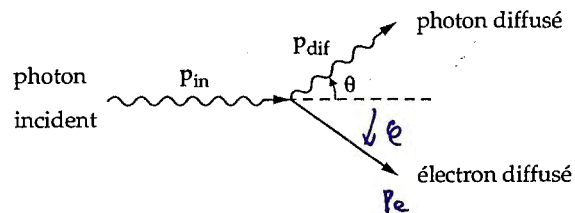
Considérer la limite  $L \rightarrow \infty$ .

Discussion en fonction de la valeur de l'extension  $a \ll L$ .

Exercice 4.14

Calcul de la diffusion Compton classique d'un électron et d'un photon dans le système dit "du laboratoire".

Initialement, l'électron est au repos et le photon incident possède une quantité de mouvement  $p_{in}$ . A l'aide des lois de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie totales, déterminer la quantité de mouvement du photon diffusé en fonction de l'angle  $\theta$  de diffusion du photon.



$p_{in} = p_{dif} + p_e$   
 $E_{in} + m_e \cdot c^2 = E_{dif} + E_e$   
 $E^2 = c^2 p^2 + m^2 \cdot c^4$

L'électron sera traité de manière relativiste.

$$E_{e-} = c \sqrt{p_{e-}^2 + m_{e-}^2 c^4}$$

Exercice 4.15

On considère un état à 1 photon du champ électromagnétique (libre)

$$|\Omega\rangle = \sum_{k\sigma} \psi_\sigma(k) |k, \sigma\rangle,$$

donné dans la base  $\{|k, \sigma\rangle, k \in L, \sigma = \pm 1\}$  des états à 1 photon polarisé circulairement.

Déterminer la valeur moyenne correspondante de la densité d'énergie  $u_{observable}(x)$  introduite dans le cadre de l'exercice 4.9. Montrer que cette dernière densité peut s'écrire

$$\langle u_{observable}(x) \rangle = \sum_{\sigma} F_{\sigma}(x)^* \cdot F_{\sigma}(x)$$

avec

$$F_{\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{L^3}} \sum_k \sqrt{\frac{\hbar\omega(k)}{2}} e_{\sigma}(k) \psi_{\sigma}(k) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$$

Suggestion : Utiliser l'égalité

$$\mathbf{k} \wedge \mathbf{e}_{\sigma}(k) = -i\sigma |\mathbf{k}| \mathbf{e}_{\sigma}(k), \quad \forall k \text{ et } \sigma$$

conséquence directe de la définition (4.146) des vecteurs de polarisation circulaire  $\mathbf{e}_{\sigma}(k)$ .

Exercice 4.16

En suivant une démarche similaire à celle qui a été adoptée au paragraphe 4.9 pour déterminer l'action unitaire  $U(\omega)$  des rotations dans l'espace des états du champ électromagnétique, déterminer l'action unitaire correspondante  $U(a)$  pour des translations d'espace de vecteur  $a \in \mathbb{R}^3$ .

i) Justifier le fait que l'opérateur unitaire  $U(a)$  doit satisfaire les relations

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\vec{x} \mapsto \vec{x} + \vec{a}$$

$$|\Omega'\rangle = U(a)|\Omega\rangle, \quad U(a)^\dagger = U(a)^{-1} \quad ; \quad \langle \Omega' | A(x) | \Omega' \rangle = \langle \Omega | A(x-a) | \Omega \rangle$$

$$U(a)^{-1} A(x) U(a) = A(x-a)$$

et

$$U(a)^{-1} \Pi(x) U(a) = \Pi(x-a), \quad \forall x \text{ et } \forall a$$

ii) En déduire les relations (4.21 i)

$$U(a)^{-1} a_{k\lambda} U(a) = a_{k\lambda} e^{-ik \cdot a}$$

et

$$U(a)^{-1} a_{k\lambda}^\dagger U(a) = a_{k\lambda}^\dagger e^{ik \cdot a}, \quad \forall k, \lambda \text{ et } a$$

iii) Montrer qu'il en découle l'action suivante de l'opérateur  $U(a)$  sur les vecteurs de base  $|\{n_{..}\}\rangle$

$$U(a)|\{n_{..}\}\rangle = \prod_{k\lambda} (e^{-ik \cdot a})^{n_{k\lambda}} |\{n_{..}\}\rangle, \quad \forall \{n_{..}\} \text{ et } \forall a$$

iv) En déduire l'expression suivante de  $U(a)$

$$U(a) = \exp\left(-i \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{P}}{\hbar}\right) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p} = \hbar \mathbf{k} \Rightarrow -i \frac{\mathbf{a}}{\hbar} \cdot \mathbf{p} = -i \frac{\mathbf{a}}{\hbar} \cdot \hbar \mathbf{k} = -i \mathbf{a} \cdot \mathbf{k} \\ \Rightarrow -i \frac{\mathbf{a}}{\hbar} \cdot \mathbf{p} = -i \frac{\mathbf{a}}{\hbar} \cdot (\hbar \nabla) = + \mathbf{a} \cdot \nabla \end{array} \right.$$

où  $\mathbf{P}$  désigne les trois composantes de la quantité de mouvement total du champ électromagnétique libre.

(dans le groupe de symétrie continu)

Exercice 4.17

Question similaire à celle de l'exercice 4.16 qui précède mais concernant cette fois l'action unitaire  $\Pi_{\mathcal{F}}$  de la réflexion d'espace  $x \rightarrow -x$ . L'opérateur unitaire  $\Pi_{\mathcal{F}}$  caractérise en outre une observable : l'observable de parité. Montrer que cette dernière observable est compatible (commute) avec le nombre de photons  $N$  et l'énergie  $E_{\mathcal{V}}$  mais ne commute pas avec la quantité de mouvement  $\mathbf{P}_{\mathcal{V}}$ .

Quelles sont les valeurs propres de l'observable de parité ? Quelles sont les caractéristiques des états à 1 photon qui sont des états propres de l'observable de parité, c'est-à-dire des états de parité donnée ?

phor

$$\left. \begin{array}{l} \hat{e}_\sigma(\mathbf{k}) \Rightarrow \hat{e}_\sigma(-\mathbf{k}) \cdot (-1) \\ \hat{e}_\sigma(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{e}_x + i \cdot \sigma \hat{e}_y) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{à choisir} \\ \text{conforme} \\ \text{l'orientation} \\ \text{du trièdre} \end{array}$$

Exercice 4.18

Les modèles quantiques solubles de sources en interaction avec le champ électromagnétique sont rares et souvent peu réalistes. En revanche, ils présentent un intérêt didactique certain. Ils permettent de suivre dans le détail les effets résultant de l'interaction entre source et photons, notamment l'"habillement" de la source par des photons "virtuels" et toute la problématique qui en résulte (procédure de renormalisation, etc.).

L'exercice qui suit propose l'étude d'un tel modèle soluble où la source (atome) consiste en un système quantique à 2 niveaux d'énergie. Lorsque la source est dans l'état fondamental (niveau 1 d'énergie  $E_1$ ) elle ne peut qu'absorber un photon et lorsqu'elle est dans l'état excité (niveau 2 d'énergie  $E_2 > E_1$ ) elle ne peut qu'émettre un photon.

On considère un système ("atome") à 2 niveaux d'énergie (supposés non-dégénérés) en interaction avec le champ électromagnétique. L'"atome" est donc décrit à l'aide de l'espace de Hilbert  $\mathbb{C}^2$  et le système entier à l'aide du produit tensoriel

$$\mathcal{H} = \mathcal{F} \otimes \mathbb{C}^2 \tag{1}$$

L'hamiltonien de l'atome libre s'écrit

$$H_{\text{atome}} = E_1 |1\rangle \langle 1| + E_2 |2\rangle \langle 2|, \quad E_1 < E_2 \tag{2}$$

où les vecteurs (de norme 1)  $|1\rangle$  et  $|2\rangle$  décrivent respectivement l'état fondamental et l'état excité de l'"atome".

Finalement l'hamiltonien gouvernant l'évolution du système "atome" + champ électromagnétique s'écrit

$$H = H^{\text{libre}} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_{\text{atome}} + H_{\text{int}} \tag{3}$$

où

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{\sqrt{L^3}} \sum_{k\lambda} (g_{k\lambda} a_{k\lambda} \otimes b^+ + g_{k\lambda}^* a_{k\lambda}^\dagger \otimes b), \quad g_{k\lambda} \in \mathbb{C} \tag{4}$$

et où  $b$  désigne l'opérateur

$$b = |1\rangle \langle 2| \tag{5}$$

agissant dans  $\mathbb{C}^2$ . Les  $g_{k\lambda} \in \mathbb{C}$  sont des constantes de couplage arbitraires pour l'instant. Bien entendu  $H^{\text{libre}}$  désigne l'hamiltonien du champ électromagnétique libre

$$H = \sum_{k\lambda} \hbar\omega(k) a_{k\lambda}^+ a_{k\lambda} \quad (6)$$

**Remarque :** Pour la suite il est commode et non restrictif de poser  $E_1 = 0$  et  $E_2 = \hbar\omega_0 > 0$ .

i) Montrer que l'opérateur autoadjoint

$$J = \sum_{k\lambda} a_{k\lambda}^+ a_{k\lambda} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes |2\rangle\langle 2| \quad (7)$$

commute avec l'hamiltonien  $H$ . Donner une interprétation physique de l'opérateur  $J$ . En déduire une loi de conservation. Montrer que le spectre de l'opérateur  $J$  est discret et formé des entiers  $j = 0, 1, 2, 3, \dots$  positifs ou nuls.

ii) Nous savons maintenant que

$$[H, J] = 0 \quad (8)$$

Intéressons-nous aux états stationnaires du système qui sont également états propres de l'observable  $J$ .

$$J|\Omega\rangle = j|\Omega\rangle \quad \text{et} \quad H|\Omega\rangle = E|\Omega\rangle \quad (9)$$

Quels sont ces états propres lorsque  $j = 0$  ?

Montrer que lorsque  $j > 0$  ils sont décrits par les vecteurs  $|\Omega\rangle$  de la forme

$$|\Omega\rangle = \sin\theta |j \text{ photons}\rangle \otimes |1\rangle + \cos\theta |j-1 \text{ photons}\rangle \otimes |2\rangle \quad (10)$$

où  $|j \text{ photons}\rangle$ , etc ... désignent des vecteurs (normés à 1) de  $\mathcal{F}^{(j)}$ , etc

$$N |j \text{ photons}\rangle = j |j \text{ photons}\rangle \quad (11)$$

vérifiant les équations

$$\sin\theta (H^{\text{libre}} - E) |j \text{ photons}\rangle + \cos\theta A^+ |j-1 \text{ photons}\rangle = 0 \quad (12)$$

$$\cos\theta (H^{\text{libre}} + \hbar\omega_0 - E) |j-1 \text{ photons}\rangle + \sin\theta A |j \text{ photons}\rangle = 0$$

dans lesquelles  $A$  désigne l'opérateur

$$A = \frac{1}{\sqrt{L^3}} \sum_{k\lambda} g_{k\lambda} a_{k\lambda} \quad (13)$$

agissant dans  $\mathcal{F}$ .

iii) Prouver que  $\sin\theta \neq 0$  puis en déduire l'équation suivante pour les vecteurs  $|j \text{ photons}\rangle$

$$\left( H^{\text{libre}} - A^+ \frac{\mathbb{1}}{H^{\text{libre}} + \hbar\omega_0 - E} A \right) |j \text{ photons}\rangle = E |j \text{ photons}\rangle \quad (14)$$

iv) Déterminer maintenant les états stationnaires et les niveaux d'énergie correspondants pour lesquels  $j = 1$ . Montrer que présentement

$$|1 \text{ photon}\rangle = \cotg\theta \frac{1}{\sqrt{L^3}} \sum_{k\lambda} \frac{g_{k\lambda}^*}{E - \hbar\omega(k)} |k, \lambda\rangle \quad (15)$$

Les valeurs propres  $E$  sont les racines réelles de l'équation

$$E - \hbar\omega_0 = R(E) \equiv \frac{1}{L^3} \sum_{k\lambda} \frac{|g_{k\lambda}|^2}{E - \hbar\omega(k)} \quad (16)$$

et l'angle  $\theta$  est fourni par l'expression

$$\text{tg}\theta = \sqrt{-\frac{dR(E)}{dE}} \quad (17)$$

v) Notons  $E_\nu$ ,  $\nu = 1, 2, \dots$  les valeurs propres de l'énergie fournies par l'équation (16) pour les états stationnaires pour lesquels  $j = 1$ . Discuter ce dernier spectre de manière qualitative.

vi) Etudier l'évolution du système lorsque l'état initial (à l'instant  $t = 0$ ) est l'"atome" excité en présence du vide électromagnétique. En d'autres termes, évaluer la probabilité

$$p(t) = |\langle 2 | \otimes \langle \Omega_0 | U(t) | \Omega_0 \rangle \otimes | 2 \rangle|^2 \quad (18)$$

pour que l'"atome" soit observé dans l'état excité à l'instant  $t$ . Dans l'expression précédente  $U(t)$  désigne l'opérateur unitaire d'évolution.

Suggestion : Commencer par établir les égalités

$$\begin{aligned} \langle 2 | \otimes \langle \Omega_0 | U(t) | \Omega_0 \rangle \otimes | 2 \rangle &= \sum_{\nu} (\cos \theta_{\nu})^2 e^{-i E_{\nu} t / \hbar} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \lim_{0 < \epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty + i\epsilon}^{+\infty + i\epsilon} \frac{e^{-i Et / \hbar}}{E - \hbar\omega_0 - R(E)} dE \end{aligned} \quad (19)$$

où les angles  $\theta_{\nu}$  sont fournis par (17) pour  $E = E_{\nu}$ .

vii) Passer à la limite  $L \rightarrow \infty$ .

$$\frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}\lambda} |g_{\mathbf{k}\lambda}|^2 \dots \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda} \int d^3\mathbf{k} |g_{\lambda}(\mathbf{k})|^2 \dots$$

Dès maintenant le couplage est déterminé par les fonctions  $g_{\lambda} : \mathbb{R}_k^3 \rightarrow \mathbb{C}$ .

Calculer la probabilité  $p(t)$  lorsque le couplage est isotrope, indépendant de la polarisation et de la forme

$$g_{\lambda}(\mathbf{k}) = g_0 |\mathbf{k}|^{-5/4}, \quad g_0 \in \mathbb{C}. \quad (20)$$

Donner une interprétation physique du résultat. Mots clés : désexcitation, émission d'un photon, durée de vie, ...

Quelles sont, à la limite  $L \rightarrow \infty$ , les propriétés du spectre d'énergie des états pour lesquels  $j = 0$  et  $1$  ?

viii) Que se passe-t-il si l'on inverse les rôles des niveaux 1 et 2 de l'"atome" ? Autrement dit que se passe-t-il lorsque  $\omega_0 < 0$  ?

Exercice 4.19

On considère une particule de spin 1/2 porteuse d'un moment magnétique  $\mu > 0$  "piégée" à l'origine et mise en présence d'un champ d'induction extérieur  $\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0)$  constant dans le temps. On suppose en outre que cette particule n'est susceptible d'interagir qu'avec des photons de polarisation circulaire  $\sigma$  et de vecteur d'onde  $\mathbf{k} = (0, 0, |\mathbf{k}|)$ .

L'espace de Hilbert décrivant ce système est le produit tensoriel

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathbf{k}\sigma} \otimes \mathbb{C}^2$$

de l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_{\mathbf{k}\sigma}$  décrivant le mode  $\mathbf{k}, \sigma$  du champ électromagnétique et de l'espace de Hilbert décrivant le spin 1/2 de la particule.

Partant de l'hypothèse que le couplage du moment magnétique de la particule avec le champ électromagnétique est du type de Pauli, l'hamiltonien régissant l'évolution du système "particule + photons  $\mathbf{k} \sigma$ " s'écrit

$$H = \hbar\omega(\mathbf{k}) a_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger} a_{\mathbf{k}\sigma} \otimes \mathbb{1} - \mu B_0 \mathbb{1} \otimes \sigma_z - \mu \mathbf{B}(0) \otimes \boldsymbol{\sigma}$$

où  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$  désigne l'opérateur de champ d'induction en représentation de Schrödinger et où  $a_{\mathbf{k}\sigma} \equiv a(\omega(\mathbf{k}))$  (voir § 4.7)

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = a_{\mathbf{k}\sigma} i \mathbf{k} \wedge \mathbf{A}_{\sigma}(\mathbf{k}, \mathbf{x}) + \text{adj}$$

$$\sigma_{+} = \sigma_x + i \sigma_y$$

Il est commode et non-restrictif de poser

$$\mathbf{e}_{\sigma}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_x + i\sigma \mathbf{e}_y), \quad \sigma = \pm 1$$

i) Montrer que l'hamiltonien  $H$  s'écrit explicitement sous la forme

$$H = \hbar\omega(\mathbf{k}) a_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger} a_{\mathbf{k}\sigma} \otimes \mathbb{1} - \mu B_0 \mathbb{1} \otimes \sigma_z + \begin{cases} -\mu B_{\text{ph}} \left( a_{\mathbf{k}\sigma} \otimes \frac{\sigma_{+}}{2} + a_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger} \otimes \frac{\sigma_{-}}{2} \right) & \text{si } \sigma = +1 \\ +\mu B_{\text{ph}} \left( a_{\mathbf{k}\sigma} \otimes \frac{\sigma_{-}}{2} + a_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger} \otimes \frac{\sigma_{+}}{2} \right) & \text{si } \sigma = -1 \end{cases}$$

où nous avons posé



$$B_{ph} = \sqrt{\frac{\hbar\omega(\mathbf{k})}{L^3 \epsilon_0 c^2}} \quad \text{et} \quad \sigma_{\pm} = \sigma_x \pm i \sigma_y$$

ii) Ensuite montrer que l'observable définie par l'opérateur

$$J = \sigma a_{k\sigma}^+ a_{k\sigma} \otimes \mathbb{1} + \frac{1}{2} \mathbb{1} \otimes \sigma_z$$

est une constante du mouvement. Donner une interprétation physique de cette observable et du fait qu'elle constitue une constante du mouvement.

iii) Déterminer le spectre et les vecteurs propres correspondants de l'opérateur  $J$ .  
Suggestion : munir l'espace de Hilbert de la base orthonormée formée des vecteurs

$$|n\rangle \otimes |m_s\rangle$$

où

$$a_{k\sigma}^+ a_{k\sigma} |n\rangle = n |n\rangle, \quad n=0,1,2,\dots \quad \text{et} \quad \frac{\sigma_z}{2} |m_s\rangle = m_s |m_s\rangle, \quad m_s = \pm \frac{1}{2}$$

iv) Utiliser les résultats établis sous iii) pour déterminer les niveaux d'énergie du système ainsi que les états stationnaires correspondants.

Indications

$$H |n, +\rangle = E_n^{(+)} |n, +\rangle \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$H |n, -\rangle = E_n^{(-)} |n, -\rangle \quad n = 1, 2, \dots$$

$$E_n^{(\pm)} = \hbar\omega(\mathbf{k}) \left(n - \frac{1}{2}\right) \pm \Delta_n, \quad \forall \sigma$$

où

$$|n, +\rangle = \cos \frac{\theta_n}{2} |n\rangle \otimes \left| \mp \frac{1}{2} \right\rangle + \sin \frac{\theta_n}{2} |n-1\rangle \otimes \left| \pm \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$|n, -\rangle = \pm \sin \frac{\theta_n}{2} |n\rangle \otimes \left| \mp \frac{1}{2} \right\rangle + \cos \frac{\theta_n}{2} |n-1\rangle \otimes \left| \pm \frac{1}{2} \right\rangle$$

avec

$$\Delta_n = \sqrt{\left(\frac{\hbar\omega(\mathbf{k})}{2} \pm \mu B_0\right)^2 + \mu^2 B_{ph}^2 n}$$

$$\cos \theta_n = \frac{\frac{\hbar\omega(\mathbf{k})}{2} \pm \mu B_0}{\Delta_n} \quad \text{et} \quad \sin \theta_n = \frac{\mu B_{ph} \sqrt{n}}{\Delta_n}$$

selon que  $\sigma = \pm 1$  respectivement.

v) Etudier les niveaux d'énergie  $E_n^{(\pm)}$  en tant que fonction de la valeur  $B_0$  du champ d'induction extérieur. Reporter graphiquement  $E_n^{(\pm)}/\hbar\omega(\mathbf{k})$  en fonction de  $\mu B_0/\hbar\omega(\mathbf{k})$ . Existe-t-il une valeur de  $B_0$  jouant un rôle particulier ? Si oui, quelle est cette valeur et à quelle situation physique particulière se réfère-t-elle ?

Indication : Penser à la pulsation de Larmor  $\omega_L = |2\mu B_0|/\hbar$ .

vi) Considérer la situation où les photons sont maintenant polarisés linéairement:  $e_\lambda(\mathbf{k}) = e_x$ . Montrer que l'hamiltonien  $H$  s'écrit maintenant

$$H = \hbar\omega(\mathbf{k}) a_{k\lambda}^+ a_{k\lambda} \otimes \mathbb{1} - \mu B_0 \mathbb{1} \otimes \sigma_z - i \frac{\mu B_{ph}}{\sqrt{2}} \left( a_{k\lambda} \otimes \sigma_y - a_{k\lambda}^+ \otimes \sigma_y \right)$$

Constat (sans approfondir) que la recherche des niveaux d'énergie (lorsque  $B_0 \neq 0$ ) pose un problème **considérablement** plus difficile à résoudre que dans le cas des photons polarisés circulairement.

#### Exercice 4.20

Thème : Diffusion d'un photon par un électron "piégé". Approche du processus au 2<sup>ème</sup> ordre de perturbation dépendante du temps.

On considère un électron "piégé" à l'origine en interaction avec le champ électromagnétique par le biais d'un couplage de Pauli entre le champ d'induction  $B(x)$  en  $x=0$  et son moment magnétique  $\mu\sigma$  où  $\mu = -g\mu_B < 0$ .



L'espace de Hilbert décrivant ce système est formé du produit tensoriel

$$\mathcal{H} = \mathcal{F} \otimes \mathbb{C}^2$$

de l'espace de Fock  $\mathcal{F}$  du champ électromagnétique et de l'espace de Hilbert  $\mathbb{C}^2$  décrivant le spin de l'électron.

L'hamiltonien gouvernant l'évolution de ce système s'écrit donc

$$H = H^{\text{libre}} \otimes \mathbb{1} - \mu \mathbf{B}(0) \otimes \boldsymbol{\sigma}$$

où  $H^{\text{libre}}$  désigne l'hamiltonien (4.88) du champ électromagnétique libre et où  $\mathbf{B}(0)$  désigne l'opérateur de champ (4.83) pour  $\mathbf{x} = 0$ .

Supposons qu'à un instant  $0 > t_0 \rightarrow -\infty$  le système se trouve dans l'état décrit par le vecteur  $|\text{in}\rangle = |k, \lambda\rangle \otimes |m_s\rangle$  où

$$\frac{1}{2} \sigma_z |m_s\rangle = m_s |m_s\rangle \quad m_s = \pm 1/2$$

Autrement dit dans un lointain passé, par rapport à l'instant de référence  $t = 0$ , le système est formé d'un photon incident d'impulsion  $\hbar \mathbf{k}$  de polarisation  $e_\lambda(\mathbf{k})$  et d'un électron de spin orienté selon  $m_s = \pm 1/2$ .

Notre objectif est d'évaluer la probabilité d'observer à l'instant  $0 < t \rightarrow +\infty$  le système dans l'état décrit par le vecteur  $|\text{fin}\rangle = |k', \lambda'\rangle \otimes |m_s'\rangle$ . Cette probabilité est donnée par l'expression

$$p(\text{in} \rightarrow \text{fin}) = |\langle \text{fin} | U(t_0, t) | \text{in} \rangle|^2, \quad t \rightarrow +\infty, t_0 \rightarrow -\infty$$

où  $U(t_0, t)$  désigne l'opérateur d'évolution vérifiant l'équation

$$i \hbar d_t U(t_0, t) = H(t) U(t_0, t) \quad \text{avec} \quad U(t_0, t) = \mathbb{1}$$

Autrement dit, nous voulons évaluer la probabilité qu'a le photon d'être diffusé par l'électron en un photon d'impulsion  $\hbar \mathbf{k}'$ , de polarisation  $e_{\lambda'}(\mathbf{k}')$ , le spin de l'électron se trouvant orienté selon  $m_s' = \pm 1/2$  après que le processus de diffusion ait eu lieu.

Pratiquement, pour simuler le fait que le photon incident n'interagit pas encore avec l'électron dans le passé lointain et que le photon diffusé n'interagit

plus avec l'électron dans le futur lointain nous réécrivons l'hamiltonien sous la forme

$$H(t) = H^{\text{libre}} \otimes \mathbb{1} - \mu \mathbf{B}(0) \otimes \boldsymbol{\sigma} e^{-\varepsilon |t|}$$

avec  $0 < \varepsilon \rightarrow +0$ .

Marche à suivre :

1ère étape : Poser

$$U(t) = \exp \left( -i (H^{\text{libre}} \otimes \mathbb{1}) (t - t_0) / \hbar \right) V(t_0, t)$$

Montrer que  $V(t_0, t)$  est un opérateur unitaire vérifiant l'équation

$$i \hbar d_t V(t_0, t) = H_{\text{int}}(t) V(t_0, t), \quad \text{avec} \quad V(t_0, t_0) = \mathbb{1}$$

où

$$H_{\text{int}}(t) = -\mu e^{-\varepsilon |t|} \sum_{k\lambda} \sqrt{\frac{\hbar \omega(\mathbf{k})}{2L^3 \varepsilon_0 c^2}} \left( e^{-i\omega(\mathbf{k})(t-t_0)} a_{k\lambda} \otimes w_{k\lambda} + \text{adj.} \right)$$

$$\text{avec} \quad w_{k\lambda} = \frac{(i \mathbf{k} \wedge \mathbf{e}_\lambda(\mathbf{k})) \cdot \boldsymbol{\sigma}}{|\mathbf{k}|}$$

Ensuite montrer que

$$p(\text{in} \rightarrow \text{fin}) = |\langle \text{fin} | V(t_0, t) | \text{in} \rangle|^2, \quad t \rightarrow +\infty, t_0 \rightarrow -\infty$$

2ème étape : Evaluer l'opérateur  $V(t_0, t)$  au deuxième ordre de perturbation, c'est-à-dire jusqu'au terme en  $\mu^2$ .

$$V(t_0, t) = \mathbb{1} + \frac{1}{i \hbar} \int_{t_0}^t dt' H_{\text{int}}(t') \\ + \frac{1}{(i \hbar)^2} \int_{t_0}^t dt' H_{\text{int}}(t') \int_{t_0}^{t'} dt'' H_{\text{int}}(t'') + O(\mu^3)$$

3ème étape : Montrer que

$$\langle \text{fin} | V(t_0, t) | \text{in} \rangle = -\frac{\mu^2}{2\hbar} \frac{\sqrt{\omega(k)\omega(k')}}{L^3 \epsilon_0 c^2}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \langle m_s' | w_{k'\lambda'}^+ w_{k\lambda} | m_s \rangle \int_{t_0}^t dt' e^{-\epsilon |t'|} e^{i\omega(k')(t'-t_0)} \int_{t_0}^{t'} dt'' e^{-\epsilon |t''|} e^{-i\omega(k')(t''-t_0)} \\ & + m_s' | w_{k\lambda} w_{k'\lambda'}^+ | m_s \rangle \int_{t_0}^t dt' e^{-\epsilon |t'|} e^{-i\omega(k)(t'-t_0)} \int_{t_0}^{t'} dt'' e^{-\epsilon |t''|} e^{i\omega(k')(t''-t_0)} \end{aligned} \right\}$$

et qu'à la limite  $t_0 \rightarrow -\infty$  et  $t \rightarrow +\infty$  on a

$$P(\text{in} \rightarrow \text{fin}) = \frac{\mu^4}{L^6 \epsilon_0^2 c^4 \hbar^2} \frac{\epsilon^2 \omega(k)^3 \omega(k')^3 (\omega(k) + \omega(k'))^2}{[(\epsilon^2 + \omega(k)^2)(\epsilon^2 + \omega(k')^2)(4\epsilon^2 + (\omega(k) - \omega(k'))^2)]^2}$$

$$\times |\langle m_s' | [w_{k'\lambda'}^+, w_{k\lambda}] | m_s \rangle|^2$$

Ce dernier résultat présente deux défauts en ce qui concerne la distribution en pulsation des photons diffusés lorsque  $\epsilon \rightarrow +0$ . Lesquels. Quelle est leur origine ? Que peut-on néanmoins conclure ?

4ème étape : Constater que toute dépendance angulaire et en polarisation des photons diffusés est contenue dans le facteur

$$|\langle m_s' | [w_{k'\lambda'}^+, w_{k\lambda}] | m_s \rangle|^2$$

et que

$$\langle m_s' | [w_{k'\lambda'}^+, w_{k\lambda}] | m_s \rangle = 2i \frac{(k' \wedge e_{\lambda'}(k')) \wedge (k \wedge e_{\lambda}(k))}{|k'| |k|} \cdot \langle m_s' | \sigma | m_s \rangle$$

Montrer que la distribution statistique angulaire (et en polarisation) du photon diffusé, moyennée sur les états initiaux du diffuseur (électron piégé) et sommée sur ses états finals (diffuseur non polarisé) est de la forme

$$\sum_{m_s, m_s'} \frac{1}{2} P(\text{in} \rightarrow \text{fin}) = \frac{\mu^4}{L^6 \epsilon_0^2 c^4 \hbar^2} \frac{16 \epsilon^2}{[4\epsilon^2 + (\omega(k') - \omega(k))^2]^2} \times \left( 1 - \left| \frac{(k' \wedge e_{\lambda'}(k'))}{|k'|} \cdot \frac{(k \wedge e_{\lambda}(k))}{|k|} \right|^2 \right)$$

dès que  $\omega(k')$  est voisin de  $\omega(k)$ .

5ème étape : Particulariser le résultat précédent au cas des photons polarisés circulairement. On trouve que

$$\sum_{m_s, m_s'} \frac{1}{2} P(\text{in} \rightarrow \text{fin}) \propto \left( 1 - |e_{\sigma'}(k') \cdot e_{\sigma}(k)|^2 \right)$$

$$\text{où } e_{\sigma'}(k') \cdot e_{\sigma}(k) = \frac{1}{2} (1 - \sigma \sigma' \cos \theta) \quad \text{avec } \theta = \text{angle } k, k'$$

Commenter ce dernier résultat.

**Suggestion :** Utiliser la relation

$$\frac{k}{|k|} \wedge e_{\sigma}(k) = -i \sigma e_{\sigma}(k)$$

#### Exercice 4.21

**Thème :** Etude de l'évolution du système "moment magnétique d'un électron piégé + photons" au travers des équations (4.170). Recherche d'une équation d'évolution autonome pour le moment magnétique de l'électron.

On considère le système d'un électron "piégé" à l'origine en interaction avec le champ électromagnétique par le biais d'un couplage de Pauli tel qu'il est décrit au paragraphe 4.11.

**Marche à suivre :**

1ère étape : Calculer le commutateur

$$\frac{i}{\hbar} [H, a_{k\lambda} \otimes \mathbb{1}] = ?$$

où  $H$  désigne l'hamiltonien (4.166). En déduire l'équation d'évolution

$$d_t a_{k\lambda}^H(t) = ?$$

de l'opérateur d'annihilation  $a_{k\lambda}$  en représentation de Heisenberg (voir 4.168) et, finalement, montrer que

$$a_{k\lambda}^H(t) = a_{k\lambda} \otimes \mathbb{1} e^{-i\omega(k)t} + \frac{\mu}{\hbar} k \wedge A_\lambda(k, 0)^* \cdot \int_0^t e^{-i\omega(k)(t-t')} \sigma_H(t') dt'$$

2ème étape : Partant du résultat précédent établir l'expression suivante pour  $B_H(0, t)$

$$B_H(0, t) = B_H^{\text{libre}}(0, t) - \frac{\mu}{3\pi^2 \epsilon_0 c} \int_0^\infty k^3 dk \int_0^t \sin(ck(t-t')) \sigma_H(t') dt'$$

où  $B_H^{\text{libre}}(0, t)$  désigne l'opérateur de champ d'induction, en  $x=0$ , en représentation de Heisenberg du champ libre (sans source).

3ème étape : Pour éviter les divergences introduire dans l'intégrale relative à  $k$  un facteur de "cut-off" des hautes fréquences  $e^{-\epsilon k}$ ,  $\epsilon > 0$ . Ensuite, utilisant le développement

$$\sigma_H(t') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t'-t)^n}{n!} \frac{d^n \sigma_H(t)}{dt^n}$$

montrer que

$$B_H(0, t) = B_H^{\text{libre}}(0, t)$$

$$- \frac{\mu}{3\pi^2 \epsilon_0 c} \left( - \frac{2}{c\epsilon^3} \sigma_H(t) + \frac{1}{c^3 \epsilon} \frac{d^2 \sigma_H(t)}{dt^2} - \frac{\pi}{2c^4} \frac{d^3 \sigma_H(t)}{dt^3} + O(\epsilon) \right)$$

Suggestion : Etablir la formule

$$\int_0^\infty k^3 e^{-\epsilon k} \int_a^0 \tau^n \sin k \tau d\tau = O(\epsilon) + \begin{cases} -2/\epsilon^3 & \text{si } n=0 \\ 2/\epsilon & \text{si } n=2 \\ -3\pi & \text{si } n=3 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

où  $a < 0$

4ème étape : Après avoir constaté que les opérateurs  $B_H(x, t)$  et  $\sigma_H(t)$  commutent, remplacer  $B_H(0, t)$  dans l'équation 4.70 pour  $d_t \sigma_H(t)$  par l'expression intégrée précédente. En déduire l'équation d'évolution suivante pour  $\sigma_H(t)$

$$d_t \sigma_H(t) + \frac{\mu^2}{6\pi \epsilon_0 \hbar c^4} \left\{ - \frac{2c}{\epsilon \pi} \left( d^2 \sigma_H(t) \wedge \sigma_H(t) - \sigma_H(t) \wedge d^2 \sigma_H(t) \right) + \left( (d_t^3 \sigma_H(t) \wedge \sigma_H(t) \wedge d_t^3 \sigma_H(t)) \right) \right\} \\ = - \frac{\mu}{\hbar} \left( 2 B_0 \wedge \sigma_H(t) + B_H^{\text{libre}}(0, t) \wedge \sigma_H(t) - \sigma_H(t) \wedge B_H^{\text{libre}}(0, t) \right)$$

Interpréter ses termes.

Chapitre 5

Exercice 5.1

On considère un oscillateur harmonique unidimensionnel dont l'évolution est régie par l'hamiltonien

$$H = \frac{p^2 + \omega^2 q^2}{2}$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (p - i\omega q) \\ \langle a | a \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} \cdot (\langle p | a \rangle - i\omega \langle q | a \rangle) = \alpha \end{cases}$$

où p et q sont des opérateurs autoadjoints vérifiant les relations de commutation.

$$[p, q] = -i\hbar \mathbb{1}$$

rep. q:  $q = x, p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$

rep. p:  $q = i\hbar \frac{\partial}{\partial p}$

$$a | \alpha \rangle = \alpha | \alpha \rangle \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} \left( -i\hbar \frac{d}{dx} - i\omega x \right) \psi_\alpha(x) = \alpha \psi_\alpha(x)$$

A l'instant  $t = 0$  cet oscillateur est dans un état cohérent décrit par un vecteur  $|\alpha_0\rangle$

$$a | \alpha_0 \rangle = \alpha_0 | \alpha_0 \rangle, \quad \alpha_0 \in \mathbb{C}$$

- i) Déterminer la fonction d'onde correspondante en représentation q et en représentation p. Quelles sont les distributions de probabilité correspondantes quant à la position et quant à la quantité de mouvement ?
- ii) Déterminer le vecteur décrivant l'état à l'instant t. Quelles sont les valeurs moyennes de q et p en fonction du temps ?
- iii) Quelles sont les distributions de probabilité de la position et de la quantité de mouvement en fonction du temps t ?

• Evolution:  $a \cdot e^{-i\frac{Ht}{\hbar}} = e^{-i\omega t} a e^{-i\frac{Ht}{\hbar}}$

$$|\psi_n(t)\rangle^2 = C \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \langle x \rangle}{\Delta x}\right)^2\right]$$

par a calculer

Exercice 5.2

Thème : A la découverte de la représentation de Bargman de l'oscillateur harmonique.

On considère l'oscillateur harmonique quantique unidimensionnel de pulsation propre  $\omega$  dont l'évolution est régie par l'hamiltonien (voir § 4.4)

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} : \text{rayon de convergence}$$

$$n! \geq \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n}$$

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$$

- B:  $\mathcal{H} \rightarrow \Sigma$  isomorphisme exp. Hilbertien  
 $|\psi\rangle \mapsto \psi(z)$   
 1) B linéaire  
 2) B conserve le p.s.  
 3) le rayon de B est trivial i.e. réduit à 0

spectre de  $a^\dagger$ ?  $\rightarrow$  vide :  $\exists$  état propre  
 spectre de a c'est  $\mathbb{C}$

$$H = \frac{p^2 + \omega^2 q^2}{2} \equiv \hbar\omega \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \mathbb{1} \right) \equiv \hbar\omega \left( N + \frac{1}{2} \mathbb{1} \right)$$

$$\text{où } [p, q] = -i\hbar \mathbb{1}, \quad a = \frac{p - i\omega q}{\sqrt{2\hbar\omega}} \quad \text{et} \quad N = a^\dagger a$$

Les vecteurs propres  $|n\rangle$  de l'opérateur autoadjoint positif N,

$$N |n\rangle = n |n\rangle \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

forment une base orthonormée de l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  décrivant cet oscillateur harmonique.

Ainsi, tout vecteur  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  se décompose univoquement en

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n |n\rangle$$

Considérons alors la série de Taylor suivante

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \frac{z^n}{\sqrt{n!}}$$

où z désigne une variable complexe.

- i) Montrer que cette dernière série présente un rayon de convergence infini et que, par conséquent, elle définit une fonction entière  $\psi(z)$  de la variable complexe  $z \in \mathbb{C}$ .
- ii) Soient deux vecteurs  $|\psi\rangle$  et  $|\varphi\rangle$  de l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  et soient  $\psi(z)$  et  $\varphi(z)$  les fonctions entières qui leur correspondent. Montrer que

$$\frac{1}{\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} dx dy \varphi(z)^* \psi(z) e^{-|z|^2} = \langle \varphi, \psi \rangle$$

où  $z = x + iy, x$  et  $y \in \mathbb{R}$

- iii) En conclure que l'application

$$B: |\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n |n\rangle \rightarrow \psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \frac{z^n}{\sqrt{n!}}$$

de  $\mathcal{H}$  dans les fonctions entières telles que

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} |\psi(z)|^2 e^{-|z|^2} dx dy < \infty$$

constitue un **isomorphisme**  $\mathcal{B}$  d'espaces de Hilbert. Cet isomorphisme fournit (par définition) le passage à la représentation de Bargman.

- iv) Montrer que, via l'isomorphisme  $\mathcal{B}$ , l'action des opérateurs  $a$  et  $a^+$  se traduit par la dérivation  $d/dz$  et par la multiplication par  $z$  respectivement

$$\mathcal{B}: a |\psi\rangle \rightarrow \frac{d\psi(z)}{dz}$$

$$\mathcal{B}: a^+ |\psi\rangle \rightarrow z \psi(z)$$

- v) Résoudre le problème aux valeurs propres pour l'opérateur  $a$  dans le cadre de la représentation de Bargman. Quelle fonction entière  $\psi(z)$  correspond à un état cohérent  $|\alpha\rangle$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$  ?

### Exercice 5.3

**Objectifs :** Etablir quelques relations concernant les états cohérents de l'oscillateur harmonique quantique unidimensionnel.

Le cadre formel est celui du paragraphe 5.1.

- 1) Par récurrence montrer que

$$[a^n, a^+] = n a^{n-1} \quad \text{et} \quad [(a^+)^n, a] = -n (a^+)^{n-1}$$

pour tout  $n = 1, 2, \dots$

- 2) Partant des relations venant d'être établies et de la définition (5.10) du générateur  $V(\alpha)$  de l'état cohérent  $|\alpha\rangle$  établir les relations

$$\frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} V(\alpha) = \left( a^+ - \frac{\alpha^*}{2} \mathbb{1} \right)^n V(\alpha)$$

et

$$\frac{\partial^n}{\partial \alpha^{*n}} V(\alpha) = \left( \frac{\alpha}{2} \mathbb{1} - a \right)^n V(\alpha)$$

pour  $n = 1, 2, \dots$ . Les variables  $\alpha$  et  $\alpha^*$  sont supposées indépendantes.

- 3) A l'aide des relations établies sous 2) prouver la relation

$$V(\alpha) \equiv \exp(\alpha a^+ - \alpha^* a) = e^{\alpha a^+} e^{-\alpha^* a} e^{-|\alpha|^2/2} = e^{-\alpha^* a} e^{\alpha a^+} e^{+|\alpha|^2/2}$$

- 4) Montrer que la relation inverse de la relation

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-|\alpha|^2/2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

s'écrit

$$|n\rangle = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} d\alpha \wedge d\alpha^* e^{-|\alpha|^2/2} \frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}} |\alpha\rangle$$

où  $d\alpha \wedge d\alpha^*$  désigne la mesure  $d\beta d\gamma$  avec  $\alpha = \beta + i\gamma$ ,  $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ .

En conclure que pour tout vecteur  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  on a la décomposition suivante en une superposition d'états cohérents

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} d\alpha \wedge d\alpha^* e^{-|\alpha|^2/2} \psi(\alpha^*) |\alpha\rangle$$

où l'on a posé

$$\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle n | \psi \rangle}{\sqrt{n!}} z^n$$

- 5) Transcrire les résultats précédents dans le cadre de la représentation de Bargman de l'oscillateur harmonique.
- 6) Partant des relations (5.11) prouver que les opérateurs unitaires  $V(\alpha)$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$  définis en (5.10) satisfont l'identité

$$V(\alpha) V(\beta) = e^{i \operatorname{Im} \alpha \beta^*} V(\alpha + \beta), \quad \forall \alpha \text{ et } \beta \in \mathbb{C}$$

#### Exercice 5.4

Thème : A la découverte des "états comprimés" (squeezed states)

On considère un oscillateur harmonique unidimensionnel perturbé par un terme de la forme

$$\frac{\lambda}{2} (a)^2 + \frac{\lambda^*}{2} (a^\dagger)^2, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

Ainsi, l'hamiltonien gouvernant l'évolution s'écrit

$$H = \hbar\omega \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \mathbb{1} \right) + \frac{\lambda}{2} (a)^2 + \frac{\lambda^*}{2} (a^\dagger)^2$$

Soit alors l'opérateur unitaire

$$V(\xi) = \exp \frac{1}{2} (\xi (a)^2 - \xi^* (a^\dagger)^2), \quad \xi \in \mathbb{C}$$

i) Etablir la formule

$$V(\xi) a V(\xi)^{-1} = \mathbb{1} a \operatorname{ch} |\xi| + a^\dagger \frac{\xi^*}{|\xi|} \operatorname{sh} |\xi| \equiv A(\xi)$$

puis en déduire la relation

$$V(\xi) \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \mathbb{1} \right) V(\xi)^{-1} = \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \mathbb{1} \right) \operatorname{ch} 2 |\xi| + \frac{\operatorname{sh} 2 |\xi|}{2 |\xi|} (\xi (a)^2 + \xi^* (a^\dagger)^2)$$

ii) Par l'emploi judicieux de cette dernière relation déterminer le spectre et les états stationnaires correspondants de l'hamiltonien  $H$  qui précède.

Indications : Poser  $|\xi| = \frac{1}{2} \operatorname{Arg} \operatorname{th} \frac{|\lambda|}{\hbar\omega}$  et  $\arg \xi = \arg \lambda$

Le spectre est discret seulement lorsque  $|\lambda| < \hbar\omega$ . Il est alors formé des valeurs propres

$$E_n = \frac{\hbar\omega}{\operatorname{ch} 2 |\xi|} \left( n + \frac{1}{2} \right) = \sqrt{(\hbar\omega)^2 - |\lambda|^2} \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Les vecteurs propres correspondants sont (à une phase près)

$$\begin{aligned} |\xi, n\rangle &= V(\xi) |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} V(\xi) (a^\dagger)^n |0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{n!}} (A(\xi)^+)^n V(\xi) |0\rangle = \frac{(A(\xi)^+)^n}{\sqrt{n!}} |\xi, 0\rangle \end{aligned}$$

iii) Existe-t-il des vecteurs propres de l'opérateur  $A(\xi)$ ? Si, oui quels sont-ils? Même question pour  $A(\xi)^+$ . Calculer les écarts quadratiques moyens correspondants pour les observables  $p$  et  $q$ . Commenter et interpréter les résultats.

Suggestion : comparer avec les états cohérents.

#### Exercice 5.5

On considère, du point de vue classique, une onde électromagnétique plane de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  se propageant dans le vide. Cette onde supposée polarisée circulairement, de vecteur de polarisation circulaire  $\mathbf{e}_\sigma(\mathbf{k})$ , peut être décomposée en la superposition de deux ondes planes polarisées linéairement, de vecteurs de polarisation linéaire  $\mathbf{e}_\lambda(\mathbf{k})$ ,  $\lambda = 1, 2$ . (Voir la relation (4.146)).

Montrer que l'état cohérent (quantique) correspondant à l'onde plane polarisée circulairement ne peut jamais résulter d'une superposition des états cohérents correspondants aux deux ondes planes polarisées linéairement.

Que peut-on en conclure en regard du fait qu'un état à 1 photon polarisé circulairement  $|k, \sigma\rangle$  peut s'exprimer comme la superposition d'états à 1 photon polarisé linéairement?

Etendre les considérations précédentes à n'importe quelles superpositions d'ondes électromagnétiques.

### Exercice 5.6

On considère le système formé du moment magnétique d'un électron piégé en interaction de Pauli avec le rayonnement électromagnétique, système complètement décrit au début du paragraphe 4.11. Présentement nous considérons la situation où le champ d'induction extérieur  $\mathbf{B}_0$  est nul.

- i) Parmi les états du système décrits par des vecteurs de la forme  $|\{\alpha.\}\rangle \otimes |m_s\rangle$  (états spin-photons décorrélés quel(s) est (sont) l'(es) état(s) cohérent(s) des photons rendant minimale l'énergie du système ? En d'autres termes pour quelles valeurs des  $\alpha_{k\lambda}$  la valeur moyenne

$$\langle m_s | \otimes \langle \{\alpha.\} | H | \{\alpha.\} \rangle \otimes | m_s \rangle \quad (\text{voir 4.166})$$

atteint-elle son minimum ?

Réponse :  $\alpha_{k\lambda} = -\mu \sqrt{\frac{\hbar}{2L^3 \epsilon_0 \omega(k)}} \frac{(i \mathbf{k} \wedge \mathbf{e}_\lambda(k)^*) \cdot \langle m_s | \boldsymbol{\sigma} | m_s \rangle}{\hbar \omega(k)}$

- ii) Quelle est, à la limite  $L \rightarrow \infty$ , la valeur moyenne correspondante de l'opérateur de champ  $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \otimes \mathbb{1}_{\text{spin}}$  ? Interpréter le résultat.

Réponse :  $\langle m_s | \otimes \langle \{\alpha.\} | \mathbf{A}(\mathbf{x}) \otimes \mathbb{1}_{\text{spin}} | \{\alpha.\} \rangle \otimes | m_s \rangle$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu \langle m_s | \boldsymbol{\sigma} | m_s \rangle \wedge \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}$$

- iii) Calculer la valeur de l'énergie minimale correspondante à la limite  $L \rightarrow \infty$ .

Réponse : Énergie minimale =  $-\frac{\mu_0 \mu^2}{24 \pi^3} \int d^3 \mathbf{k} = -\infty !$

### Exercice 5.7

On considère le système formé du moment magnétique d'un électron piégé (à l'origine) en interaction de Pauli avec les modes du champ électromagnétique dont tous les vecteurs d'onde sont de la forme  $\mathbf{k} = (k, 0, 0)$   $k = \frac{2n\pi}{L}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  et présentant tous la même polarisation linéaire  $\mathbf{e}_\lambda(\mathbf{k}) \equiv \mathbf{e}_y$  (voir paragraphe 4.11).

- i) Quel est l'espace de Hilbert décrivant les états du système ?  
ii) Quel est l'hamiltonien régissant son évolution ?

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \hbar k c a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}} \otimes \mathbb{1} + g_{\mathbf{k}} \frac{a_{\mathbf{k}} - a_{\mathbf{k}}^+}{2i} \otimes \sigma_z$$

avec  $g_{\mathbf{k}} = \mu k \sqrt{\frac{2\hbar}{L^3 \epsilon_0 c |\mathbf{k}|}}$  ?

- iii) Quels sont les états stationnaires de ce système et le spectre d'énergie correspondant ?

Suggestion : Introduire les opérateurs

$$b_{\mathbf{k}} = a_{\mathbf{k}} \otimes \mathbb{1} + i \frac{g_{\mathbf{k}}}{2\hbar k c} \mathbb{1} \otimes \sigma_z,$$

étudier leurs relations de commutation et exprimer  $H$  en termes de ces derniers opérateurs.

- iv) Interpréter les états stationnaires et notamment l'état fondamental.

### Exercice 5.8

Thème : A la découverte d'une notion d'état "cohérent de phase" du champ électromagnétique quantique.

On considère un oscillateur harmonique quantique unidimensionnel. Son évolution est régie par l'hamiltonien bien connu (voir § 4.4)

$$H = \frac{p^2 + \omega^2 q^2}{2} = \hbar \omega (a^+ a + \frac{1}{2} \mathbb{1}) = \hbar \omega (N + \frac{1}{2} \mathbb{1})$$



où  $\omega$  désigne la pulsation et où

$$a = \frac{p - i\omega q}{\sqrt{2\hbar\omega}} \quad \text{avec} \quad [p, q] = -i\hbar \mathbb{1}$$

i) Montrer que l'opérateur

$$\hat{a} = (N + \mathbb{1})^{-1/2} a \quad (\text{voir (5.54 ii)})$$

possède des vecteurs propres.

$$\hat{a} |\rho\rangle = \rho |\rho\rangle, \quad \langle \rho | \rho \rangle = 1$$

Déterminer ces derniers vecteurs propres  $|\rho\rangle$  ainsi que les valeurs propres  $\rho \in \mathbb{C}$  correspondantes. Vérifier quelles sont non-dégénérées.

ii) Calculer les valeurs moyennes des observables  $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$ ,  $(\sin \theta)^2$ ,  $(\cos \theta)^2$ ,  $N$  et  $N^2$  (voir définitions (5.61)) pour les états décrits par des vecteurs propres  $|\rho\rangle$  de  $\hat{a}$ .

En déduire les écarts quadratiques moyens correspondants  $\Delta \sin \theta$ ,  $\Delta \cos \theta$  et  $\Delta N$  pour les observables  $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$  et  $N$  respectivement.

Observer que l'inégalité de Heisenberg (5.65) est saturée et que les inégalités de Heisenberg (5.64) ne le sont pas.

iii) Constater que parmi les états décrits par les vecteurs  $|\rho\rangle$  certains présentent des écarts quadratiques moyens  $\Delta \sin \theta$  et  $\Delta \cos \theta$  (simultanément) arbitrairement petits.

iv) Prouver que tout état décrit à l'instant  $t = 0$  par un vecteur propre  $|\rho_0\rangle$  de  $\hat{a}$  est encore décrit à l'instant  $t$  par un vecteur propre  $|\rho(t)\rangle$  de  $\hat{a}$ . Déterminer  $\rho(t)$ .

v) Constater alors que les écarts quadratiques moyens  $\Delta \sin \theta$ ,  $\Delta \cos \theta$  et  $\Delta N$  restent constants au cours de l'évolution lorsque l'état de l'oscillateur est décrit par un vecteur propre  $|\rho(t)\rangle$  de  $\hat{a}$ .

vi) Approcher analytiquement ou calculer numériquement la fonction d'onde (en représentation  $q$  et en représentation  $p$ ) associée à un vecteur propre  $|\rho\rangle$  de l'opérateur  $\hat{a}$ .

vii) Les résultats établis précédemment dans le cadre de l'oscillateur harmonique suggèrent de dénommer états "cohérents de phase" les états décrits par des vecteurs propres de l'opérateur  $\hat{a}$ .

Etendre la notion d'états "cohérents de phase" au cas du champ électromagnétique quantique.

### Exercice 5.9

Considérons un système quantique isolé dont l'évolution est gouvernée par un hamiltonien  $H(t)$  de la forme

$$H(t) = H_0 + H_{\text{int}}(t)$$

où  $H_{\text{int}}(t)$  joue le rôle de terme d'interaction.

i) Montrer qu'en représentation de Schrödinger l'évolution de la matrice densité  $\rho(t)$  est régie par l'équation

$$d_t \rho(t) = \frac{i}{\hbar} [\rho(t), H(t)]$$

ii) Montrer qu'en représentation d'interaction, l'évolution de la matrice densité  $\rho^I(t)$  est régie par l'équation

$$d_t \rho^I(t) = \frac{i}{\hbar} [\rho^I(t), H_{\text{int}}^I(t)]$$

où par définition

$$H_{\text{int}}^I(t) = e^{iH_0 t/\hbar} H_{\text{int}}(t) e^{-iH_0 t/\hbar}$$

### Exercice 5.10

On considère le rayonnement électromagnétique quantique libre décrit par une matrice densité  $\rho$  constante du mouvement et telle que les valeurs moyennes  $\langle N_{k\lambda} \rangle = \text{Tr}(\rho N_{k\lambda})$  des nombres de photons par mode  $k\lambda$  ne dépendent que de la fréquence (rayonnement isotrope non-polarisé).

i) Montrer que la fonction de corrélation

$$c_{ij}(\tau) \equiv \langle E_i^H(x, t) E_j^H(x, t') \rangle_\rho$$

où nous avons posé  $\tau = t - t'$  a pour expression

$$c_{ij}(\tau) = \frac{\delta_{ij}}{3 \epsilon_0} \int_0^\infty w(\nu) \cos(2\pi \nu \tau) d\nu + c_{ij}^{(vide)}(\tau)$$

où  $w(\nu)$  désigne la densité spectrale d'énergie du rayonnement considéré et où

$$c_{ij}^{(vide)}(\tau) = \frac{\hbar c}{6 \pi^2 \epsilon_0} \delta_{ij} \int_0^{E_\infty/\hbar c} k^3 e^{-i k c \tau} dk, \quad E_\infty \rightarrow +\infty$$

ii) Particulariser le résultat précédent au cas du rayonnement thermique de température absolue  $T > 0$  où la densité spectrale d'énergie est fournie par la loi de Planck (5.126). Montrer qu'alors

$$\begin{aligned} c_{ij}(\tau) - c_{ij}^{(vide)}(\tau) &= \frac{\hbar}{\epsilon_0 \pi^2 c^3 \tau_0^4} \delta_{ij} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\tau}{\tau_0} + i n \right)^{-4} \\ &= \frac{\hbar \delta_{ij}}{\epsilon_0 \pi^2 c^3 \tau_0^4} \left( \frac{\pi^4}{(\text{sh}(\pi \tau / \tau_0))^4} + \frac{2}{3} \frac{1}{(\text{sh}(\pi \tau / \tau_0))^2} - \left( \frac{\tau_0}{\tau} \right)^4 \right) \end{aligned}$$

où nous avons posé  $\tau_0 = \hbar/kT$

$$\text{Indication: } \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{z + i n} + \frac{1}{z - i n} \right) = \pi \coth(\pi z) - \frac{1}{z}$$

iii) Discuter et interpréter le comportement de la fonction de corrélation  $c_{ij}(\tau)$  en fonction de  $\tau$  et en fonction de la température  $T$ .

### Exercice 5.11

On considère un oscillateur harmonique quantique unidimensionnel dont l'évolution est gouvernée par l'hamiltonien habituel

$$H = \frac{p^2 + \omega^2 q^2}{2}$$

Supposons qu'à l'instant  $t = 0$  il est décrit par un ensemble statistique d'états cohérents  $|\alpha\rangle$  dont la distribution statistique  $p(\alpha)$  est indépendante de la phase de  $\alpha$ .

i) Montrer que la matrice densité correspondante est une constante du mouvement.

ii) Montrer qu'il existe un ensemble statistique formé d'états stationnaires fournissant la même matrice densité.

## Chapitre 6

### Exercice 6.1

Thème : Calcul perturbatif de l'effet photo-électrique pour un atome d'hydrogène dans l'état fondamental.

L'atome d'hydrogène est conçu comme le système formé d'un électron non-relativiste et sans spin en présence d'un potentiel coulombien

$$\Phi(x) = \frac{|e|}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|x|}$$

Il s'agit alors de calculer, au premier ordre de perturbation, la section efficace différentielle associée à l'émission de l'électron à partir de l'état fondamental vers un état de diffusion d'impulsion sortante  $\mathbf{p}'$  par l'absorption d'un photon incident de quantité de mouvement  $\hbar\mathbf{k}$  et d'hélicité  $e_\lambda(\mathbf{k})$ .

Indications : L'évolution du système atome - champ électromagnétique est gouvernée par l'hamiltonien

$$H = \frac{(\mathbf{p} \otimes \mathbb{1} - e\mathbf{A}(\mathbf{q}))^2}{2m} + \Phi(\mathbf{q}) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_{\text{photons}}$$

dérivé de l'hamiltonien (6.9) particularisé au cas d'un seul électron sans spin.

Il est intéressant de considérer le cas plus général dans lequel l'état initial du système est décrit par le vecteur

$$|in\rangle = |n, \ell, m\rangle \otimes |k, \lambda\rangle$$

et l'état final par le vecteur

$$|fin\rangle = |\mathbf{p}'\rangle \otimes |\Omega_0\rangle$$

où  $|n, \ell, m\rangle$  décrit l'état stationnaire de l'atome de nombre quantique principal  $n = 1, 2, 3$  et de nombres quantiques magnétiques  $\ell = 0, 1, \dots, n-1$  et  $m = -\ell, \dots, +\ell$  et où  $|\mathbf{p}'\rangle$  décrit l'état de diffusion de quantité de mouvement sortante  $\mathbf{p}'$ .

Marche à suivre :

i) Montrer que l'hamiltonien d'interaction du système électron-photons s'écrit

$$H_{\text{int}} = -\frac{e}{2m} \{ \mathbf{p} \otimes \mathbb{1}, \mathbf{A}(\mathbf{q}) \}$$

et que l'élément de matrice  $\langle fin | H_{\text{int}} | in \rangle$  s'écrit

$$\langle fin | H_{\text{int}} | in \rangle = -\sqrt{\frac{\hbar}{\epsilon_0 L^3}} \frac{e_\lambda(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{J}_{fi}(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega(\mathbf{k})}}$$

où

$$\mathbf{J}_{fi}(\mathbf{k}) = \frac{e}{2m} \langle \mathbf{p}' | \{ \mathbf{p}, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}} \} | n, \ell, m \rangle$$

Interpréter la grandeur  $\mathbf{J}_{fi}(\mathbf{k})$ .

ii) Ensuite montrer que la section efficace différentielle de l'effet photo-électrique a pour expression

$$\frac{d\sigma(in \rightarrow fin)}{d\Omega(\mathbf{p}')} = \frac{\pi m |\mathbf{p}'|}{\epsilon_0 c \omega(\mathbf{k})} | e_\lambda(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{J}_{fi}(\mathbf{k}) |^2$$

avec

$$|\mathbf{p}'| = \sqrt{2m(\hbar\omega(\mathbf{k}) + E_{\text{atome}}(n, \ell, m))}$$

et

$$E_{\text{atome}}(n, \ell, m) = -\frac{m c^2 \alpha^2}{2n^2}, \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c}$$

iii) Supposons maintenant que l'énergie du photon incident est suffisamment grande pour que l'énergie cinétique du photo-électron soit grande comparée à l'énergie de liaison de l'atome d'hydrogène dans l'état fondamental mais suffisamment petite pour que le photo-électron soit non-relativiste. Autrement dit  $|\mathbf{k}|$  est tel que :

$$\frac{p'^2}{2m} \gg |E_{\text{atome}}(1, 0, 0)| = \frac{m c^2 \alpha^2}{2} \quad \text{et} \quad |\mathbf{p}'| \ll m c$$

Dans ces conditions l'état de diffusion  $|p'\rangle$  peut être décrit de manière approchée à l'aide de la fonction d'onde

$$\psi_{p'}(x) = (2\pi\hbar)^{-3/2} e^{i p x / \hbar} = \langle x | p \rangle$$

En conclure, qu'alors

$$\frac{d\sigma(\text{in} \rightarrow \text{fin})}{d\Omega(p')} = \frac{\pi e^2}{\epsilon_0 m c} \frac{|p'|}{\omega(k)} |e_\lambda(k) \cdot p'|^2 |\tilde{\psi}_{n\ell m}(p' - \hbar k)|^2$$

où  $\tilde{\psi}_{n\ell m}$  désigne la fonction d'onde de l'état stationnaire  $|n, \ell, m\rangle$  de l'atome en représentation  $p$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{n\ell m}(p) &= (2\pi\hbar)^{-3/2} \int \psi_{n\ell m}(x) e^{-i p x / \hbar} d^3x = \int d^3x \tilde{\psi}_{n\ell m}(x) \langle x | p \rangle \\ &= \int d^3x \langle p | x \rangle \langle x | n\ell m \rangle = \langle p | n\ell m \rangle \end{aligned}$$

Commenter cette dernière expression de la section efficace.

- iv) Calculer explicitement la section efficace de l'effet photo-électrique de l'atome d'hydrogène dans l'état fondamental en restant dans le cadre des approximations faites précédemment. Notamment établir le résultat final

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma(\text{in} \rightarrow \text{fin})}{d\Omega(p')} &= 32 a_0^2 \frac{|p'|}{\hbar |k|} \frac{|e_\lambda(k) \cdot p'|^2}{m^2 c^2} \left( \left( \frac{p' - \hbar k}{\alpha m c} \right)^2 + 1 \right)^{-4} \\ &\equiv \sqrt{32 \alpha^9} a_0^2 \frac{(\cos \varphi)^2}{(a_0 |k|)^{7/2}} \end{aligned}$$

où  $\varphi$  désigne l'angle entre le vecteur de polarisation de photon incident  $e_\lambda(k)$  et la direction d'émission  $p'$  du photo-électron. La grandeur  $a_0$  désigne le rayon de Bohr de l'atome d'hydrogène  $a_0 = \hbar / \alpha m c$ .

- v) L'approximation dipolaire électrique est-elle valable dans le présent contexte? L'impulsion transmise à l'atome d'hydrogène est-elle effectivement négligeable?

### Exercice 6.2 → sans observable de position (plaque photographique)

Thème : Principe de la photo-détection par induction d'une transition électronique.

Modèle de photo-détecteur : Le photo-détecteur est un atome initialement (en  $t = 0$ ) dans l'état fondamental. Durant l'intervalle de temps  $\Delta t$  il interagit avec le rayonnement électromagnétique ambiant et effectue des transitions vers ses états excités. Le "comptage" des transitions effectuées durant l'intervalle de temps  $\Delta t$  fournit une "mesure" du rayonnement ambiant. D'où l'intérêt de déterminer la relation existant entre le rayonnement ambiant et la probabilité pour que l'atome soit excité après un temps  $\Delta t$ .

Indications :

On supposera que le couplage entre le rayonnement et l'atome est suffisamment faible pour qu'une approche perturbative au premier ordre soit justifiée.

Initialement, à l'instant  $t = 0$ , le rayonnement est décrit par un ensemble statistique formé d'états décrits par des vecteurs  $| \{n.. \} \rangle \in \mathcal{F}$ , autrement dit formé d'états stationnaires du champ électromagnétique libre. La matrice densité correspondante s'écrit

$$\rho_{\text{in}} = \sum_{\{n.. \}} p(\{n.. \}) | \{n.. \} \rangle \langle \{n.. \} |$$

(voir paragraphe 5.5).

L'interaction atome-champ électromagnétique est supposée dipolaire électrique

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{\epsilon_0} P^i \otimes \Pi_i(0)$$

- i) Montrer qu'en représentation d'interaction l'hamiltonien d'interaction atome- rayonnement s'écrit

$$H_{\text{int}}^I(t) = \frac{1}{\epsilon_0} P_1^i(t) \otimes \Pi_1^i(0, t)$$

avec

$$P_I(t) \equiv e^{+i H_{\text{atome}} t/\hbar} P e^{-i H_{\text{atome}} t/\hbar}$$

et

$$\Pi^I(0,t) \equiv e^{i H_{\text{photons}} t/\hbar} \Pi(0) e^{-i H_{\text{photons}} t/\hbar}$$

En d'autres termes l'opérateur  $\Pi^I(0,t)$  coïncide avec l'opérateur de champ  $\Pi^H(x,t)$  du champ libre en représentation de Heisenberg pour  $x=0$ .

ii) En déduire qu'au premier ordre de perturbation la probabilité pour que l'atome soit excité après un intervalle de temps  $\Delta t$  est donnée par l'expression

$$p(\Delta t) = \sum_{v \neq v_0} \sum_{M_J} \sum_{\{n..\}} \sum_{\{n'..\}} p(\{n..\}) \times \frac{1}{\hbar^2 \epsilon_0^2} \left| \int_0^{\Delta t} \langle v, M_J | P_I^i(t') | v_0, 0 \rangle \cdot \langle \{n'..\} | \Pi_I^I(0, t') | \{n..\} \rangle dt' \right|^2$$

où nous avons noté  $|v, M_J\rangle$  les états stationnaires de l'atome (isolé) et  $|v_0, 0\rangle$  l'état fondamental (supposé de moment cinétique total nul).

$$H_{\text{atome}} |v, M_J\rangle = E_v |v, M_J\rangle$$

$$J_3 |v, M_J\rangle = M_J \hbar |v, M_J\rangle$$

Le spectre de l'atome est supposé discret et l'état fondamental est supposé non-dégénéré pour la commodité de l'argument.

iii) Procéder à la réduction de l'expression précédente de  $p(\Delta t)$ . Montrer que

$$p(\Delta t) = \frac{1}{\hbar^2 \epsilon_0^2} \int_0^{\Delta t} dt' \int_0^{\Delta t} dt'' G_{\text{atome}}^{ij}(t'-t'') \text{Tr}(\rho_{\text{in}} \Pi_i^I(0, t') \Pi_j^I(0, t''))$$

où nous avons posé

$$G_{\text{atome}}^{ij}(\tau) = \langle v_0, 0 | P_I^i(t') P_I^j(t'') | v_0, 0 \rangle =$$

$$= \sum_v \left( \sum_{M_J} \langle v_0, 0 | P^i | v, M_J \rangle \langle v, M_J | P^j | v_0, 0 \rangle \right) e^{-i(E_v - E_{v_0})\tau/\hbar}$$

Commentaire : La grandeur  $G_{\text{atome}}^{ij}(\tau)$  n'est rien d'autre que la fonction de corrélation du moment dipolaire électrique de l'atome isolé. De même l'expression  $\text{Tr}(\rho_{\text{in}} \dots)$  est la fonction de corrélation du champ  $\Pi(x)$  en  $x=0$  pour le champ libre. Ainsi, nous constatons qu'au premier ordre de perturbation la probabilité  $p(\Delta t)$  est fournie par une double intégration par rapport au temps du produit de ces dernières fonctions de corrélation.

iv) Faire intervenir maintenant les propriétés de symétrie de l'atome. A l'aide des règles de sélection (C.10), ou de tout autre argument de votre choix, établir l'expression suivante pour la fonction de corrélation  $G_{\text{atome}}^{ij}(\tau)$ .

$$G_{\text{atome}}^{ij}(\tau) = \frac{1}{3} \delta^{ij} G_{\text{atome}}(\tau)$$

*$G_{\text{atome}}^{ij}(\tau)$  invariant par rotation et  $\exists!$  tel tenseur  $\Rightarrow G_{\text{atome}}^{ij}(\tau) = f(\tau) \delta^{ij}$*

où

$$G_{\text{atome}}(\tau) = \sum_v R_v^{v_0} e^{-i(E_v - E_{v_0})\tau/\hbar}$$

avec

$$R_v^{v_0} = \sum_{M_J} \langle v_0, 0 | P | v, M_J \rangle \cdot \langle v, M_J | P | v_0, 0 \rangle$$

désignant une grandeur "atomique" ne dépendant que de  $v_0$  et  $v$ .

En déduire l'expression suivante de la probabilité  $p(\Delta t)$

$$p(\Delta t) = \frac{1}{3 \hbar^2 \epsilon_0^2} \int_0^{\Delta t} dt' \int_0^{\Delta t} dt'' G_{\text{atome}}(t'-t'') G_{\text{photons}}(t'-t'')$$

où nous avons posé

$$G_{\text{photons}}(t'-t'') = \text{Tr}(\rho_{\text{in}} \Pi^I(0, t') \cdot \Pi^I(0, t''))$$

v) Evaluer la fonction de corrélation  $G_{\text{photons}}(\tau)$ . Montrer que

$$G_{\text{photons}}(\tau) = \frac{\epsilon_0}{2L^3} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \hbar\omega(\mathbf{k}) \left[ \langle N_{\mathbf{k}\lambda} \rangle + 1 \right] e^{-i\omega(\mathbf{k})\tau} + \langle N_{\mathbf{k}\lambda} \rangle e^{i\omega(\mathbf{k})\tau}$$

où

$$\langle N_{\mathbf{k}\lambda} \rangle \equiv \text{Tr}(\rho_{\text{in}} N_{\mathbf{k}\lambda}) = \sum_{\{n..\}} p(\{n..\}) n_{\mathbf{k}\lambda}$$

désigne le nombre moyen de photons présents initialement dans le mode  $\mathbf{k}, \lambda$ .

- vi) Insérer l'expression précédente de la fonction de corrélation  $G_{\text{photons}}(\tau)$  dans l'expression de  $p(\Delta t)$  après avoir posé

$$G_{\text{atome}}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{G}_{\text{atome}}(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega$$

avec

$$\tilde{G}_{\text{atome}}(\omega) = \sum_{\nu} R_{\nu}^{\nu_0} \delta\left(\omega - \frac{E_{\nu} - E_{\nu_0}}{\hbar}\right).$$

Montrer qu'après intégration par rapport à  $t'$  et  $t''$  la probabilité  $p(\Delta t)$  s'écrit

$$p(\Delta t) = \frac{\pi \Delta t}{3 \hbar \epsilon_0 L^3} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{G}_{\text{atome}}(\omega) \sum_{\mathbf{k}\lambda} \hbar\omega(\mathbf{k})$$

$$\times \left[ \langle N_{\mathbf{k}\lambda} \rangle + 1 \right] \delta(\hbar(\omega + \omega(\mathbf{k})), \Delta t) + \langle N_{\mathbf{k}\lambda} \rangle \delta(\hbar(\omega - \omega(\mathbf{k})), \Delta t) \Big]$$

avec

$$\delta(\Delta E, \Delta t) = \frac{\Delta t}{\hbar\pi} \frac{1 - \cos x}{x^2}, \quad x = \Delta E \Delta t / \hbar$$

(voir 6.42).

- vii) Montrer que dans la mesure où le temps de détection  $\Delta t$  est beaucoup plus grand que les périodes associées aux fréquences des transitions de l'état fondamental vers les états excités de l'atome on a

$$p(\Delta t) \equiv \frac{\pi \Delta t}{3 \hbar^2 \epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{G}_{\text{atome}}(\omega) w(\omega)$$

où

$$w(\omega) = \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \hbar\omega(\mathbf{k}) \langle N_{\mathbf{k}\lambda} \rangle \delta(\omega - \omega(\mathbf{k}))$$

n'est autre, à la limite  $L \rightarrow \infty$ , que la densité spectrale du rayonnement électromagnétique initial.

- viii) Etudier le cas du rayonnement thermique. (voir 5.126). Discussion en fonction de la température absolue  $T > 0$ .
- ix) Discuter le cas d'un rayonnement présentant une densité spectrale lorentzienne étroite dans la zone des fréquences ionisantes de l'atome.

### Exercice 6.3

Thème : Durée de vie et déplacement radiatif des niveaux excités d'un oscillateur harmonique couplé au rayonnement électromagnétique. Application et illustration des méthodes de calcul développées au paragraphe 6.5.

Le système est décrit à l'aide de l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{oscillateur}} \otimes \mathcal{F}$$

où  $\mathcal{H}_{\text{oscillateur}}$  décrit l'oscillateur et où  $\mathcal{F}$  désigne l'espace de Fock du champ électromagnétique.

L'évolution est gouvernée par un hamiltonien de la forme

$$H = H_{\text{oscillateur}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{F}} + \mathbb{1}_{\text{oscillateur}} \otimes H_{\text{photons}}^{\nu} + H_{\text{int}}$$

dans lequel :

$$i) \quad H_{\text{oscillateur}} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\Omega^2 q^2}{2} = \hbar\Omega \left( b^+ \cdot b + \frac{3}{2} \mathbb{1} \right)$$

Dans cette dernière expression, le symbole  $m$  désigne la masse de l'oscillateur, le symbole  $\Omega$  désigne sa pulsation propre. En outre nous avons posé

$$b = \frac{p - i m \Omega q}{\sqrt{2 \hbar \Omega m}}$$

ii)  $H_{\text{photons}}^{\nu} = \sum_{k \lambda} \hbar \omega(k) a_{k\lambda}^{\dagger} a_{k\lambda}$

iii)  $H_{\text{int}} = \sqrt{\frac{\hbar}{L^3 \epsilon_0}} \sum_{k \lambda} g(\omega(k)) \frac{e_{\lambda}(k) \cdot b^{\dagger}}{\sqrt{2 \omega(k)}} \otimes a_{k\lambda} + \text{adj.}$

traduit l'interaction entre l'oscillateur et le rayonnement. Dans cette expression  $g(\omega)$  désigne une fonction (pour l'instant laissée arbitraire) de la pulsation  $\omega$  à valeur dans  $\mathbb{C}$ .

Questions :

- i) Commenter le terme d'interaction  $H_{\text{int}}$  d'un point de vue qualitatif. Que traduit-il au niveau des processus élémentaires d'absorption et d'émission de photons ? Existe-t-il une loi de conservation "évidente" gouvernant ces processus ? Constante du mouvement ?
- ii) Montrer que le terme d'interaction  $H_{\text{int}}$  peut s'écrire sous la forme

$$H_{\text{int}} = - \int_{\mathcal{V}} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{A}(\mathbf{x}) d^3 x + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{p}(\mathbf{x}) \otimes \frac{\boldsymbol{\Pi}(\mathbf{x})}{\epsilon_0} d^3 x$$

où  $\mathbf{j}(\mathbf{x})$  et  $\mathbf{p}(\mathbf{x})$  désignent des opérateurs agissant dans  $\mathcal{H}_{\text{oscillateur}}$  et où  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  et  $\boldsymbol{\Pi}(\mathbf{x})$  désignent les opérateurs de champ (4.79) en représentation de Schrödinger. Quelle est l'interprétation physique des opérateurs  $\mathbf{j}(\mathbf{x})$  et  $\mathbf{p}(\mathbf{x})$  précédents ? Quelle est la "structure électromagnétique" de l'oscillateur harmonique ?

- iii) Déterminer les niveaux d'énergie et les états stationnaires correspondants pour le système oscillateur-photons non-perturbé.
- iv) Exprimer les durées de vie et les déplacements de niveaux correspondants dus à l'interaction. Interpréter les résultats.
- v) Discuter les transitions radiatives entre niveaux excités de l'oscillateur. Structure du spectre d'émission (ou d'absorption), largeurs de raie, ...

vi) Application des résultats généraux dans le cas particulier suivant

$$g(\omega) = \frac{g_0 \omega}{(\omega - \Omega)^2 + \gamma^2/4}$$

où  $g_0$  joue le rôle de constante de couplage et  $\gamma$  celui de largeur. On supposera que  $\gamma \ll \Omega$ . Discussion du résultat en fonction de  $g_0 \in \mathbb{R}$ . Résonances, états liés, ... ?

Exercice 6.4

Thème : Etude du mécanisme de couplage entre niveau discret et spectre continu dans le cadre d'un modèle soluble. Formation de résonances.

Modèle : Il s'agit d'un système quantique dont l'évolution est régie par un hamiltonien indépendant du temps de la forme

$$H = H_0 + H_{\text{int}}$$

Pour l'instant le spectre de  $H_0$  est supposé discret et non-dégénéré, formé d'une valeur propre privilégiée  $E_0$  et d'un ensemble de valeurs propres  $E_k \geq 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$

$$H_0 |0\rangle = E_0 |0\rangle$$

$$H_0 |k\rangle = E_k |k\rangle$$

Quand au terme d'interaction  $H_{\text{int}}$  il est tel que

$$\langle k' | H_{\text{int}} | k \rangle = 0, \quad \forall k \text{ et } k' \neq 0$$

$$\langle 0 | H_{\text{int}} | k \rangle = \lambda v_k, \quad \forall k \neq 0$$

$$\langle 0 | H_{\text{int}} | 0 \rangle = 0$$

avec  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $v_k \in \mathbb{C}$ . Autrement dit le terme  $H_{\text{int}}$  introduit un couplage entre le niveau privilégié  $E_0$  et le reste du spectre car, en effet :

$$H_{\text{int}} |k\rangle = \lambda v_k |0\rangle \quad k = 1, 2, \dots$$



$$H_{int} |0\rangle = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} v_k^* |k\rangle$$

Il s'agit alors d'étudier l'évolution du système, plus précisément d'étudier l'évolution de l'élément de matrice  $\langle 0|U(t)|0\rangle$  de l'opérateur d'évolution entre l'instant  $t=0$  et l'instant  $t>0$ . Rappelons que le module au carré de ce dernier élément de matrice fournit la probabilité pour que le système, initialement dans l'état  $|0\rangle$ , soit encore observable dans cet état à l'instant  $t>0$ .

Ensuite on procédera à un "passage à la limite du continu" en faisant "tendre" la distribution discrète de valeurs propres  $E_k \geq 0$ ,  $k=1, 2, \dots$  vers un continu de densité d'états  $\rho(E)$ . Corrélativement  $v_k$  tend vers une distribution continue  $v(E)$  pour  $E \geq 0$ .

Dans cette limite le spectre de  $H_0$  est formé d'une valeur propre discrète  $E_0$  et d'un spectre (absolument) continu dans l'intervalle  $[0, +\infty[$ .

**Commentaire :** L'intérêt didactique d'un tel exercice est multiple. Premièrement il permet d'appliquer la méthode de la résolvante de manière exacte. De plus il permet de "suivre" dans le détail le mécanisme de formation de résonances à partir d'un niveau discret par couplage avec un continu spectral. (Origine de la largeur de raie naturelle des états atomiques excités). Enfin, il montre explicitement quelles sont les propriétés analytiques de la résolvante  $G(z) = (z\mathbb{1} - H)^{-1}$ .

i) Il est instructif de se livrer d'abord à une approche de ce problème à l'aide de la méthode usuelle. Dans ce but, poser

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(t) e^{-iE_k t/\hbar} |k\rangle$$

avec pour condition initiale

$$c_0(0) = 1 \quad \text{et} \quad c_k(0) = 0, \quad \forall k=1, 2, \dots$$

Déterminer les équations différentielles gouvernant l'évolution des  $c_k(t)$ ,  $k=1, 2, \dots$ . Montrer que, compte tenu des conditions initiales, il en découle l'équation intégral-différentielle suivante pour  $c_0(t)$

$$d_t c_0(t) = -\lambda^2 \int_0^t \gamma(t-t') c_0(t') dt', \quad t > 0$$

où

$$\begin{aligned} \gamma(\tau) &= \frac{1}{\hbar^2} \sum_{k=1}^{\infty} |v_k|^2 e^{-i(E_k - E_0)\tau/\hbar} \\ &\rightarrow \frac{1}{\hbar^2} \int_0^{+\infty} |v(E)|^2 e^{-i(E - E_0)\tau/\hbar} \rho(E) dE \end{aligned}$$

à la limite du continu.

La grandeur

$$|c_0(t)|^2 = |\langle 0|U(t)|0\rangle|^2$$

est la probabilité cherchée.

ii) Appliquer maintenant la méthode de la résolvante à l'évaluation de l'élément de matrice

$$\langle 0|U(t)|0\rangle \equiv c_0(t) e^{-iE_0 t/\hbar}$$

Montrer que l'expression exacte de l'élément de matrice  $\langle 0|R(z)|0\rangle$  de l'opérateur de déplacement spectral correspondant s'écrit

$$\begin{aligned} \langle 0|R(z)|0\rangle &\equiv R^0(z) = \lambda^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|v_k|^2}{z - E_k} \\ &\rightarrow \lambda^2 \int_0^{+\infty} \frac{|v(E)|^2}{z - E} \rho(E) dE \end{aligned}$$

à la limite du continu

**Suggestion :** Utiliser le développement (D.13).

En déduire l'expression suivante pour  $c_0(t)$  lorsque  $t > 0$ .

$$c_0(t) = \frac{i}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty + i\varepsilon}^{+\infty + i\varepsilon} \frac{e^{-i(z-E_0)t/\hbar}}{z-E_0-R^0(z)} dz$$

iii) Facultatif (Non trivial + piège !!!)

Vérifier que l'expression précédente de  $c_0(t)$  est l'unique solution de l'équation intégral-différentielle établie sous i) pour  $t > 0$ .

iv) Etudier les propriétés analytiques de la fonction  $R^0(z)$  de la variable complexe  $z$ . Notamment, montrer que

1)  $R^0(z)$  est analytique réelle dans le plan complexe de  $z$  coupé selon l'axe réel de  $0$  à  $+\infty$ .

$$2) \operatorname{Re} R^0(x+i0) = \operatorname{Re} R^0(x-i0), \quad \forall x \geq 0$$

$$3) \operatorname{Im} R^0(x \pm i0) = \mp \pi \lambda^2 |v(x)|^2 \rho(x), \quad \forall x \geq 0$$

v) Application dans le cas

$$|v(E)|^2 \rho(E) = \begin{cases} \frac{\Delta}{2\pi} \sqrt{1 - \left(2 \frac{E-\bar{E}}{\Delta}\right)^2} & \text{si } \bar{E} - \frac{\Delta}{2} \leq E \leq \bar{E} + \frac{\Delta}{2} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

d'un continu de largeur  $\Delta$  centré en  $\bar{E}$  et inclus dans  $[0, +\infty[$

Montrer qu'alors

$$R^0(z) = \frac{\lambda^2 \Delta}{2} \left( 2 \frac{z-\bar{E}}{\Delta} - \sqrt{\left(2 \frac{z-\bar{E}}{\Delta}\right)^2 - 1} \right)$$

où la détermination de  $\sqrt{\quad}$  est celle qui est réelle et positive lorsque  $z$  est réel et supérieur à  $\bar{E} + \frac{\Delta}{2}$ .

Etudier et discuter les propriétés analytiques de l'élément de matrice

$$\langle 0 | G(z) | 0 \rangle = \frac{1}{z - E_0 - R^0(z)}$$

de la résolvante  $G(z) = (z \mathbb{1} - H)^{-1}$ . Distinguer les situations où le couplage  $\lambda$  est fort ou faible et où le niveau discret  $E_0$  appartient ou n'appartient pas au continu  $[\bar{E} - \frac{\Delta}{2}, \bar{E} + \frac{\Delta}{2}]$ .

Suggestions : Pour déterminer  $R^0(z)$  (puis  $c_0(t)$ ) utiliser la méthode d'intégration des intégrales abéliennes.

Pour discuter les propriétés analytiques des fonctions  $R^0(z)$  et  $\langle 0 | G(z) | 0 \rangle$  il est judicieux d'utiliser la variable d'uniformisation  $u$  définie par la relation

$$2 \frac{z-\bar{E}}{\Delta} = \frac{1+u^2}{1-u^2}$$

Les grandeurs déterminantes du problème sont

$$\tau = \frac{2\hbar}{\Delta} \quad a = 2 \frac{E_0 - \bar{E}}{\Delta} \quad \text{et} \quad \Lambda = \lambda^2$$

Discuter les propriétés analytiques de  $R_0(z)$  et  $\langle 0 | G(z) | 0 \rangle$  en fonction de  $a \in \mathbb{R}$  et  $\Lambda \geq 0$ .

vi) Etudier le comportement de  $c_0(t)$  en fonction du temps. Discuter le résultat du point de vue physique en distinguant les 4 situations décrites sous v).

---

 Chapitre 7
 

---



---

 Chapitre 8
 

---

Exercice 8.1

On considère un système composé  $A + B$  décrit à l'aide d'un espace de Hilbert produit tensoriel

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$$

Soit  $\rho$  une matrice densité du système  $A + B$ . Montrer que la trace partielle

$$\rho_A = \text{Tr}_B \rho$$

possède toutes les propriétés caractéristiques d'une matrice densité, à savoir les propriétés (5.112)

$$\rho_A = \rho_A^\dagger, \quad \rho_A^2 \leq \rho_A \quad \text{et} \quad \text{Tr} \rho_A = 1$$

Indications : La première propriété et la troisième propriété sont immédiates. En ce qui concerne la seconde on remarquera que les éléments de matrice  $\langle x | \rho_A | y \rangle$  définissent une forme hermitienne positive sur  $\mathcal{H}_A$ . Ensuite, utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 8.2

On se place dans le cadre de l'exercice précédent. L'évolution du système  $A + B$  étant régie par un hamiltonien de la forme

$$H = H_A \otimes \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A \otimes H_B + H_{\text{int}}$$

où  $H_{\text{int}}$  correspond au terme d'interaction entre les sous-systèmes  $A$  et  $B$ . Evaluer (au premier ordre de l'interaction) les corrélations statistiques  $\eta_{AB}$  entre ces derniers sous-systèmes lorsque le système total est à l'équilibre thermique à la température  $T$

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\beta H}, \quad \beta = \frac{1}{kT}$$

où  $k$  désigne la constante de Boltzman et  $Z$  la fonction de partition du système total.

Chapitre 9

Chapitre 10

Exercice 10.1

i) Montrer que n'importe quel produit  $\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_n}$  de matrices  $\gamma^\mu$ ,  $\mu = 1, \dots, 4$  est, à un facteur près, égal à une expression de la forme

$$(\gamma^1)^{n_1} (\gamma^2)^{n_2} (\gamma^3)^{n_3} (\gamma^4)^{n_4}$$

où  $n_1, n_2, n_3$  et  $n_4$  valent 0 ou 1. En conclure que n'importe quel élément de l'algèbre sur  $\mathbb{C}$  engendrée par les matrices  $\gamma^\mu$ ,  $\mu = 1, \dots, 4$  peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des 16 matrices  $\gamma^A$ , suivantes

$\gamma^A = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{1} \\ \gamma^\mu \\ \gamma^\mu \gamma^\nu \\ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \\ \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4 \end{array} \right.$	$\mathbb{1}$	1 terme	<i>à voir:</i> $(\gamma^\mu)^{2n} = (\gamma^\mu)^{2n} \mathbb{1}$ $(\gamma^\mu)^{2n+1} = (\gamma^\mu)^{2n} \gamma^\mu$
	$\gamma^\mu, \mu = 1, \dots, 4$	4 termes	
	$\gamma^\mu \gamma^\nu, \mu < \nu$	6 termes	
	$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho, \mu < \nu < \rho$	4 termes	
	$\gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4$	1 terme	

ii) Montrer que  $\text{Tr } \gamma^A = 0, \forall \gamma^A \neq \mathbb{1}$ . Commencer par remarquer que pour chaque  $\gamma^A \neq \mathbb{1}$  il existe  $\lambda = 1, 2, 3$  ou 4 tel que  $\{\gamma^\lambda, \gamma^A\} = 0$ .

*calculer:  $\text{Tr}(\gamma^\lambda \gamma^A \gamma^\lambda)$*

iii) A l'aide du résultat établi sous ii) prouver que les 16 matrices  $\gamma^A$  sont linéairement indépendantes.

$$\sum_A \lambda_A \gamma^A = 0, \lambda_A \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \lambda_A = 0, \forall A$$

En conclure que l'algèbre sur  $\mathbb{C}$  engendrée par les matrices  $\gamma^\mu, \mu = 1, \dots, 4$  coïncide avec l'algèbre  $\mathcal{L}(\mathbb{C}^4)$ .

*$\text{Tr}(\sum_A \lambda_A \gamma^A) = 0$*

iv) Soient  $(v_\alpha)_\mu, \mu = 1, \dots, 4$  et  $\alpha = 1, \dots, n$  les composantes covariantes de  $n$  quadrivecteurs  $v_1, \dots, v_n$  et soient  $\hat{v}_\alpha \equiv (v_\alpha)_\mu \gamma^\mu$ . Montrer que

$$n \text{ impair} \Rightarrow \text{Tr}(\hat{v}_1 \dots \hat{v}_n) = 0$$

$$\text{Tr} (\hat{v}_1 \hat{v}_2) = 4 (v_1 v_2)$$

$$\text{Tr} (\hat{v}_1 \hat{v}_2 \hat{v}_3 \hat{v}_4) = 4 \{ (v_1 v_2) (v_3 v_4) + (v_1 v_4) (v_2 v_3) - (v_1 v_3) (v_2 v_4) \}$$

Suggestion : Etablir d'abord le résultat préliminaire suivant

$$\text{Tr} (\hat{v}_1 \gamma^\mu \hat{v}_3 \gamma^\nu) = 4 \{ v_1^\mu v_3^\nu + v_1^\nu v_3^\mu - (v_1 v_3) g^{\mu\nu} \}$$

en considérant séparément les cas  $\mu = \nu$  et  $\mu \neq \nu$ .

### Exercice 10.2

1) Montrer que lors d'un changement de référentiel  $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$  associé à une transformation de Lorentz (orthochrone)  $\Lambda : x \mapsto x'$  la fonction d'onde adjointe de Dirac  $\bar{\psi}(x)$  se transforme selon la loi

$$\bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x) S(\Lambda)^{-1}, \quad x' = \Lambda x$$

où  $S(\Lambda)$  désigne la matrice figurant dans la loi de transformation (2.19) de la fonction d'onde de Dirac  $\psi(x)$ .

2) Par définition, poser

$$\gamma^5 = c \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4$$

puis établir les égalités suivantes

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, \quad \forall \mu = 1, \dots, 4 \quad (\gamma^5)^2 = -\mathbb{1} \quad \text{et} \quad (\gamma^5)^\dagger = -\gamma^5$$

3) Etablir les lois de transformation des grandeurs réelles suivantes sous l'action des transformations de Lorentz (orthochrones)

- |      |                                                              |                                  |
|------|--------------------------------------------------------------|----------------------------------|
| i)   | $\bar{\psi}(x) \psi(x)$                                      | scalaire                         |
| ii)  | $i \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x)$                         | quadrivecteur                    |
| iii) | $\frac{i}{2} \bar{\psi}(x) [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \psi(x)$ | tenseur de rang 2 antisymétrique |
| iv)  | $\bar{\psi}(x) \gamma^5 \gamma^\mu \psi(x)$                  | pseudo-quadrivecteur             |
| v)   | $\bar{\psi}(x) \gamma^5 \psi(x)$                             | pseudo-scalaire                  |

Suggestion : Traiter le point v) avant le point iv).

$$\delta^1 \delta^2 \delta^3 \delta^4 = \frac{1}{4!} \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \delta^{i_1 j_1} \delta^{i_2 j_2} \delta^{i_3 j_3} \delta^{i_4 j_4}$$

$$\det A = \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} a_{1i_1} a_{2i_2} a_{3i_3} a_{4i_4}$$

### Exercice 10.3

Thème : Réflexion d'espace et parité de l'électron de Dirac.

Notons  $P$  l'opérateur unitaire agissant dans  $\mathcal{H}_{\text{électron}}$ , traduisant l'action de la réflexion d'espace  $x \mapsto -x$  sur les états de l'électron de Dirac.

i) Cet opérateur (s'il existe) doit satisfaire les conditions suivantes

$$P^{-1} \mathbf{p} P = -\mathbf{p}, \quad P^{-1} H P = H \quad \text{et} \quad P^{-1} W P = -W$$

où  $\mathbf{p}$ ,  $H$  et  $W$  désignent les opérateurs caractérisant les observables de la quantité de mouvement, de l'énergie de l'électron libre et de l'hélicité respectivement.

ii) Montrer que ces dernières conditions définissent l'opérateur  $P$  à une phase près, plus précisément que

$$(P \psi)(x) = \eta \beta \psi(-x), \quad \forall x \quad \text{et} \quad \forall \psi \in \mathcal{H}_{\text{électron}}$$

où  $\eta$  désigne un nombre complexe de module 1. En particulier vérifier que

$$P = P^\dagger \quad \text{et} \quad P^2 = \mathbb{1}$$

dès que  $\eta = \pm 1$ . L'opérateur  $P$  définit ainsi une observable appelée la parité. Ses valeurs propres, également appelées parités, sont  $\pm 1$ .

iii) En déduire qu'en terme des solutions (2.80) de l'équation de Dirac libre l'action de l'opérateur  $P$  se traduit par les relations

$$P \psi_{\mathbf{p}, \sigma}^{(\pm)} = \psi_{-\mathbf{p}, -\sigma}^{(\pm)}$$

à une phase près.

iv) Vérifier que l'action de l'opérateur  $P$  sur la quadri-densité de courant de particules définies sous (10.17) est telle que

$$P^{-1} \mathbf{j}(x) P = -\mathbf{j}(-x) \quad \text{et} \quad P^{-1} \rho(x) P = \rho(-x)$$

v) Associer les résultats précédents à ceux de l'exercice 4.17 concernant l'action de la réflexion d'espace sur les états du champ électromagnétique quantique et finalement en conclure que l'hamiltonien d'interaction  $H_{\text{int}}^{e-\gamma}$  conserve la parité.

**Exercice 10.4**

Etablir l'égalité (10.24),

$$C^{-1} S(\Lambda) C = S(\Lambda)^*$$

pour tout  $\Lambda$  tel que  $\Lambda^4_4 \geq 1$ . En déduire que la conjugaison de charge est une opération covariante relativiste

$$(\psi')_c = (\psi_c)' , \quad \forall \psi \in \mathcal{H}_{\text{électron}}$$

**Exercice 10.5**

**Thème :** A la découverte des neutrinos de Weyl. L'équation de Dirac à masse nulle et les équations de Weyl.

i) Considérons l'équation de Dirac libre lorsque  $m = 0$ . Montrer que les spineurs de Dirac à 4 composantes associés aux solutions ondes planes sont de la forme

$$\psi_{p\sigma}^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} u_\sigma(p) \\ \pm \sigma u_\sigma(p) \end{bmatrix}$$

où les  $u_\sigma(p)$  désignent les spineurs à 2 composantes usuels d'hélicité  $\sigma = \pm 1$ .

ii) Grouper les 4 spineurs précédents par paires d'éléments CP-conjugués,

$$\left( \psi_{p,\sigma}^{(+)} \text{ et } \psi_{p,-\sigma}^{(-)} \right), \quad \sigma = \pm 1$$

et montrer que le projecteur orthogonal  $P_{p\sigma}$  sur le sous-espace de  $\mathbb{C}^4$  qu'ils engendrent s'écrit

$$P_{p\sigma} = \frac{1}{2} (\mathbb{1} - i\sigma \gamma^5)$$

avec 
$$\gamma^5 = c \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4 = i \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{bmatrix}$$

(voir exercice 10.2).

iii) Considérer le changement de représentation caractérisé par la matrice complexe  $4 \times 4$ . ( $\rightarrow$  représentation de Wigner)

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbb{1} \end{bmatrix}$$

telle que

$$A P_{p\sigma} A^{-1} = \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \sigma \beta)$$

Vérifier que dans cette nouvelle représentation, l'équation de Dirac, s'écrit

$$\gamma_s^\mu \partial_\mu \psi_s(x) = 0$$

avec  $\psi_s(x) \equiv A \psi(x)$  et

$$\gamma_s^\mu = A \gamma^\mu A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -i\tilde{\sigma}^\mu \\ i\sigma^\mu & 0 \end{bmatrix} \quad \mu = 1, \dots, 4$$

avec  $\{\sigma^i\}^m = (\sigma, +\mathbb{1}/c)$  et  $\tilde{\sigma}^\mu = (\sigma, -\mathbb{1}/c)$

iv) En déduire que l'équation de Dirac de masse nulle se décompose en deux équations découplées

et 
$$\begin{cases} \sigma^\mu \partial_\mu W(x) = 0 & \text{(1ère équation de Weyl)} \\ \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \tilde{W}(x) = 0 & \text{(2ème équation de Weyl)} \end{cases}$$
  $\rightarrow$  sol. observées (neutrino, antineutrino)

Montrer que la 1ère équation de Weyl décrit l'évolution d'une particule de masse nulle d'hélicité  $\sigma = +1$  pour la particule et d'hélicité  $\sigma = -1$  pour l'antiparticule.

En ce qui concerne la 2ème équation de Weyl, elle décrit l'évolution d'une particule de masse nulle d'hélicité  $\sigma = -1$  pour la particule et d'hélicité  $\sigma = +1$  pour l'antiparticule.

Dans les deux cas le moment cinétique intrinsèque vaut  $\hbar/2$ .

Remarque : Seule la 2ème équation de Weyl décrit l'évolution d'objets physiques observés : le neutrino et l'antineutrino.

En effet, jusqu'à ce jour seuls des neutrinos polarisés à gauche ( $\sigma = -1$ ) ont été observés. Ce fait est à l'origine de la violation de la parité par l'interaction électro-faible.

- v) Selon le schéma du paragraphe 2.3 discuter la covariance relativiste formelle des équations de Weyl ainsi les lois de transformation des "fonctions d'onde" à 2 composantes  $W(x)$  et  $\tilde{W}(x)$ .

**Mise en garde !!!** : Comme les photons, les particules de Dirac de masse nulle ne possèdent pas d'observables de position. Ainsi, les objets mathématiques  $W(x)$  et  $\tilde{W}(x)$  appelés abusivement "fonctions d'onde" ne sont en aucune manière interprétables en terme de localisabilité.

#### Exercice 10.6

On considère les spineurs de Dirac  $\psi_{p\sigma}^{(\pm)}$  définis en (2.80). Montrer que les matrices complexes  $4 \times 4$

$$P_p^{(\pm)} = \sum_{\sigma} \psi_{p\sigma}^{(\pm)} (\psi_{p\sigma}^{(\pm)})^+$$

sont les projecteurs orthogonaux sur les sous-espaces propres de la matrice  $c \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\alpha} + m c^2 \beta$  associés aux valeurs propres  $\pm E(p)$  respectivement. En déduire les égalités

$$\sum_{\sigma} \psi_{p\sigma}^{(\pm)} (\psi_{p\sigma}^{(\pm)})^+ = \frac{E(p) \mathbb{1} \pm (c \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\alpha} + m c^2 \beta)}{2 E(p)}$$

A l'aide de ces derniers résultats montrer finalement que

$$\sum_{\sigma} u_{\sigma}(p) \bar{u}_{\sigma}(p) = \frac{E(p)}{m c^2} \sum_{\sigma} \psi_{p\sigma}^{(+)} \bar{\psi}_{p\sigma}^{(+)} = \frac{1}{2 m c} (+ m c \mathbb{1} - i \hat{p}_+)$$

et que

$$\sum_{\sigma} v_{\sigma}(p) \bar{v}_{\sigma}(p) = \frac{E(p)}{m c^2} \sum_{\sigma} \psi_{-p\sigma}^{(-)} \bar{\psi}_{-p\sigma}^{(-)} = \frac{1}{2 m c} (- m c \mathbb{1} - i \hat{p}_+)$$

où nous avons posé  $p_+ \equiv ((p_+)_1, \dots, (p_+)_4) = (p, -E(p))$  et  $\hat{p}_+ = (p_+)_\mu \gamma^\mu$

Rappel :  $\bar{\psi}_{p\sigma}^{(+)} = (\psi_{p\sigma}^{(+)})^+$ , etc... par définition. De même

$$u_{\sigma}(p) \equiv \sqrt{\frac{E(p)}{m c^2}} \psi_{p\sigma}^{(+)} \quad \text{et} \quad v_{\sigma}(p) \equiv \sqrt{\frac{E(p)}{m c^2}} \psi_{-p\sigma}^{(-)}$$

Finalement établir les égalités suivantes

$$\bar{u}_{\sigma}(p) u_{\sigma'}(p) = \delta_{\sigma\sigma'}$$

$$\bar{u}_{\sigma}(p) v_{\sigma'}(p) = \bar{v}_{\sigma}(p) u_{\sigma'}(p) = 0$$

$$\bar{v}_{\sigma}(p) v_{\sigma'}(p) = -\delta_{\sigma\sigma'} \quad , \quad \forall p, \sigma \text{ et } \sigma'$$

#### Exercice 10.7

Thème : Détermination (au premier ordre de perturbation) de la section efficace différentielle de diffusion (sans polarisation de spin) d'un électron relativiste par le potentiel coulombien d'un noyau

$$\Phi(x) = \frac{-Z e}{4 \pi \epsilon_0} \frac{1}{|x|}$$

1ère étape

A l'aide de la règle d'or de Fermi au premier ordre de perturbation montrer que la probabilité de transition par unité de temps d'un état initial  $|p, +1, \sigma\rangle$  vers un état final  $|p', +1, \sigma'\rangle$  s'écrit

$$\frac{dp(\text{in} \rightarrow \text{fin})}{dt} = \frac{2 \pi}{\hbar} \delta(E(p') - E(p)) \frac{Z^2 e^4 \hbar^4 c^2}{L^6 \epsilon_0^2} \left[ \frac{|\bar{\psi}_{p'\sigma'}^{(+)} \gamma^4 \psi_{p\sigma}^{(+)}|}{(p' - p)^2} \right]^2$$

2ème étape

Partant du résultat précédent montrer que la section efficace différentielle de diffusion avec polarisation de spin a pour expression

$$\frac{d\sigma(\text{in} \rightarrow \text{fin})}{d\Omega(\mathbf{p}')} = 4 Z^2 r_o^2 m^4 c^6 \left[ \frac{|\bar{u}_{\sigma'}(\mathbf{p}') \gamma^4 u_{\sigma}(\mathbf{p})|}{(\mathbf{p}' - \mathbf{p})^2} \right]^2, \quad |\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'|$$

où  $r_o$  désigne le rayon classique de l'électron et où  $u_{\sigma}(\mathbf{p})$  etc... procèdent des définitions (10.67).

3ième étape

Etablir la formule

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma\sigma'} |\bar{u}_{\sigma'}(\mathbf{p}') \gamma^4 u_{\sigma}(\mathbf{p})|^2 &= \\ &= \frac{-1}{4 m^2 c^2} \text{Tr} \left[ (\mathbf{i} \hat{\mathbf{p}}' - m c \mathbb{1}) \gamma^4 (\mathbf{i} \hat{\mathbf{p}} - m c \mathbb{1}) \gamma^4 \right] \\ &= \frac{2 E(\mathbf{p})^2 - c^2 (\mathbf{p}^2 - \mathbf{p}' \cdot \mathbf{p})}{m^2 c^6} \end{aligned}$$

Suggestion : s'inspirer du calcul de l'expression (10.79) et utiliser les relations établies dans le cadre de l'exercice (10.1 iv).

4ième étape

Compte tenu des résultats établis précédemment montrer que la section efficace de diffusion sans polarisation de spin s'écrit finalement

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma(\mathbf{p} - \mathbf{p}')}{d\Omega(\mathbf{p}')} &= 2 Z^2 r_o^2 m^2 \frac{2 E(\mathbf{p})^2 - c^2 (\mathbf{p}^2 - \mathbf{p}' \cdot \mathbf{p})}{|\mathbf{p}' - \mathbf{p}|^4} \\ &= \frac{Z^2 r_o^2}{4} (1 - \beta^2) \frac{1 - (\beta \sin(\theta/2))^2}{(\beta \sin(\theta/2))^4} \end{aligned}$$

où  $\theta$  désigne l'angle de diffusion et où  $\beta$  désigne le rapport  $|v_e|/c$  de la vitesse des électrons par la vitesse de la lumière. Rappelons que

$$E(\mathbf{p}) = E(\mathbf{p}') = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{et} \quad |\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'| = \frac{m c \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Commenter l'allure de cette dernière section efficace en fonction de  $\theta$  et  $\beta$ .

### Exercice 10.8

On considère la diffusion élastique de deux particules 1 et 2 de masses  $m_1$  et  $m_2$  respectivement. Les énergies-quantités de mouvement incidentes sont désignées par  $p_1$  et  $p_2$  respectivement. Les énergies-quantités de mouvement émergentes sont désignées par  $p_1'$  et  $p_2'$  respectivement. Bien entendu

$$P_1 + P_2 = P_1' + P_2'$$

$$(p_1)^2 = (p_1')^2 = -m_1^2 c^2 \quad \text{et} \quad (p_2)^2 = (p_2')^2 = -m_2^2 c^2$$

i) Montrer que l'invariant relativiste

$$W \equiv c \sqrt{-(P_1 + P_2)^2}$$

n'est autre que l'énergie du système dans le centre de masse.

ii) Montrer que dans le centre de masse

$$|P_{1\text{cm}}| = |P_{2\text{cm}}| = |P_{1\text{cm}}'| = |P_{2\text{cm}}'| = \frac{\sqrt{(W^2 - m_1^2 c^4 - m_2^2 c^4)^2 - 4 m_1^2 m_2^2 c^8}}{2 W c}$$

$$= \sqrt{\frac{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2 c^4}{m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 - 2 p_1 p_2}}$$

$$E_{1\text{cm}} = E_{1\text{cm}}' = \frac{W^2 + m_1^2 c^4 - m_2^2 c^4}{2 W}$$

et

$$E_{2\text{cm}} = E_{2\text{cm}}' = \frac{W^2 + m_2^2 c^4 - m_1^2 c^4}{2 W}$$

iii) Montrer que le transfert de quantité de mouvement dans le centre de masse

$$\Delta = \sqrt{(P_{1\text{cm}}' - P_{1\text{cm}})^2}$$



est un invariant relativiste s'écrivant

$$\Delta = \sqrt{(P_1' - P_1)^2}$$

iv) Montrer que l'angle de diffusion dans le centre de masse  $\theta_{cm}$  est un invariant relativiste fourni par la relation

$$\begin{aligned} \sin \frac{\theta_{cm}}{2} &= \frac{\Delta W c}{\sqrt{(W^2 - m_1^2 c^4 - m_2^2 c^4)^2 - 4 m_1^2 m_2^2 c^8}} \\ &= \frac{\Delta W}{2 c \sqrt{(P_1 P_2)^2 - m_1^2 m_2^2 c^4}} \quad 0 \leq \theta_{cm} \leq \pi \end{aligned}$$

#### Exercice 10.9

(explicitement)

Thème : invariance par conjugaison de charge de l'interaction électromagnétique.

Ecrire l'amplitude de diffusion de l'effet Compton au second ordre pour un positron

$$e_+ + \gamma \rightarrow e_+ + \gamma$$

On attribuera une quantité de mouvement  $\mathbf{p}$  et une hélicité  $\sigma$  au positron incident et une quantité de mouvement  $\mathbf{p}'$  et une hélicité  $\sigma'$  au positron diffusé. De même on attribuera une quantité de mouvement  $\hbar \mathbf{k}$  et une polarisation  $\lambda$  au photon incident et une quantité de mouvement  $\hbar \mathbf{k}'$  et une polarisation  $\lambda'$  au photon diffusé.

Montrer que cette dernière amplitude de diffusion coïncide au signe près avec l'amplitude de diffusion (10.65) de l'effet Compton pour un électron

$$A(e_+ + \gamma \rightarrow e_+ + \gamma) = -A(e_- + \gamma \rightarrow e_- + \gamma)$$

Suggestions : Utiliser les relations (10.18), (10.20) et (10.28). Il est également utile d'établir préalablement les relations suivantes

$$C^{-1} \hat{e}_\lambda(\mathbf{k})^* C = \hat{e}_\lambda(\mathbf{k})^*$$

$$C^{-1} S(0, \mathbf{p})^* C = S(0, -\mathbf{p})$$

#### Exercice 10.10

Question similaire à celle de l'exercice 10.9 mais pour l'amplitude de rayonnement de freinage du positron, évaluée au second ordre.

$$e_+ + \mathcal{N} \rightarrow e_+ + \mathcal{N} + \gamma$$

Comparer cette dernière amplitude avec l'amplitude (10.116) du rayonnement de freinage de l'électron, évaluée au second ordre, pour le même potentiel coulombien extérieur.

$$e_- + \mathcal{N} \rightarrow e_- + \mathcal{N} + \gamma$$

Le résultat de cette comparaison est-il propre au second ordre de perturbation ou traduit-il une propriété générale ?

## Appendice A

### Exercice A.1

Soient  $V$  et  $W$  deux espaces vectoriels munis de produits scalaires  $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$  respectivement. Soit  $V \otimes W$  leur produit tensoriel muni du produit scalaire induit.

Les symboles  $A$  et  $B$  désignent deux opérateurs linéaires agissant dans  $V$  et  $W$  respectivement. Montrer que

- i)  $A$  et  $B$  autoadjoints  $\Rightarrow A \otimes B$  autoadjoint
- ii)  $A$  et  $B$  unitaires  $\Rightarrow A \otimes B$  unitaires
- iii)  $[A \otimes \mathbb{1}_W, \mathbb{1}_V \otimes B] = 0, \quad \forall A$  et  $B$
- iv)  $\exp(A) \otimes \exp(B) = \exp(A \otimes \mathbb{1}_W + \mathbb{1}_V \otimes B), \quad \forall A$  et  $B$
- v)  $A$  et  $B$  projecteurs  $\Rightarrow A \otimes B$  projecteurs

vi) Les symboles  $E$  et  $F$  désignent deux sous-espaces fermés de  $V$  et  $W$  respectivement. Montrer que

$\{v \otimes w \mid v \in E \text{ et } w \in F\}$   
ne constitue (en général) pas un sous-espace de  $V \otimes W$

vii)  $P_E \otimes P_F = P_{E \otimes F}$

où  $P_E$  et  $P_F$  désignent les projecteurs sur les sous-espaces fermés  $E$  et  $F$  et où  $E \otimes F$  désigne l'adhérence du sous-espace engendré par  $\{v \otimes w \mid v \in E \text{ et } w \in F\}$

viii) Soient  $\{e_i\}$  et  $\{e'_j\}$  deux bases de  $V$  reliées par

$$e_i = \alpha^j_i e'_j$$

et soient  $\{f_k\}$  et  $\{f'_\ell\}$  deux bases de  $W$  reliées par

$$f_k = \beta^\ell_k f'_\ell$$

Montrer que pour tout tenseur

$$t = t^{ik} e_i \otimes f_k = t'^{j\ell} e'_j \otimes f'_\ell$$

les composantes relatives aux bases  $e_i \otimes f_k$  et  $e'_j \otimes f'_\ell$  sont liées par la relation bien connue

$$t'^{j\ell} = \alpha^j_i \beta^\ell_k t^{ik}$$

### Exercice A.2

Considérons un système physique constitué par 2 particules de spin 1/2. Nous nous restreignons pour la suite aux degrés de liberté de spin uniquement. Ainsi l'espace d'Hilbert décrivant les états du système est simplement :

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$$

- i) Déterminer l'observable  $S_{\text{tot}}$  de spin total du système.
- ii) Calculer les relations de commutation :

$$[S_{\text{tot}}, S_{\text{tot}}^2] = 0$$

- iii) Construire une base de  $\mathcal{H}$  constituée de vecteurs propres communs à  $S_{\text{tot}}^2$  et  $S_{\text{tot}z}$ .
- iv) Ecrire les matrices de  $S_{\text{tot}}^2$  et  $S_{\text{tot}}$  dans la base trouvée sous iii).
- v) On soumet le système à un champ d'induction magnétique extérieur  $B$ . Ecrire l'hamiltonien et l'opérateur d'évolution du système.

**Exercice A.3**

Considérons un système constitué par 2 oscillateurs harmoniques découplés, de pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$  respectivement. Notons  $\mathcal{H}_i$  ( $i=1, 2$ ) l'espace de Hilbert décrivant les états de l'oscillateur  $i$  et  $H_i$  l'hamiltonien régissant son évolution.

$$H_i = \frac{p^2 + \omega_i^2 q^2}{2} \quad \text{avec} \quad [p, q] = -i\hbar \mathbb{1}$$

L'espace de Hilbert du système considéré est donné par :

$$F = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \quad \text{où} \quad \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$$

- i) Ecrire les observables positions et impulsions du système total ainsi que leurs relations de commutation.
- ii) Donner l'expression de l'hamiltonien  $H$  régissant l'évolution du système.
- iii) Calculer les valeurs et vecteurs propres de  $H$ .
- iv) Calculer la fonction de partition du système dans l'ensemble canonique.

$$Z(\beta) = \text{Tr}_F [e^{-\beta H}], \quad \beta \equiv \frac{1}{k_B T}$$

où  $k_B$  désigne la constante de Boltzmann et  $T$  la température absolue.

## Exercice A.1

### Manipulations sur des opérateurs linéaires

(i) Suit immédiatement de (A.8). L'inverse n'est pas vraie: si  $A \otimes B$  est autoadjoint,  $A$  et  $B$  ne le sont pas forcément (en particulier, ils pourraient être antiautoadjoints).

(ii) Immédiat en utilisant (A.5) et (i).

(iii) En utilisant (A.5):

$$[A \otimes \mathbb{1}_W, \mathbb{1}_V \otimes B] = (A \otimes \mathbb{1}_W)(\mathbb{1}_V \otimes B) - (\mathbb{1}_V \otimes B)(A \otimes \mathbb{1}_W) \stackrel{(A.5)}{=} A \otimes B - A \otimes B = 0.$$

(iv) La démonstration est plus directe en partant du terme de droite:

$$\exp(A \otimes \mathbb{1}_W + \mathbb{1}_V \otimes B) \stackrel{(iii)}{=} \exp(A \otimes \mathbb{1}_W) \exp(\mathbb{1}_V \otimes B) = \exp(A) \otimes \exp(B),$$

où la dernière égalité suit du développement en série et de (A.5):

$$\exp(A \otimes \mathbb{1}_W) = \sum_n \frac{1}{n!} (A \otimes \mathbb{1}_W)^n \stackrel{(A.5)}{=} \sum_n \frac{1}{n!} A^n \otimes \mathbb{1}_W = \exp(A) \otimes \mathbb{1}_W.$$

(v) Un opérateur linéaire  $P$  est un projecteur orthogonal s'il est autoadjoint et idempotent ( $P^2 = P$ ), donc l'affirmation suit immédiatement de (A.5) et de (i).

### Manipulations sur les vecteurs et les tenseurs

(vi) Pour être un sous-espace vectoriel, l'ensemble  $G = \{v \otimes w \mid v \in E, w \in F\}$  doit être fermé par combinaison linéaire, i.e. si  $g_1, g_2 \in G$  alors  $\alpha g_1 + \beta g_2 \in G$ . Or ceci n'est pas le cas, comme le montre le contre-exemple suivant. Soient  $e_1, e_2$  deux vecteurs de base de  $E$ , et  $f_1, f_2$  deux vecteurs de base de  $F$ : pour que

$$e_1 \otimes f_1 + e_2 \otimes f_2 \stackrel{?}{=} (V^i e_i) \otimes (W^j f_j)$$

on voit que les composantes  $V^i$  et  $W^j$  devraient satisfaire

$$V^1 W^1 = V^2 W^2 = 1, \quad V^1 W^2 = V^2 W^1 = 0$$

ce qui est manifestement impossible. On vient donc de montrer que  $G$  n'est pas un sous-espace, ou encore que dès que  $\dim E \geq 2$  et  $\dim F \geq 2$  on trouve dans  $E \otimes F$  des vecteurs qui ne sont pas factorisables sous la forme  $v \otimes w$ .

(vii) Soit  $\{e_i\}_{i \in I}$  une base de  $V$  et  $\{e_i\}_{i \in I'}$  une base de  $E$  (avec  $I' \subset I$ ); de même, soit  $\{f_j\}_{j \in J}$  une base de  $W$  et  $\{f_j\}_{j \in J'}$  une base de  $F$ . Le sous-espace fermé  $E \otimes F$  est défini comme la fermeture du sous-espace engendré par  $\{e_i \otimes f_j\}_{i \in I', j \in J'}$ .

Soit alors  $T = T^{ij} e_i \otimes f_j$  un vecteur quelconque de  $V \otimes W$  (la convention d'Einstein indique la somme sur  $I$  et  $J$ ). Alors:

$$\begin{aligned} P_{E \otimes F} T &= \sum_{i \in I', j \in J'} T^{ij} e_i \otimes f_j; \\ (P_E \otimes P_F) T &\stackrel{(A.4)}{=} T^{ij} P_E(e_i) \otimes P_F(f_j) = \sum_{i \in I', j \in J'} T^{ij} e_i \otimes f_j \end{aligned}$$

ce qui montre l'égalité opératorielle.

(viii) Ce n'est qu'une question de réécriture.

### Appendice: intérêt de ces outils dans le cadre de la physique quantique

En physique quantique, un *sous-espace fermé*  $E$  d'un espace de Hilbert décrit une *propriété physique*  $\mathcal{E}$  du système. La fermeture est requise en dimension infinie pour assurer  $(E^c)^c = E$ , qui traduit le fait que le contraire du contraire d'une propriété est la propriété.

La relation démontrée au point (iv) sera utilisée dans les exercices A.2 et A.3, où son intérêt sera manifeste. Les *vecteurs d'état non-factorisables* (*entangled* en anglais) dont on parle au point (vi) jouent un rôle très important. Il suffit de penser aux états "singulet" et "triplet" dans un système de deux spins. L'interprétation de tels états est la suivante: aucun des deux sous-systèmes ne possède avec certitude une certaine propriété physique (plusieurs résultats sont possibles), mais les résultats possibles sont strictement corrélés (p.ex.: si la mesure sur un spin donne "up", alors la mesure sur l'autre spin donne forcément "down").

Quant aux *projecteurs orthogonaux* sur des sous-espaces fermés, ils décrivent les processus de mesure:  $|P_E \psi|^2$  est la probabilité qu'une mesure sur l'état  $\psi$  révèle la propriété  $\mathcal{E}$  associée au sous-espace fermé  $E$ .

## Exercice A.2

### Rappels utiles

On rappelle (cf. chapitre 1 du cours) qu'un spin  $\frac{1}{2}$  est décrit par l'espace de Hilbert  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ ; c'est-à-dire, les états de spin sont décrits par des vecteurs de  $\mathbb{C}^2$ . Les opérateurs linéaires sur cet espace sont engendrés par les combinaisons linéaires de  $\{\mathbb{1}, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ . L'observable de spin est donnée par

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2} (\sigma^i \hat{e}_i) \stackrel{\text{not.}}{=} \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}. \quad (0.0.1)$$

On rappelle les relations de commutation

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z \quad \text{ou} \quad [\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z. \quad (0.0.2)$$

On sait que  $\vec{S}^2$  commute<sup>1</sup> avec chacun des  $S_i$  et que donc on peut diagonaliser simultanément  $\vec{S}^2$  et (conventionnellement)  $S_z$ . Les vecteurs propres sont notés  $|+\rangle$  et  $|-\rangle$ , et sont tels que

$$\vec{S}^2 |\omega\rangle = \frac{3\hbar^2}{4} |\omega\rangle \quad \sigma_x |\omega\rangle = \omega |\omega\rangle, \quad (0.0.3)$$

$$\sigma_x |\omega\rangle = |-\omega\rangle, \quad \sigma_y |\omega\rangle = i\omega |-\omega\rangle. \quad (0.0.4)$$

Finalement, en utilisant la définition d'exponentielle d'un opérateur on démontre facilement la relation utile

$$\exp(i\vec{v} \cdot \vec{\sigma}) = \cos(|\vec{v}|) \mathbb{1} + i \sin(|\vec{v}|) \sigma_v, \quad \text{avec } \sigma_v = \hat{e}_v \cdot \vec{\sigma}. \quad (0.0.5)$$

Il est instructif de comparer le formalisme proposé ici à celui utilisé dans le paragraphe X B du Cohen-Tannoudji, où la notion de produit tensoriel est implicite.

### Points (i) et (ii): observable de spin totale et règles de commutation

On s'intéresse à *décrire* deux spins  $\frac{1}{2}$ . Il est important de souligner que nous ne supposons pas a priori que ces deux spins sont *en interaction*: l'interaction ne concerne pas la description du système, mais son évolution. Les axiomes de la physique quantique imposent que la description d'un système composé de sous-système est donnée par l'espace de Hilbert produit tensoriel; et donc

$$\text{deux spins } \frac{1}{2} \implies \mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2.$$

Il est clair que l'observable de spin du premier système s'écrit, en tant qu'opérateur sur  $\mathcal{H}$ , comme  $\vec{S}_1 = \vec{S} \otimes \mathbb{1}$ ; de même,  $\vec{S}_2 = \mathbb{1} \otimes \vec{S}$ . Ainsi, l'observable de spin total  $\vec{S}_1 + \vec{S}_2$  est

$$\vec{S}_{tot} = \vec{S} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \vec{S} = \frac{\hbar}{2} (\vec{\sigma} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \vec{\sigma}). \quad (0.0.6)$$

<sup>1</sup>Pour un spin  $\frac{1}{2}$  c'est en fait trivial car  $\sigma_i^2 = \mathbb{1}$  pour  $i = x, y, z$ , et donc  $\vec{\sigma}^2 = 3\mathbb{1}$ .

En utilisant le fait que  $\vec{\sigma}^2 = 3\mathbb{1}$ , on trouve après un calcul trivial que

$$\vec{S}_{tot}^2 \stackrel{\text{def.}}{=} \vec{S}_{tot} \cdot \vec{S}_{tot} = \frac{\hbar^2}{2} (3\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + \underbrace{\sigma_x \otimes \sigma_x + \sigma_y \otimes \sigma_y + \sigma_z \otimes \sigma_z}_{\equiv \vec{\sigma} \otimes \vec{\sigma}}). \quad (0.0.7)$$

Nous voulons calculer le commutateur

$$\begin{aligned} [\vec{S}_{tot}, \vec{S}_{tot}^2] &= [S_{tot,x}, \vec{S}_{tot}^2] \hat{e}_x + [S_{tot,y}, \vec{S}_{tot}^2] \hat{e}_y + [S_{tot,z}, \vec{S}_{tot}^2] \hat{e}_z = \\ &= \sum_{i=x,y,z} \frac{\hbar^3}{4} [(\sigma_i \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \sigma_i), (3\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + \vec{\sigma} \otimes \vec{\sigma})] \hat{e}_i \end{aligned}$$

Il est clair que  $\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}$  commute avec n'importe quoi; il est aussi clair que  $\sigma_i \otimes \sigma_i$  commute avec  $\sigma_i \otimes \mathbb{1}$  et avec  $\mathbb{1} \otimes \sigma_i$ ; donc il reste

$$\begin{aligned} [\sigma_i \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \sigma_i, \sigma_j \otimes \sigma_j + \sigma_k \otimes \sigma_k] &= \underbrace{[\sigma_i, \sigma_j]}_{2i\sigma_k} \otimes \sigma_j + \underbrace{[\sigma_i, \sigma_k]}_{-2i\sigma_j} \otimes \sigma_k + \\ &+ \sigma_j \otimes \underbrace{[\sigma_i, \sigma_j]}_{2i\sigma_k} + \sigma_k \otimes \underbrace{[\sigma_i, \sigma_k]}_{-2i\sigma_j} = 0 \end{aligned}$$

où l'on a choisi  $i, j, k$  comme permutation paire de  $x, y, z$ . Donc

$$\boxed{[\vec{S}_{tot}, \vec{S}_{tot}^2] = 0.} \quad (0.0.8)$$

On retrouve le fait que  $\vec{S}_{tot}^2$  commute avec toutes les composantes de  $\vec{S}_{tot}$ , et donc on va pouvoir se livrer à la recherche d'une base qui diagonalise simultanément  $\vec{S}_{tot}^2$  et  $S_{tot,z}$ .

### Points (iii) et (iv): vecteurs propres communs à $\vec{S}_{tot}^2$ et $S_{tot,z}$ .

Pour ne pas alourdir les notations, on va travailler avec les opérateurs

$$\begin{aligned} \Sigma_z &= \frac{2}{\hbar} S_{tot,z} = \sigma_z \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \sigma_z, \\ \Sigma^2 &= \frac{2}{\hbar^2} S_{tot}^2 = 3\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + \sigma_x \otimes \sigma_x + \sigma_y \otimes \sigma_y + \sigma_z \otimes \sigma_z. \end{aligned}$$

Les vecteurs de la forme  $|\omega\rangle \otimes |\omega'\rangle$ , avec  $\omega, \omega' \in \{+, -\}$ , i.e. les produits tensoriels des états propres communs à  $\vec{S}^2$  et  $S_z$  pour chaque spin, sont des états propres de  $\Sigma_z$ :

$$\begin{aligned} \Sigma_z |\omega\rangle \otimes |\omega'\rangle &= (\sigma_z |\omega\rangle) \otimes |\omega'\rangle + |\omega\rangle \otimes (\sigma_z |\omega'\rangle) = \\ &= (\omega + \omega') |\omega\rangle \otimes |\omega'\rangle. \end{aligned}$$

Remarquons en particulier que les états  $|+\rangle \otimes |-\rangle$  et  $|-\rangle \otimes |+\rangle$  sont associés à la même valeur propre 0, et donc toute combinaison linéaire de ces deux états est encore un état propre de

$\Sigma_z$  (en d'autres termes, le sous-espace propre associé à la valeur propre  $\hbar$  de dimension 2). Un calcul analogue dont nous n'écrivons pas les étapes donne

$$\Sigma^2|\omega\rangle \otimes |\omega'\rangle = (3 + \omega\omega')|\omega\rangle \otimes |\omega'\rangle + (1 - \omega\omega')|-\omega\rangle \otimes |-\omega'\rangle$$

Ainsi,  $|+\rangle \otimes |+\rangle$  et  $|-\rangle \otimes |-\rangle$  sont (comme prévu<sup>2</sup>) des états propres de  $\Sigma^2$ . En revanche, les états  $|+\rangle \otimes |-\rangle$  et  $|-\rangle \otimes |+\rangle$  ne sont pas des états propres de  $\Sigma^2$ . En remarquant que  $\Sigma^2|+\rangle \otimes |-\rangle = \Sigma^2|-\rangle \otimes |+\rangle$ , il est presque immédiat de trouver les combinaisons linéaires qui diagonalisent  $\Sigma^2$ :

$$\Sigma^2(|+\rangle \otimes |-\rangle + |-\rangle \otimes |+\rangle) = 4(|+\rangle \otimes |-\rangle + |-\rangle \otimes |+\rangle)$$

$$\Sigma^2(|+\rangle \otimes |-\rangle - |-\rangle \otimes |+\rangle) = 0.$$

Résumons-nous: les vecteurs

$$\begin{aligned} |e_1\rangle &= |+\rangle \otimes |+\rangle \\ |e_2\rangle &= |-\rangle \otimes |-\rangle \\ |e_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \otimes |-\rangle + |-\rangle \otimes |+\rangle) \\ |e_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \otimes |-\rangle - |-\rangle \otimes |+\rangle) \end{aligned} \quad (0.0.9)$$

forment une base orthonormée de  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$  qui diagonalise simultanément  $\vec{S}_{tot}^2$  et  $S_{tot,z}$ . Si l'on note  $|e_1\rangle = (1, 0, 0, 0)$  etc., on a les représentations matricielles

$$S_{tot,z} = \hbar \text{diag}(1, -1, 0, 0), \quad \vec{S}_{tot}^2 = 2\hbar^2 \text{diag}(1, 1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}) \quad (0.0.10)$$

On retrouve le résultat bien connu  $\mathcal{H}_{\frac{1}{2}} \otimes \mathcal{H}_{\frac{1}{2}} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_0$  *Composition de 2 spins 1/2*

**Point (v): évolution dans un champ magnétique extérieur, sans interaction**

L'hamiltonien d'interaction est donné par

$$H_{tot} = -\gamma \vec{S}_{tot} \cdot \vec{B} = (-\gamma \vec{S} \cdot \vec{B}) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes (-\gamma \vec{S} \cdot \vec{B}) \equiv H \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H. \quad (0.0.11)$$

où  $\gamma$  est le facteur gyromagnétique reliant le spin au moment magnétique intrinsèque ( $\vec{\mu} = \gamma \vec{S}$ ). On remarque dans l'hamiltonien l'absence d'un terme de couplage entre les spins,

<sup>2</sup>Ceci était attendu, puisque ces états définissent des sous-espaces propres de  $\Sigma_z$  de dimension 1, et que  $[\Sigma_z, \Sigma^2] = 0$ .

qui serait de la forme  $A_1 \otimes A_2$ . Pour un hamiltonien indépendant du temps, l'opérateur d'évolution est formellement  $U(t) = \exp(-iHt/\hbar)$ . Alors ici

$$U_{tot}(t) = \exp(-iH_{tot}t/\hbar) = \exp\left[\left(-\frac{iHt}{\hbar}\right) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \left(-\frac{iHt}{\hbar}\right)\right].$$

Dans l'exercice A.1, au point (iv), on a démontré que  $\exp(A \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes B) = e^A \otimes e^B$ , et donc

$$U_{tot}(t) = U(t) \otimes U(t), \text{ avec } U(t) = \exp\left(-\frac{iHt}{\hbar}\right). \quad (0.0.12)$$

En choisissant les axes de sorte que  $\vec{B} = B\hat{e}_z$ , et en utilisant (0.0.5) on a d'ailleurs

$$U(t) = \exp\left(-\frac{iHt}{\hbar}\right) = \cos\left(\frac{\gamma Bt}{2}\right) \mathbb{1} - i \sin\left(\frac{\gamma Bt}{2}\right) \sigma_z.$$

Le fait que l'opérateur d'évolution factorise dans le produit tensoriel de deux opérateurs, chacun agissant sur un système, signifie que les systèmes évoluent indépendamment, ce qui est normal en l'absence de couplage.

$$\begin{aligned} S_{tot,z} &= \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ S_{tot}^2 &= 2\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## Exercice A.3

### Rappels sur l'oscillateur harmonique

L'oscillateur harmonique (à une dimension) est un système décrit par l'espace de Hilbert  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}, dx)$ , qui ne possède comme observables indépendantes que  $p$  et  $q$ , et dont l'évolution est régie par l'hamiltonien

$$H = \frac{p^2 + \omega^2 q^2}{2};$$

les observables  $p$  et  $q$  satisfaisant naturellement les relations de commutation<sup>1</sup>

$$[p, q] = -i\hbar \mathbb{1}.$$

Le spectre de  $H$  est non-dégénéré et peut être indexé par les entiers:

$$H|n\rangle = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) |n\rangle.$$

*Conseil:* à la lumière de cet exercice, et pour se remémorer les principaux résultats sur l'oscillateur harmonique, il peut être utile de parcourir le chap. V du Cohen-Tannoudji et ses Compléments.

### Point (i): observables $P$ et $Q$ pour deux oscillateurs harmoniques

On veut décrire deux oscillateurs harmoniques, et cela va se faire à l'aide de l'espace de Hilbert

$$\text{deux osc. harm.} \implies \mathcal{F} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}.$$

Les observables  $P$  et  $Q$  sont déduites en exigeant que leurs valeurs moyennes correspondent aux objets classiques "impulsion" et "position" du système composé. Il est clair alors que l'impulsion est la somme des impulsions, et la position est en fait la position du "centre de masse", et donc

$$P = p \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes p, \quad Q = \frac{1}{2}(q \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes q). \quad (0.0.1)$$

On retrouve bien les règles de commutation

$$\begin{aligned} [P, Q] &= \left[ p \otimes \mathbb{1}, \frac{1}{2} q \otimes \mathbb{1} \right] + \left[ \mathbb{1} \otimes p, \frac{1}{2} \mathbb{1} \otimes q \right] = \\ &= \frac{1}{2} [p, q] \otimes \mathbb{1} + \frac{1}{2} \mathbb{1} \otimes [p, q] = -i\hbar \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Ici, le symbole  $\mathbb{1}$  ne désigne pas un opérateur matriciel, mais simplement l'opérateur identité sur  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ .

### Points (ii) et (iii): expression et spectre de l'hamiltonien

L'hamiltonien du système total est (systèmes découplés)  $H = H_1 \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_2$ . Ses états propres sont manifestement les  $|n_1, n_2\rangle = |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle$ ,  $n_1$  et  $n_2$  parcourant  $\mathbb{N}$ . On a

$$H|n_1, n_2\rangle = E(n_1, n_2)|n_1, n_2\rangle = \left[ \hbar\omega_1 \left(n_1 + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega_2 \left(n_2 + \frac{1}{2}\right) \right] |n_1, n_2\rangle, \quad n_1, n_2 \in \mathbb{N}.$$

Le spectre de  $H$  est non-dégénéré si et seulement si  $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q}$ .

Il est facile de vérifier que  $H$  n'est pas l'hamiltonien d'un oscillateur harmonique à deux dimensions avec  $P$  et  $Q$  comme variables, même dans le cas  $\omega_1 = \omega_2$ . Cela tient au fait que  $P$  et  $Q$  sont de la forme (0.0.1), et qu'en prenant le carré on trouverait des termes  $p \otimes p$  qui ne se trouvent pas dans  $H$ .

Différent est le cas de l'oscillateur harmonique à deux (ou plus) dimensions, qui est équivalent à deux oscillateurs harmoniques. La différence réside dans le fait que dans ce cas  $\vec{P} = (p \otimes \mathbb{1})\hat{e}_x + (\mathbb{1} \otimes p)\hat{e}_y$ , et donc les termes croisés de type  $p \otimes p$  disparaissent en raison de l'orthogonalité de  $\hat{e}_x$  et  $\hat{e}_y$ .

### Point (iv): fonction de partition dans l'ensemble canonique

Vue la forme de  $H$ , on peut utiliser le point (iv) de l'exercice A.1:

$$e^{-\beta H} = e^{-\beta H_1} \otimes e^{-\beta H_2}.$$

Alors, le résultat (A.7) de l'Appendice A entraîne

$$Z(\beta) \stackrel{\text{def.}}{=} \text{Tr}_{\mathcal{F}}(e^{-\beta H}) = \text{Tr}_{\mathcal{H}}(e^{-\beta H_1}) \text{Tr}_{\mathcal{H}}(e^{-\beta H_2})$$

Calculons donc

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{\mathcal{H}}(e^{-\beta H_i}) &\stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | e^{-\beta H_i} | n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \hbar \omega_i (n + \frac{1}{2})} = \\ &= e^{-\beta \hbar \omega_i / 2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \hbar \omega_i n} = \frac{1}{2 \sinh(\beta \hbar \omega_i / 2)} \end{aligned}$$

où pour la dernière égalité on a utilisé  $\sum_{n=0}^{\infty} \xi^n = (1 - \xi)^{-1}$ . Ainsi

$$Z(\beta) = \frac{1}{4 \sinh(\beta \hbar \omega_1 / 2) \sinh(\beta \hbar \omega_2 / 2)}. \quad (0.0.2)$$

## Exercice 4.1

### Rappel: ondes électromagnétiques planes dans le vide

L'exercice proprement dit commence avec les formules bien connues (4.1.7), que nous nous proposons de dériver ici. Nous cherchons des solutions de la forme<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{x}, t) &= \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)} \\ \vec{B}(\vec{x}, t) &= \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)}, \quad \vec{E}_0, \vec{B}_0 \in \mathbb{C}^3\end{aligned}\quad (4.1.1)$$

(nous noterons  $E_0 = |\vec{E}_0| = \sqrt{\vec{E}_0^* \cdot \vec{E}_0}$ , et de même pour  $B_0$ ). Les relations constitutives dans le vide sont posées comme étant linéaires, elles s'écrivent donc<sup>2</sup>

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu_0 \vec{H}.\end{aligned}\quad (4.1.2)$$

Ainsi, les équations de Maxwell s'écrivent dans le vide (en part., sans sources):

$$\left. \begin{aligned}\text{rot } \vec{E} + \partial_t \vec{B} &= 0 \\ \text{div } \vec{B} &= 0 \\ \text{rot } \vec{H} - \partial_t \vec{D} &= 0 \\ \text{div } \vec{D} &= 0\end{aligned}\right\} \xrightarrow{(4.1.1), (4.1.2)} \left\{ \begin{aligned}\vec{k} \wedge \vec{E}_0 - \omega \vec{B}_0 &= 0 \\ \vec{k} \cdot \vec{B}_0 &= 0 \\ c^2 \vec{k} \wedge \vec{B}_0 + \omega \vec{E}_0 &= 0 \\ \vec{k} \cdot \vec{E}_0 &= 0\end{aligned}\right.$$

où nous avons utilisé  $\epsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$ . De la première équation on tire

$$\vec{B}_0 = \frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{E}_0. \quad (4.1.3)$$

On insère ceci dans la troisième et on utilise

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} \quad (4.1.4)$$

<sup>1</sup>Puisque les équations de Maxwell sont réelles, si l'on a une solution complexe, la partie réelle et la partie imaginaire sont chacune une solution. Ainsi, nous pouvons résoudre les équations avec des solutions complexes, ce qui est algébriquement plus simple, puis nous garderons la partie réelle.

<sup>2</sup>On travaille avec des systèmes d'axes orthogonaux, ce qui permet d'oublier les caractéristiques tensorielles des différents champs. Pour approfondir la géométrie du champ électromagnétique, on peut consulter les ouvrages suivants, qui se trouvent à la Bibliothèque Centrale (BC):

G. Fournet, *Electromagnétisme à partir des lois locales* (Masson, Paris, 1979), chapitre 1. Cote BC: DD311.

D. Baldomir, P. Hammond, *Geometry of Electromagnetic Systems* (Clarendon Press, Oxford, 1996). Cote BC: DD578.

pour obtenir

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} \vec{E}_0 = \vec{E}_0 \Rightarrow \omega(\vec{k}) = c|\vec{k}|. \quad (4.1.5)$$

Ce résultat, avec (4.1.3) et  $\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0$  entraîne aussi

$$E_0 = c B_0. \quad (4.1.6)$$

Finalement, on peut introduire la notation

$$\vec{E}_0 = E_0 (\vec{u} + i\vec{v}), \quad \text{avec } \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3, \vec{k} \cdot \vec{u} = \vec{k} \cdot \vec{v} = 0, |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 = 1;$$

en prenant comme solution physique la partie réelle des solutions complexes on arrive à:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{x}, t) &= E_0 [\cos \theta(\vec{x}, t) \vec{u} - \sin \theta(\vec{x}, t) \vec{v}] & \theta(\vec{x}, t) &= \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega(\vec{k})t \\ \vec{B}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{c} \hat{k} \wedge \vec{E}(\vec{x}, t) & \text{avec } \vec{u} \cdot \hat{k} &= \vec{v} \cdot \hat{k} = 0 \\ & & |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 &= 1\end{aligned}\quad (4.1.7)$$

### Densité et densité de courant d'énergie

Comme il est discuté dans le cours, ces quantités sont définies en écrivant le principe de conservation de l'énergie comme une équation de continuité, et en exigeant que ce soient des fonctions de l'état du champ et non pas de ses dérivées. On a obtenu (4.6) et (4.7):

$$\begin{aligned}u &\stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) \\ \vec{S} &\stackrel{\text{déf}}{=} \vec{E} \wedge \vec{H}\end{aligned}$$

d'où, en insérant (4.1.2) et (4.1.7) et après quelques calculs<sup>3</sup>:

$$\frac{u(\vec{x}, t)}{\epsilon_0 E_0^2} = \cos^2 \theta(\vec{x}, t) |\vec{u}|^2 + \sin^2 \theta(\vec{x}, t) |\vec{v}|^2 - \sin 2\theta(\vec{x}, t) \vec{u} \cdot \vec{v}, \quad (4.1.8)$$

$$\vec{S}(\vec{x}, t) = c u(\vec{x}, t) \hat{k}. \quad (4.1.9)$$

Donc la densité du courant d'énergie est un vecteur parallèle à la direction de propagation, dont la norme n'est autre que la densité d'énergie multipliée par la vitesse de propagation.

On définit ensuite la moyenne temporelle de  $f(t)$  de période  $T$  par

$$\langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt.$$

<sup>3</sup>Remarquer que si  $\hat{k} \perp \vec{u}, \vec{v}$ , alors  $|\hat{k} \wedge \vec{u}|^2 = |\hat{k}|^2 |\vec{u}|^2$  et  $(\hat{k} \wedge \vec{u}) \cdot (\hat{k} \wedge \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$ .



Dans notre cas,  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  et il vient

$$\langle u \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}, \quad \langle \vec{S} \rangle = c \langle u \rangle \hat{k}. \quad (4.1.10)$$

### Densité et densité de courant de quantité de mouvement

La densité de quantité de mouvement  $\vec{T}(\vec{x}, t)$  est donnée par (4.8):

$$\vec{T}(\vec{x}, t) \stackrel{\text{déf}}{=} \vec{D} \wedge \vec{B}, \quad (4.1.11)$$

donc dans le vide  $\langle \vec{T} \rangle = c^{-1} \langle u \rangle \hat{k}$ . La densité de courant associée (4.9) devient dans le vide

$$\tau_j^i = u \delta_j^i - \epsilon_0 \delta^{ij} E_j E_l - \frac{1}{\mu_0} \delta_{ij} B^l B^i. \quad (4.1.12)$$

En introduisant la notation  $f_j^i(\vec{a}, \vec{b}) = a_j b^i + (\hat{k} \wedge \vec{a})_j (\hat{k} \wedge \vec{b})^i$ , on a

$$\tau_j^i = u \delta_j^i - 2 \langle u \rangle [\cos^2 \theta f_j^i(\vec{u}, \vec{u}) - \sin \theta \cos \theta (f_j^i(\vec{u}, \vec{v}) + f_j^i(\vec{v}, \vec{u})) + \sin^2 \theta f_j^i(\vec{v}, \vec{v})] \quad (4.1.13)$$

et par conséquent

$$\langle \tau_j^i \rangle = \langle u \rangle [\delta_j^i - (f_j^i(\vec{u}, \vec{u}) + f_j^i(\vec{v}, \vec{v}))].$$

Or, choisissons  $\hat{k} = \hat{e}_3$ : il n'est pas difficile de montrer qu'en fait

$$\langle \tau_3^3 \rangle = \langle u \rangle, \quad \langle \tau_j^i \rangle = 0 \quad \forall (i, j) \neq (3, 3). \quad (4.1.14)$$

Pour ce faire, il suffit de poser  $\vec{u} = \alpha \hat{e}_1$  et  $\vec{v} = \beta \hat{e}_1 + \gamma \hat{e}_2$ , et de calculer les  $\langle \tau_j^i \rangle$  en se souvenant de la condition  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ .

### Pression de radiation

Le rayonnement électromagnétique transporte de la quantité de mouvement, et par conséquent il exerce une force sur un écran. Cette force est appelée *pression de radiation*. Reprenons l'équation de continuité (page 4 du cours): dans le cours,  $-\vec{f}$  est la densité de force exercée par le champ sur l'extérieur; par conséquent, en raison de nos intérêts, nous remplaçons  $-\vec{f}$  par  $\vec{f}$ :

$$f_j = \frac{\partial}{\partial x^i} \tau_j^i + \frac{\partial}{\partial t} T_j;$$

Or, puisque  $(\partial_i \vec{T}) \cdot \partial_i u = 0$  on a

$$\langle f_j \rangle = \frac{\partial}{\partial x^i} \langle \tau_j^i \rangle$$

et par conséquent on a la suite d'égalités (avec le théorème de la divergence)

$$\langle F_j \rangle = \int \langle f_j \rangle d^3 x = \int \text{div} \langle \vec{\tau}_j \rangle d^3 x = \int \langle \vec{\tau}_j \rangle \cdot \vec{d}\sigma \stackrel{(4.1.14)}{=} d\vec{F} = \langle u \rangle d\sigma \hat{k} \quad (4.1.15)$$

c'est-à-dire, la force (la pression) s'exerce seulement dans la direction de propagation, ce qui est intuitif. Cette pression est  $p = \langle u \rangle$ .

### Appendice: comparaison avec la thermodynamique

Considérons  $n$  ondes planes qui se propagent dans la même direction, i.e.  $\vec{k}_i = k_i \hat{e}_z$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ . Le résultat que l'on vient d'obtenir dit que dans ce cas la pression de radiation est la somme des moyennes de densité d'énergie. Ceci est consistant avec l'approche thermodynamique de type corps noir (ondes planes dans une boîte à température constante). Nous reprenons le calcul qui se trouve dans Landau, Lifschitz, *Physique Statistique*, §60, avec les modifications qui suivent du fait que toutes les ondes se propagent dans une seule direction. Dans ce cas, la densité d'états s'écrit  $\frac{L}{\pi} dk = \frac{V}{\pi c A} d\omega$ , avec la surface  $A \perp \hat{e}_z$  supposée fixée. On a alors

$$F = T \sum_n \ln(1 - e^{-\beta \hbar \omega_n}) = T^2 V \frac{k_B}{\pi c A \hbar} \underbrace{\int_0^\infty dx \ln(1 - e^{-x})}_{=-\frac{\pi^2}{6}}$$

et donc

$$F = -\alpha T^2 V, \quad \alpha = \frac{k_B \pi}{6 c A \hbar}. \quad (4.1.16)$$

Il s'en suit que l'entropie et l'énergie interne sont

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = 2\alpha T V, \quad E = F + TS = \alpha T^2 V = -F$$

et finalement la pression est

$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = \alpha T^2 = \frac{E}{V}. \quad (4.1.17)$$

## Exercice 4.2

Expressions pour  $\vec{E}(\vec{x}, t)$  et  $\vec{B}(\vec{x}, t)$

Dans le cas du champ électromagnétique libre sans sources on a:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = -\partial_t \vec{A}(\vec{x}, t), \quad \vec{B}(\vec{x}, t) = \text{rot} \vec{A}(\vec{x}, t). \quad (4.2.1)$$

Dans le cas où l'on a un seul mode le potentiel vecteur  $\vec{A}(\vec{x}, t)$  s'écrit, en combinant (4.32.1), (4.34) et (4.40):

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \left( \frac{h_0}{2L^3 \epsilon_0 \omega(\vec{k})} \right)^{\frac{1}{2}} a_{\vec{k}, \lambda}(0) (\vec{u} + i\vec{v}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega(\vec{k})t)} + c.c.$$

En posant  $a_{\vec{k}, \lambda}(0) = |a_{\vec{k}, \lambda}(0)| e^{i\alpha_0}$  et  $\beta(\vec{x}, t) = \omega(\vec{k})t - \vec{k} \cdot \vec{x} - \alpha_0$  on obtient

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \underbrace{\left( \frac{2h_0}{L^3 \epsilon_0 \omega(\vec{k})} \right)^{\frac{1}{2}} |a_{\vec{k}, \lambda}(0)|}_{A_0} [\cos \beta(\vec{x}, t) \vec{u} + \sin \beta(\vec{x}, t) \vec{v}]$$

En utilisant (4.2.1), et en notant  $\omega(\vec{k})A_0 = E_0$  et  $|\vec{k}|A_0 = E_0/c = B_0$  on arrive à:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = E_0 [\sin \beta(\vec{x}, t) \vec{u} - \cos \beta(\vec{x}, t) \vec{v}] \quad (4.2.2)$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = B_0 [\sin \beta(\vec{x}, t) (\hat{k} \wedge \vec{u}) - \cos \beta(\vec{x}, t) (\hat{k} \wedge \vec{v})] = \frac{1}{c} \hat{k} \wedge \vec{E}(\vec{x}, t) \quad (4.2.3)$$

*Remarque 1:* par rapport à l'exercice 4.1: on a  $\beta + \alpha_0 = -\theta$ ; en posant  $\alpha_0 = -\frac{\pi}{2}$  on retrouve le choix des phases que nous avons fait en gardant la partie réelle comme solution physique.

*Remarque 2:* on peut toujours redéfinir les vecteurs de polarisation de sorte à ce qu'ils soient orthogonaux. En effet, soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  tels que  $\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|^2} = p$ . Alors<sup>1</sup>

$$\sin \beta \vec{u} - \cos \beta \vec{v} = \sin(\beta - \Phi) \vec{u}' - \cos \beta \vec{v}'$$

avec  $\Phi = \text{Arctg}(p)$ ,  $\vec{u}' = \sqrt{1+p^2} \vec{u}$ ,  $\vec{v}' = \vec{v} - p\vec{u}$ , et donc par construction  $\vec{u}' \cdot \vec{v}' = 0$ . A ce stade, nous pouvons choisir les axes:  $\hat{k} = \hat{e}_x$ ,  $\vec{u}' = U\hat{e}_x$  et  $\vec{v}' = V\hat{e}_y$  avec  $U^2 + V^2 = 1$ . Finalement:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}, t) &= E_0 [\sin(\beta(\vec{x}, t) - \Phi) U \hat{e}_x - \cos \beta(\vec{x}, t) V \hat{e}_y] \\ \vec{B}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{c} \hat{k} \wedge \vec{E}(\vec{x}, t). \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Ces formules sont équivalentes à (4.2.2) et (4.2.3). Elles seront utiles pour discuter la polarisation elliptique.

<sup>1</sup>Pour obtenir la relation qui suit, on peut: poser  $\vec{u} = u\hat{e}_u$ ,  $\vec{v} = a\hat{e}_u + b\hat{e}_{\perp u}$ , puis remarquer que l'on a  $u^2 + a^2 + b^2 = 1$  et que par conséquent on peut trouver  $\Theta, \Phi$  tels que  $u = \sin \Theta \cos \Phi$ ,  $a = \sin \Theta \sin \Phi$ ,  $b = \cos \Theta$ . Le cas  $\vec{u} = \vec{0}$  est singulier dans ce calcul, mais lors de l'interprétation (4.2.4) il peut être récupéré.

## Polarisations linéaire, circulaire et elliptique

Puisque nous allons regarder les champs en  $\vec{x}$  fixé, on notera  $\beta(t)$  au lieu de  $\beta(\vec{x}, t)$ . Rappelons ici que la densité d'énergie est

$$u(\vec{x}, t) = \epsilon_0 E_0^2 [\sin^2 \beta(t) |\vec{u}|^2 + \cos^2 \beta(t) |\vec{v}|^2 - \sin 2\beta(t) \vec{u} \cdot \vec{v}], \quad (4.2.5)$$

et que sa valeur moyenne sur le temps  $\langle u \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}$  est indépendante de la polarisation.

- Si (p.ex.)  $\vec{v} = \vec{0}$ , on trouve la *polarisation linéaire*

$$\vec{E}(t) = E_0 \sin \beta(t) \vec{u}, \quad \vec{B}(t) = B_0 \sin \beta(t) \hat{k} \wedge \vec{u}.$$

La direction des vecteurs est indépendante du temps, leur amplitude varie. De plus,  $u(t) = 2\langle u \rangle \sin^2 \beta(t) = \langle u \rangle (1 - \cos 2\beta(t))$ : la densité d'énergie oscille autour de sa valeur moyenne avec pulsation  $2\omega(\vec{k})$ .

- Si  $|\vec{u}|^2 = |\vec{v}|^2 = \frac{1}{2}$  et  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ , on trouve la *polarisation circulaire*. Choisissons  $\hat{k} = \hat{e}_x$ ,  $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_x$  et  $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_y$ ; alors:

$$\vec{E}(t) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} [\sin \beta(t) \hat{e}_x - \cos \beta(t) \hat{e}_y], \quad \vec{B}(t) = \frac{1}{c} \vec{E}(t - \pi/2\omega).$$

Donc cette fois la norme des vecteurs est constante, alors que leur orientation varie avec pulsation  $\omega(\vec{k})$ . Quant à la densité d'énergie,  $u(t) = \langle u \rangle$  pour tout  $t$ : la densité d'énergie est constante dans le temps (et dans l'espace).

- Pour discuter la *polarisation elliptique*, nous prenons les formules (4.2.4). Avec ces notations, les conditions pour la polarisation linéaire sont:  $U = 0$  ou  $V = 0$  ou  $\Phi = n\frac{\pi}{2}$  avec  $n$  impair; les conditions pour la polarisation circulaire sont:  $U = V = \frac{1}{\sqrt{2}}$  et  $\Phi = n\pi$  avec  $n$  entier. Dans tous les autres cas, on obtient des vecteurs  $\vec{E}(\vec{x}, t)$  et  $\vec{B}(\vec{x}, t)$  dont la norme et la direction varient au cours du temps.

En conclusion, avec les notations de (4.2.4) et le choix  $U > V$ : les vecteurs  $\vec{E}(\vec{x}, t)$  et  $\vec{B}(\vec{x}, t)$  décrivent des ellipses de demi-grand axe  $U$  et de demi-petit axe  $V$ . Pour  $\vec{E}(\vec{x}, t)$ , le grand axe est selon  $\hat{e}_x$ , pour  $\vec{B}(\vec{x}, t)$  il est selon  $\hat{e}_y$ . Les deux vecteurs restent orthogonaux au cours de l'évolution.

### Exercice 4.3

L'exercice est totalement intuitif à l'aide des remarques suivantes:

1. Le produit scalaire  $\langle \vec{X} | \vec{Y} \rangle$  dans un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  est lié au produit intérieur  $\vec{X} \cdot \vec{Y}$  par  $\langle \vec{X} | \vec{Y} \rangle = \vec{X}^* \cdot \vec{Y}$ .
2. Toute base orthonormée satisfait la relation de fermeture  $\langle \vec{X} | \vec{Y} \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \vec{X} | \vec{e}_i \rangle \langle \vec{e}_i | \vec{Y} \rangle$ .
3. Le système de vecteurs  $\{ \vec{e}_1(\vec{k}), \vec{e}_2(\vec{k}), \vec{k}/|\vec{k}| \}$  forme une base orthonormée de  $\mathbb{C}^3$  - voir les relations (4.30) du cours.

Alors pour  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ , la relation cherchée n'est autre que la relation de fermeture:

$$\sum_{\lambda=1}^2 (\vec{x} \cdot \vec{e}_\lambda) (\vec{e}_\lambda^* \cdot \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y} - \frac{(\vec{x} \cdot \vec{k})(\vec{k} \cdot \vec{y})}{|\vec{k}|^2}. \quad (4.3.1)$$

En composantes, ceci donne

$$\sum_{i,j=1}^3 x_i \left[ \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} - \sum_{\lambda=1}^2 (e_\lambda)_i (e_\lambda)_j^* \right] y_j = 0, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$$

ce qui est possible si et seulement si l'élément de matrice entre crochets est nul pour tous les couples  $i, j$ ; on obtient ainsi la version matricielle de (4.3.1):

$$\sum_{\lambda=1}^2 (e_\lambda)_i (e_\lambda)_j^* = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}, \quad \forall i, j = 1, 2, 3. \quad (4.3.2)$$

## Exercice 4.4

Les formules suivantes vont être utilisées le long du calcul<sup>1</sup>:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{f} d^3x = \int_{\partial V} \vec{f} \cdot d\vec{\sigma} \quad (4.4.1)$$

$$\operatorname{div}(\vec{f} \wedge \vec{g}) = \vec{g} \cdot \operatorname{rot} \vec{f} - \vec{f} \cdot \operatorname{rot} \vec{g} \quad (4.4.2)$$

**Partie (i): densité de courant**

L'hamiltonien d'interaction  $H_{int} = -\vec{\mu}(t) \cdot \vec{B}(\vec{0}, t)$  peut s'écrire comme:

$$H_{int} = - \int_V d^3x [\vec{\mu}(t) \delta_V(\vec{x})] \cdot \underbrace{\vec{B}(\vec{x}, t)}_{\operatorname{rot} \vec{A}(\vec{x}, t)} \stackrel{(4.4.2), (4.4.1)}{=} - \int_V d^3x \vec{A}(\vec{x}, t) \cdot \operatorname{rot} [\vec{\mu}(t) \delta_V(\vec{x})],$$

l'intégrale sur la surface s'annulant en raison de la périodicité des conditions aux bords<sup>2</sup>.

Par identification on obtient:

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = \operatorname{rot} [\vec{\mu}(t) \delta_V(\vec{x})] \quad (4.4.3)$$

En insérant l'expression pour la densité de courant dans la définition (4.50) des  $j_{\vec{k}, \lambda}(t)$ , on a:

$$j_{\vec{k}, \lambda}(t) = \int_V d^3x \vec{A}_\lambda(\vec{k}, \vec{x})^* \cdot \operatorname{rot} [\vec{\mu}(t) \delta_V(\vec{x})] \stackrel{(4.4.2), (4.4.1)}{=} \int_V d^3x [\vec{\mu}(t) \delta_V(\vec{x})] \cdot \operatorname{rot} (\vec{A}_\lambda(\vec{k}, \vec{x})^*). \quad (4.4.4)$$

Vue la définition (4.34), il est bien connu que  $\operatorname{rot} (\vec{A}_\lambda(\vec{k}, \vec{x})^*) = -i\vec{k} \wedge \vec{A}_\lambda(\vec{k}, \vec{x})^*$ , donc

$$j_{\vec{k}, \lambda}(t) = \frac{-i}{\sqrt{L^3 \epsilon_0}} \vec{\mu}(t) \cdot [\vec{k} \wedge \vec{e}_\lambda(\vec{k})^*]. \quad (4.4.5)$$

Rappelons la dynamique de l'amplitude  $a_{\vec{k}, \lambda}$  en présence de courant (voir "Schéma de calcul pour les exercices 4.4, 4.5"):

$$\dot{a}_{\vec{k}, \lambda} = -i\omega a_{\vec{k}, \lambda} + f_{\vec{k}, \lambda}(t) \implies a_{\vec{k}, \lambda}(t) = a_{\vec{k}, \lambda}(0) e^{-i\omega t} + \int_0^t f_{\vec{k}, \lambda}(s) e^{i\omega(s-t)} ds. \quad (4.4.6)$$

avec  $f_{\vec{k}, \lambda}(t) = i (2h_0\omega(\vec{k}))^{-\frac{1}{2}} j_{\vec{k}, \lambda}(t)$ .

<sup>1</sup> Preuve de (4.4.2):  $\operatorname{div}(\vec{f} \wedge \vec{g}) = \partial_k (\epsilon_{ijk} f_i g_j) = (\epsilon_{kij} \partial_k f_i) g_j - f_i (\epsilon_{kji} \partial_k g_j)$ .

<sup>2</sup> Ici, on peut aussi invoquer le fait que  $\vec{0} \notin \partial V$  et donc sur  $\partial V$  on a  $\delta_V(\vec{x}) = 0$ .

**Parties (ii) et (iii): solution statique pour  $t \leq 0$**

Pour  $t \leq 0$  on cherche une solution statique, donc  $\dot{a}_{\vec{k}, \lambda}(t) = 0$  dans l'équation différentielle (4.4.6), ce qui donne immédiatement

$$a_{\vec{k}, \lambda}(t \leq 0) = -i (2h_0 L^3 \epsilon_0 \omega^3(\vec{k}))^{-\frac{1}{2}} \vec{\mu}(0) \cdot [\vec{k} \wedge \vec{e}_\lambda(\vec{k})^*] \equiv b_{\vec{k}, \lambda}(\vec{\mu}(0)) \quad (4.4.7)$$

En insérant ce résultat et (4.34) dans (4.48.i), puis en utilisant  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b})$ , on trouve

$$\vec{A}(\vec{x}, t \leq 0) = -i \left( \frac{1}{2L^3 \epsilon_0} \right) \sum_{\vec{k}, \lambda} \frac{1}{\omega^2(\vec{k})} \{ \vec{e}_\lambda(\vec{k}) [\vec{e}_\lambda(\vec{k})^* \cdot (\vec{\mu}(0) \wedge \vec{k})] e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + c.c. \}.$$

Remarquons que  $[\vec{e}_\lambda(\vec{k})^* \cdot (\vec{\mu}(0) \wedge \vec{k})]$  est la composante de  $(\vec{\mu}(0) \wedge \vec{k})$  sur  $\vec{e}_\lambda(\vec{k})$ , et puisque  $(\vec{\mu}(0) \wedge \vec{k}) \perp \vec{k}$ , on a:

$$\sum_\lambda \vec{e}_\lambda(\vec{k}) \vec{e}_\lambda(\vec{k})^* \cdot (\vec{\mu}(0) \wedge \vec{k}) = \vec{\mu}(0) \wedge \vec{k}$$

et par conséquent

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = -\frac{1}{2L^3 \epsilon_0 c^2} \vec{\mu}(0) \wedge \sum_{\vec{k}} \frac{i\vec{k}}{k^2} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + c.c. \quad (4.4.8)$$

$$= -\frac{\mu_0}{2} \vec{\mu}(0) \wedge \operatorname{grad}_{\vec{x}} \left( \frac{1}{L^3} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{k^2} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right) + c.c. \quad (4.4.9)$$

En passant à la limite  $L \rightarrow \infty$ , on obtient :

$$\frac{1}{L^3} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{k^2} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}}{k^2} = \frac{1}{4\pi |\vec{x}|}$$

ce qui inséré dans (4.4.9) donne le résultat:

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\mu}(0) \wedge \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \quad \text{pour } t \leq 0. \quad (4.4.10)$$

**Résumons:** le calcul qu'on vient de faire consiste en trois étapes: (1) On commence par insérer l'expression des  $a_{\vec{k}, \lambda}$  dans la définition de  $\vec{A}(\vec{x}, t)$ , et on fait un peu d'algèbre pour arriver à (4.4.8). (2) Le passage de (4.4.8) à (4.4.9) est une astuce permettant de retrouver le résultat physique en évitant un piège mathématique lié au fait que la source est ponctuelle. De fait, si on essayait d'intégrer (4.4.8) on serait confronté à  $\int_0^\infty \cos kx dk$ , ce qui est indéterminé. Un calcul plus rigoureux, qui met clairement en relief l'hypothèse physique sous-jacente, est donné en appendice. (3) Finalement, on passe à la limite  $L \rightarrow \infty$ .

Parties (iv) et (v): évolution pour  $t > 0$

Notons  $\vec{v} = (2L^3 \omega(\vec{k}) h_0 \epsilon_0)^{-\frac{1}{2}} [\vec{k} \wedge \vec{e}_\lambda(\vec{k})^*]$ . La condition initiale (4.4.7) s'écrit

$$a_{\vec{k},\lambda}(0) = -\frac{i}{\omega} \vec{\mu}(0) \cdot \vec{v} \equiv b_{\vec{k},\lambda}(\vec{\mu}(0)) \quad (4.4.11)$$

avec  $\omega = \omega(\vec{k})$ . En intégrant par parties, l'intégrale dans (4.4.6) donne

$$\begin{aligned} e^{-i\omega t} \left( \int_0^t ds e^{i\omega s} \vec{\mu}(s) \right) \cdot \vec{v} &= \frac{-i}{\omega} e^{-i\omega t} \left( e^{i\omega t} \vec{\mu}(t) - \vec{\mu}(0) - \int_0^t ds e^{i\omega s} \dot{\vec{\mu}}(s) \right) \cdot \vec{v} = \\ &= b_{\vec{k},\lambda}(\vec{\mu}(t)) - b_{\vec{k},\lambda}(\vec{\mu}(0)) - \int_0^t ds e^{i\omega(s-t)} b_{\vec{k},\lambda}(\dot{\vec{\mu}}(s)). \end{aligned}$$

Par conséquent la solution générale pour  $t > 0$  s'écrit:

$$a_{\vec{k},\lambda}(t > 0) = b_{\vec{k},\lambda}(\vec{\mu}(t)) - \int_0^t ds e^{i\omega(s-t)} b_{\vec{k},\lambda}(\dot{\vec{\mu}}(s)). \quad (4.4.12)$$

En reprenant le schéma de calcul utilisé pour  $t \leq 0$  (cf. remarque) on trouve:

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\mu}(t) \wedge \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} + \vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t) \quad (4.4.13)$$

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{2} \int_0^t ds \left[ \dot{\vec{\mu}}(s) \wedge \text{grad}_{\vec{x}} \left( \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{|\vec{k}|^2} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega(\vec{k})(t-s))} + c.c. \right) \right]$$

Calculons alors<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{|\vec{k}|^2} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - c|\vec{k}|(t-s))} + c.c. &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{\sin k|\vec{x}|}{k|\vec{x}|} e^{-ikc(t-s)} + c.c. = \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^\infty dk \frac{\sin k|\vec{x}|}{k|\vec{x}|} e^{-ikc(t-s)} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2|\vec{x}|}, \quad |\vec{x}| \geq c(t-s) \\ 0 \quad \text{sinon} \end{array} \right\} \equiv \frac{1}{2|\vec{x}|} \theta(|\vec{x}| - c(t-s)) \end{aligned}$$

et donc

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{2} \int_0^t ds \dot{\vec{\mu}}(s) \wedge \text{grad}_{\vec{x}} \left[ \frac{1}{2|\vec{x}|} \theta(|\vec{x}| - c(t-s)) \right]. \quad (4.4.14)$$

Notons  $x = |\vec{x}|$  et  $\lambda = c(t-s)$ ; alors:

$$\begin{aligned} \text{grad}_{\vec{x}} \left[ \frac{1}{2|\vec{x}|} \theta(|\vec{x}| - \lambda) \right] &= \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{2x} \theta(x - \lambda) \right] = \\ &= -\frac{\vec{x}}{2|\vec{x}|^3} \theta(|\vec{x}| - \lambda) + \frac{\vec{x}}{2|\vec{x}|^2} \delta(|\vec{x}| - \lambda). \end{aligned} \quad (4.4.15)$$

Donc il ne reste plus qu'à insérer cette expression dans (4.4.14), puis le résultat dans (4.4.13).

Il est utile de considérer séparément les deux cas suivants:

<sup>3</sup>Pour la deuxième égalité, remarquer que le c.c. est  $\int_0^\infty dk \frac{\sin kx}{kx} e^{ikc(t-s)}$ , et qu'il suffit de changer  $k$  en  $-k$  pour obtenir  $\int_{-\infty}^0 dk \frac{\sin kx}{kx} e^{-ikc(t-s)}$

• Si  $|\vec{x}| > ct$  alors  $|\vec{x}| > c(t-s)$  pour tout  $s \in [0, t]$ , et donc

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \{ \vec{\mu}(0) - \vec{\mu}(t) \} \wedge \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}. \quad (4.4.16)$$

• Si  $|\vec{x}| \leq ct$ , étant entendu que  $|\vec{x}| \geq 0$ , alors:

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t) &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{t-|\vec{x}|/c}^t ds \left[ \dot{\vec{\mu}}(s) \wedge \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \right] + \frac{\mu_0}{4\pi c} \dot{\vec{\mu}}(t - |\vec{x}|/c) \wedge \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^2} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} [\vec{\mu}(t - |\vec{x}|/c) - \vec{\mu}(t)] \wedge \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} + \frac{\mu_0}{4\pi c} \dot{\vec{\mu}}(t - |\vec{x}|/c) \wedge \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^2}. \end{aligned} \quad (4.4.17)$$

Si l'on insère ces résultats dans (4.4.13) on trouve l'expression finale, qui vu (4.4.10) est valable pour tout  $t$ :

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \begin{cases} \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\mu}(0) \wedge \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}, & |\vec{x}| > ct \\ \frac{\mu_0}{4\pi} [\vec{\mu}(t - \xi) \wedge \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} + \frac{1}{c} \dot{\vec{\mu}}(t - \xi) \wedge \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^2}], & |\vec{x}| \leq ct \end{cases}, \quad \xi = \frac{|\vec{x}|}{c} \quad (4.4.18)$$

### Commentaire physique du résultat

Nous rappelons tout d'abord que  $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\mu} \wedge \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$  est bien le potentiel vecteur dû à un dipole magnétique. En  $t \leq 0$  on a donc simplement le champ du dipole. Pour  $t > 0$  on trouve un potentiel retardé: l'effet du mouvement de  $\vec{\mu}$  est ressenti en un point  $\vec{x}$  seulement si un signal lumineux a eu le temps d'atteindre le lieu  $\vec{x}$  en partant de l'origine. En  $\vec{x}$ , cet effet se compose du champ dipolaire dû à l'orientation de  $\vec{\mu}$  à l'instant  $t - |\vec{x}|/c$ , et d'un champ additionnel dépendant de la dérivée de  $\vec{\mu}$  au même instant.

## Appendice: calcul avec la source étendue

Nous avons travaillé avec une distribution de sources ponctuelle  $d\vec{\mu}_p(\vec{x}, t) = \vec{\mu}_p(\vec{x}, t) d^3x = \vec{\mu}(t)\delta_V(\vec{x})d^3x$ ; les exigences physiques que nous devons respecter sont  $\int_V d\vec{\mu}(\vec{x}, t) = \vec{\mu}(t)$  et  $H_{int} = \int_V d\vec{\mu}(\vec{x}, t) \cdot \vec{B}(\vec{x}, t)$ . La distribution gaussienne (donc étendue)

$$d\vec{\mu}_\epsilon(\vec{x}, t) = \vec{\mu}(t) \frac{1}{(\epsilon\pi)^{3/2}} e^{-\frac{|\vec{x}|^2}{\epsilon}} d^3x \quad (4.4.19)$$

satisfait les exigences physiques et "tend" vers la distribution ponctuelle lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Les calculs sont formellement identiques jusqu'à (4.4.5) exclue, où l'on a:

$$j_{\vec{k}, \lambda}(t) = \frac{-i}{\sqrt{L^3 \epsilon_0}} \vec{\mu}(t) \cdot [\vec{k} \wedge \vec{e}_\lambda(\vec{k})^*] \int_V d^3x \frac{1}{(\epsilon\pi)^{3/2}} e^{-\frac{|\vec{x}|^2}{\epsilon} + i\vec{k} \cdot \vec{x}}.$$

Pour calculer cette intégrale, il faut la décomposer en un produit de trois facteurs de la forme  $\frac{1}{\sqrt{\epsilon\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{\epsilon} + ik_x x} dx$ , compléter le carré, puis utiliser le théorème de Cauchy pour conclure que  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y+i\alpha)^2} dy = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$ . On aboutit à:

$$j_{\vec{k}, \lambda}(t) = \frac{-i}{\sqrt{L^3 \epsilon_0}} \vec{\mu}(t) \cdot [\vec{k} \wedge \vec{e}_\lambda(\vec{k})^*] e^{-\frac{|\vec{k}|^2}{4}}. \quad (4.4.20)$$

On suit ensuite le schéma de calcul jusqu'à trouver l'analogue de (4.4.8), qui, rappelons-le, était le point problématique:

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = -\frac{i\mu_0}{2} \vec{\mu}(0) \wedge \left[ \frac{1}{2\pi^3} \int d^3k \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|^2} e^{-\epsilon \frac{|\vec{k}|^2}{4} + i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right] + c.c. \quad (4.4.21)$$

On passe en coordonnées sphériques pour  $\vec{k}$ , en choisissant comme "axe de référence" la direction de  $\vec{x}$ ; l'intégration angulaire ne présente aucune difficulté, et l'on arrive à

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{2\pi^2} \left( \vec{\mu}(0) \wedge \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \right) \int_0^\infty dk e^{-\epsilon \frac{k^2}{4}} \left( \frac{\sin kx}{k} + x \cos kx \right). \quad (4.4.22)$$

Pour calculer ces intégrales, remarquons que  $\frac{1}{k} \sin kx = \int_0^x dy \cos ky$ . Donc:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dk e^{-\epsilon \frac{k^2}{4}} \cos kx &\stackrel{\text{parité}}{=} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty dk e^{-\epsilon \frac{k^2}{4} + ikx} = \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}} e^{-\frac{x^2}{\epsilon}} \\ \int_0^\infty dk e^{-\epsilon \frac{k^2}{4}} \frac{\sin kx}{k} &= \int_0^x dy \left( \int_0^\infty dk e^{-\epsilon \frac{k^2}{4}} \cos ky \right) = \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}} \int_0^x e^{-\frac{y^2}{\epsilon}} dy = \\ &= \sqrt{\pi} \int_0^{\sqrt{\frac{x}{\epsilon}}} e^{-t^2} dt = \frac{\pi}{2} \operatorname{erf}(x/\sqrt{\epsilon}), \text{ avec } \operatorname{erf}(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi e^{-t^2} dt. \end{aligned}$$

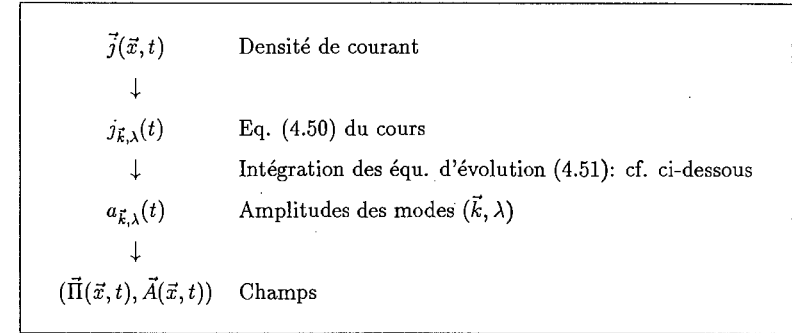
Alors dans (4.4.22):

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{2\pi^2} \left( \vec{\mu}(0) \wedge \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \right) \left( \frac{\pi}{2} \underbrace{\operatorname{erf}(x/\sqrt{\epsilon})}_{\rightarrow 1} + x \underbrace{\sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}} e^{-\frac{x^2}{\epsilon}}}_{\rightarrow 0} \right) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\mu}(0) \wedge \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \quad (4.4.23)$$

ce qui est le résultat obtenu précédemment. En conclusion, il y a une hypothèse physique sous-jacente à ce calcul: nous demandons que le champ associé à une source ponctuelle soit la limite du champ calculé avec une distribution étendue lorsque l'extension de la distribution tend vers 0.

## Schéma de calcul pour les exercices 4.4, 4.5

Schéma de calcul de l'évolution du champ électromagnétique en présence d'une source décrite par la densité de courant  $\vec{j}(\vec{x}, t)$ .



Etant donnée l'équation différentielle (4.51):

$$\dot{a}_{\vec{k}, \lambda}(t) = -i\omega(\vec{k}) a_{\vec{k}, \lambda}(t) + i \frac{j_{\vec{k}, \lambda}(t)}{(2\omega(\vec{k})h_0)^{1/2}}$$

régissant l'évolution des amplitudes des modes, on peut donner immédiatement une solution formelle:

$$a_{\vec{k}, \lambda}(t) = a_{\vec{k}, \lambda}(0) e^{-i\omega(\vec{k})t} + \int_0^t ds \left[ i \frac{j_{\vec{k}, \lambda}(s)}{(2\omega(\vec{k})h_0)^{1/2}} \right] e^{i\omega(\vec{k})(s-t)}.$$

Preuve: en multipliant l'équation différentielle par  $e^{i\omega t}$  on a:

$$\frac{d(a e^{i\omega t})}{dt} = f(t) e^{i\omega t} \implies a(t) e^{i\omega t} - a(0) = \int_0^t f(s) e^{i\omega s} ds.$$

## Exercice 4.5

### Structure du corrigé

Après une brève introduction sur l'atome de Thomson, dans la *1ère étape* on calcule la dynamique du nuage en négligeant les effets de radiation. Dans la *2ème étape* on détermine l'évolution des modes du champ  $a_{\vec{k},\lambda}(t)$  due au mouvement du nuage, en aboutissant à (4.5.6). Les modes donnent les champs, qui à leur tour permettent le calcul de la force de Lorentz sur le nuage (*3ème étape*); dans la limite non-relativiste, cette force consiste de deux contributions séparées, l'une "extérieure" (celle-ci se divisant à son tour en attraction du noyau et force du champ), l'autre "de rayonnement": c'est l'équation (4.5.15). La *4ème étape* est consacrée à l'étude de la force de rayonnement, qui se trouve fournir à son tour deux termes, dits de self-masse et de self-force. On aboutit finalement à l'équation d'Abraham-Lorentz (4.5.22), qui est étudiée dans la *5ème étape*. La *6ème étape* est une vérification de la cohérence du formalisme utilisé. Trois *appendices* présentent dans le détail le développement de certains calculs qu'il serait fastidieux d'insérer dans le texte.

Pour une discussion de ce modèle, cf. F. Rohrlich, *Classical Charged Particles*, Addison-Wesley (1965), en particulier le chap. 2 et les paragraphes 6.6, 6.7 et 6.13.

### Atome de Thomson

L'atome de Thomson<sup>1</sup> est formé d'un noyau ponctuel de charge  $-Q > 0$  fixé à l'origine et d'un nuage électronique rigide de masse  $M_0$  de densité de charge  $\rho(\vec{x}, t)$  donnée par

$$\rho(\vec{x}, t) = \frac{Q}{\pi^{3/2} a^3} \exp\left(-\frac{(\vec{x} - \vec{q}(t))^2}{a^2}\right) \quad (4.5.1)$$

où  $a$  désigne le rayon de l'atome et  $\vec{q}(t)$  est la position instantanée de du centre du nuage électronique. Dans la limite  $a \rightarrow 0$  on retrouve une charge ponctuelle.

<sup>1</sup>Joseph John Thomson (1856-1940), physicien anglais, notamment connu pour la "découverte de l'électron" en 1897.

La transformée de Fourier de la densité de charge intervient à deux reprises dans l'exercice:

$$\int_V e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \rho(\vec{x}, t) d^3x = \frac{Q}{\pi^{3/2} a^3} \prod_{i=1}^3 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dx_i e^{ik_i x_i} \exp\left[-\left(\frac{x_i - q_i(t)}{a}\right)^2\right]}_{\sqrt{\pi} a \exp\left(ik_i q_i - \frac{a^2}{4} k_i^2\right)} = Q e^{i\vec{k}\cdot\vec{q}(t) - \frac{a^2}{4} k^2}$$

ce qui va donner en particulier, en passant par (4.34):

$$\int_V \vec{A}_\lambda(\vec{k}, \vec{x}) \rho(\vec{x}, t) d^3x = Q \exp\left(-\frac{a^2 k^2}{4}\right) \vec{A}_\lambda(\vec{k}, \vec{q}(t)). \quad (4.5.2)$$

### Ière étape: mouvement en négligeant le rayonnement

Si l'on néglige les effets de rayonnement, on peut immédiatement écrire l'équation de Newton pour le centre de charge du nuage dans le champ du noyau:

$$M_0 \frac{d^2}{dt^2} \vec{q}(t) = \vec{F}^{\text{noyau} \rightarrow \text{nuage}} = -\vec{F}^{\text{nuage} \rightarrow \text{noyau}} = Q \vec{E}(\vec{x} = \vec{0}, t) \quad (4.5.3)$$

avec  $\vec{E}(\vec{x}, t)$  le champ électrique engendré par le nuage au point  $\vec{x}$ , qu'on doit calculer. Posons<sup>2</sup>

$$\vec{r} = \vec{r}(\vec{x}) = \vec{x} - \vec{q}, \quad \vec{R} = \vec{r}(\vec{0}) = -\vec{q}.$$

ce qui revient à effectuer un changement d'origine,  $\vec{r}$  réperant la distance par rapport à  $\vec{q}$ , et  $\vec{R}$  étant la position du noyau. Considérons une sphère de rayon  $r$  centrée en  $\vec{q}$ ,  $S$  sa surface,  $V$  son volume. Par le théorème de Gauss

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \int_S \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} &= \int_V d^3r \rho(\vec{x}(\vec{r})) \\ \parallel &\parallel \\ 4\pi \epsilon_0 r E(r) &= \frac{Q}{a^3 \pi^{3/2}} \int_V d^3r e^{-r^2/a^2}. \end{aligned}$$

car par symétrie  $\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \frac{\vec{r}}{r}$ , et puisque  $d\vec{\sigma} = \frac{\vec{r}}{r} d\sigma$ . L'approximation des *faibles mouvements* est  $|\vec{q}| \ll a$ , c'est-à-dire avec nos notations,  $R \ll a$ . Dans ce cas,  $e^{-r^2/a^2} \approx 1$  pour tout  $r \in [0, R]$  et donc  $\int_V d^3r \rho(\vec{x}(\vec{r})) \approx \frac{Q}{a^3 \pi^{3/2}} \frac{4}{3} \pi r^3$ . Il vient alors

$$\vec{E}(\vec{x} = \vec{0}, t) = \vec{E}(\vec{r} = \vec{R}(t)) = \frac{Q}{3 a^3 \pi^{3/2} \epsilon_0} (-\vec{q}(t))$$

et finalement dans (4.5.3):

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{q}(t) = -\left(\frac{Q^2}{3 \epsilon_0 M_0 a^3 \pi^{3/2}}\right) \vec{q}(t) \quad (4.5.4)$$

<sup>2</sup>Nous n'écrivons pas explicitement la dépendance en  $t$ , qui se fait seulement à travers  $\vec{q} = \vec{q}(t)$ .

qui est bien l'équation pour un oscillateur harmonique de pulsation  $\omega_0$ .

*Remarque:* il est clair qu'à la limite de la particule ponctuelle,  $a \rightarrow 0$ , la condition  $|\vec{q}(t)| \ll a$  perd son intérêt. Dans cette limite, on regardera plutôt  $|\vec{q}(t)| \gg a$ . Dans ce cas,  $\int_V d^3r \rho(\vec{r}) \approx Q$  et il vient

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{q}(t) = - \left( \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 M_0} \right) \frac{\vec{q}(t)}{|\vec{q}(t)|^3}$$

qui est une force de type Kepler: la charge ponctuelle a un mouvement de type "planétaire" autour du noyau, résultat bien connu.

## 2ème étape: détermination des champs par le formalisme hamiltonien

En admettant que  $\vec{j}(\vec{x}, t) = \dot{\vec{q}}(t)\rho(\vec{x}, t)$  on a:

$$\begin{aligned} j_{\vec{k},\lambda}(t) &\stackrel{(4.5.0)}{=} \sqrt{\frac{2\omega(\vec{k})}{h_0}} \int_V \vec{A}_\lambda(\vec{k}, \vec{x})^* \cdot \vec{j}(\vec{x}, t) d^3x = \\ &\stackrel{(4.5.2)}{=} \sqrt{\frac{2\omega(\vec{k})}{h_0}} Q e^{-\frac{a^2 k^2}{4}} \dot{\vec{q}}(t) \cdot \vec{A}_\lambda(\vec{k}, \vec{q}(t))^*. \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

En insérant ceci dans la solution formelle de l'équation différentielle (4.51) on obtient, après quelques manipulations évidentes:

$$a_{\vec{k},\lambda}(t) = a_{\vec{k},\lambda}(0) e^{-i\omega(\vec{k})t} + e^{-i\omega(\vec{k})t} \frac{i}{h_0} Q e^{\frac{a^2 k^2}{4}} \int_0^t ds e^{i\omega(\vec{k})s} \vec{A}_\lambda(\vec{k}, \vec{q}(s))^* \cdot \dot{\vec{q}}(s). \quad (4.5.6)$$

Rappelons que l'on a, en vertu de (4.10) et (4.32.i):

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{k},\lambda} a_{\vec{k},\lambda}(t) i\omega(\vec{k}) \vec{A}_\lambda(\vec{k}, \vec{x}) + c.c. - \vec{grad}\Phi(\vec{x}, t) \quad (4.5.7)$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{k},\lambda} a_{\vec{k},\lambda}(t) i\vec{k} \wedge \vec{A}_\lambda(\vec{k}, \vec{x}) + c.c. \quad (4.5.8)$$

où  $\Phi(\vec{x}, t)$  est le potentiel électrostatique instantané du système:

$$\Phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int d^3y \frac{\rho(\vec{y}, t)}{|\vec{x} - \vec{y}|} - \frac{Q}{|\vec{x}|} \right\}. \quad (4.5.9)$$

## 3ème étape: résultante des forces sur le nuage électronique

La résultante des forces de Lorentz s'écrit

$$\vec{F}(t) = \int_V \rho(\vec{x}, t) \left[ \vec{E}(\vec{x}, t) + \dot{\vec{q}}(t) \wedge \vec{B}(\vec{x}, t) \right] d^3x. \quad (4.5.10)$$

On insère (4.5.7) et (4.5.8) pour trouver au bout du calcul

$$\vec{F}(t) = \sum_{\vec{k},\lambda} Q e^{-\frac{a^2 k^2}{4}} a_{\vec{k},\lambda}(t) \left[ i\omega(\vec{k}) \vec{A}_\lambda(\vec{k}, \vec{q}) + \dot{\vec{q}} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{A}_\lambda(\vec{k}, \vec{q})) \right] + c.c. - \vec{grad}_{\vec{q}} V(\vec{q}) \quad (4.5.11)$$

avec  $\vec{q} = \vec{q}(t)$ . La seule partie non triviale du calcul est celle qui permet d'écrire le terme issu du potentiel scalaire  $\Phi(\vec{x}, t)$  sous la forme  $-\vec{grad}_{\vec{q}} V(\vec{q})$ , avec

$$V(\vec{q}(t)) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{2} \int d^3x d^3y \frac{\rho(\vec{x}, t)\rho(\vec{y}, t)}{|\vec{x} - \vec{y}|} - Q \int d^3x \frac{\rho(\vec{x}, t)}{|\vec{x}|} \right\} = \quad (4.5.12)$$

$$= \frac{Q^2}{4\pi^{3/2}\epsilon_0 a} \left[ \frac{1 - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{2}{3} \left( \frac{\vec{q}(t)}{a} \right)^2 + O\left( \frac{\vec{q}(t)}{a} \right)^4 \right]. \quad (4.5.13)$$

Cette partie est détaillée dans l'appendice 1.

Or, si l'on s'intéresse à la limite non relativiste  $|\dot{\vec{q}}(t)| \ll c$ , on peut négliger le terme  $\dot{\vec{q}} \wedge \vec{k}$  devant le terme  $c|\vec{k}|$  dans l'expression de la force (4.5.11); cela revient à négliger l'action de  $\vec{B}$ . Il nous reste donc:

$$\vec{F}(t) = \sum_{\vec{k},\lambda} Q e^{-\frac{a^2 k^2}{4}} \left[ i\omega(\vec{k}) a_{\vec{k},\lambda}(t) \vec{A}_\lambda(\vec{k}, \vec{q}(t)) + c.c. \right] - \vec{grad}_{\vec{q}} V(\vec{q}(t)), \quad |\dot{\vec{q}}(t)| \ll c. \quad (4.5.14)$$

Finalement, on peut reprendre l'expression pour les amplitudes des modes (4.5.6), pour trouver:

$$\vec{F}(t) = \vec{F}_{ext}(t) + \vec{F}_{ray}(t) \quad (4.5.15)$$

avec

$$\vec{F}_{ext}(t) = Q \sum_{\vec{k},\lambda} e^{-\frac{a^2 k^2}{4}} \omega(\vec{k}) \left[ i a_{\vec{k},\lambda}(0) \vec{A}_\lambda(\vec{k}, \vec{q}(t)) + c.c. \right] - \vec{grad}_{\vec{q}} V(\vec{q}(t)) \quad (4.5.16)$$

$$\vec{F}_{ray}(t) = -\frac{Q^2}{h_0} \sum_{\vec{k},\lambda} e^{-\frac{a^2 k^2}{4}} \omega(\vec{k}) \left[ \vec{A}_\lambda(\vec{k}, \vec{q}(t)) \left( \int_0^t ds e^{i\omega(\vec{k})(s-t)} \vec{A}_\lambda(\vec{k}, \vec{q}(s))^* \cdot \dot{\vec{q}}(s) \right) + c.c. \right]$$

Résumons-nous: en supposant connue l'évolution temporelle du nuage électronique, nous avons calculé par le formalisme hamiltonien les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  dus à ce mouvement et à la présence du noyau; de là nous avons tiré la force de Lorentz ressentie par le nuage. L'approximation non relativiste nous a permis de séparer deux termes dans la force: la *force extérieure*, qui contient l'effet du noyau et du champ électromagnétique initialement présent; et la *force de rayonnement*, effet sur le nuage des modifications induites dans le champ



par le mouvement du nuage lui-même. Notons aussi que la présence du noyau se retrouve exclusivement dans la force extérieure; i.e., toute la discussion sur le rayonnement est en fait valable pour n'importe quelle charge qui rayonne, indépendamment du potentiel dans lequel cette charge est plongée.

4ème étape: passage à la limite pour  $\vec{F}_{ray}(t)$

Avec la forme (4.34) des  $\vec{A}_\lambda(\vec{k}, \vec{q}(t))$  on peut récrire

$$\vec{F}_{ray}(t) = -\frac{Q^2}{2\epsilon_0 L^3} \sum_{\vec{k}, \lambda} e^{-\frac{a^2 k^2}{2}} \vec{e}_\lambda(\vec{k}) \left[ \vec{e}_\lambda(\vec{k})^* \cdot \left( \int_0^t ds \dot{\vec{q}}(s) e^{i[\vec{k} \cdot (\vec{q}(t) - \vec{q}(s)) - \omega(\vec{k})(t-s)]} \right) \right].$$

Or, en reprenant un résultat de l'ex. 4.3:

$$\sum_\lambda \vec{e}_\lambda(\vec{k}) \left[ \vec{e}_\lambda(\vec{k})^* \cdot \vec{v} \right] = \vec{v} - (\hat{k} \cdot \vec{v}) \hat{k};$$

par ailleurs,

$$\frac{1}{L^3} \sum_{\vec{k}} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k.$$

Cela donne, après passage aux coordonnées sphériques et quelques réarrangements:

$$\vec{F}_{ray}(t) = -\frac{Q^2}{16\epsilon_0 \pi^3} \int d\Omega(\vec{k}) \left[ \int_0^t ds \left( \dot{\vec{q}}(s) - (\hat{k} \cdot \dot{\vec{q}}(s)) \hat{k} \right) \left( \int_0^\infty k^2 e^{ik\xi - \frac{a^2 k^2}{2}} dk + c.c. \right) \right] \quad (4.5.17)$$

avec

$$\xi = \xi(\hat{k}, t, s) = \hat{k} \cdot (\vec{q}(t) - \vec{q}(s)) - c(t-s) = \left( \hat{k} \cdot \frac{\vec{q}(t) - \vec{q}(s)}{c(t-s)} - 1 \right) c(t-s) \approx -c(t-s)$$

où la dernière relation suit de l'approximation non-relativiste  $\left| \frac{\vec{q}(t) - \vec{q}(s)}{c(t-s)} \right| \ll 1$ . Or, on peut calculer:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty k^2 e^{ik\xi - \frac{a^2 k^2}{2}} dk + c.c. &= -\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int_0^\infty e^{ik\xi - \frac{a^2 k^2}{2}} dk + c.c. = -\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int_{-\infty}^\infty e^{ik\xi - \frac{a^2 k^2}{2}} dk = \\ &= -\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \frac{\sqrt{2\pi}}{a} e^{-\xi^2/2a^2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{a^3} \left( 1 - \frac{\xi^2}{a^2} \right) e^{-\xi^2/2a^2}. \end{aligned}$$

Si l'on remet ceci dans (4.5.17) on obtient, dans l'approximation non-relativiste:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ray}(t) &= -\frac{Q^2}{16\epsilon_0 \pi^3} \frac{\sqrt{2\pi}}{a^3} \int_0^t ds \left( \int d\Omega(\vec{k}) \left( \dot{\vec{q}}(s) - (\hat{k} \cdot \dot{\vec{q}}(s)) \hat{k} \right) \right) \left( 1 - \frac{c^2(t-s)^2}{a^2} \right) e^{-c^2(t-s)^2/2a^2} = \\ &= -\frac{Q^2}{\epsilon_0 a^3} \frac{1}{3\sqrt{2\pi^3}} \int_0^t \dot{\vec{q}}(s) \left( 1 - \frac{c^2(t-s)^2}{a^2} \right) e^{-c^2(t-s)^2/2a^2} ds \quad (4.5.18) \end{aligned}$$

où nous avons utilisé

$$\int d\Omega(\vec{k}) (\vec{v} - (\hat{k} \cdot \vec{v}) \hat{k}) = \frac{8\pi}{3} \vec{v}.$$

Le développement de  $\dot{\vec{q}}(s)$  en puissances de  $(s-t)$ :

$$\dot{\vec{q}}(s) = \dot{\vec{q}}(t) + \ddot{\vec{q}}(t)(s-t) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \dot{\vec{q}}^{(n+1)}(t) \frac{(s-t)^n}{n!}$$

inséré dans (4.5.18) donne (avec changement de variable  $x = \frac{c}{a}s$ ):

$$\vec{F}_{ray}(t) = -\frac{Q^2}{16\epsilon_0 \pi^3} \frac{\sqrt{2\pi}}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \dot{\vec{q}}^{(n+1)}(t)}{n! c^{n+1}} a^n g_n(t) \quad (4.5.19)$$

$$\text{avec } g_n(t) = \int_0^{ct/a} x^n (1-x^2) e^{-x^2/2} dx. \quad (4.5.20)$$

Si  $t \gg a/c$  on aura  $g_n(t) \approx g_n$  avec (cf appendice 2)  $g_0 = 0$ ,  $g_1 = -1$ ,  $g_2 = -\sqrt{2\pi}$  etc. et donc:

$$\vec{F}_{ray}(t) = \frac{Q^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \left\{ -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{c}{a} \dot{\vec{q}}(t) + \ddot{\vec{q}}(t) + O(a/c) \right\}.$$

En conclusion:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{F}_{ray}(t) &= -\delta M \ddot{\vec{q}}(t) + \eta_0 \dot{\vec{q}}(t) + O(a) \quad , \quad t \gg \frac{a}{c} \\ \delta M &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{Q^2}{6\pi \epsilon_0 a c^2} \quad , \quad \eta_0 = \frac{Q^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \end{aligned}} \quad (4.5.21)$$

On voit donc que la force de rayonnement donne lieu à deux contributions: la *self-masse*  $\delta M$ , qui contient la partie divergente dans la limite  $a \rightarrow 0$ ; et la *self-force*, qui fait apparaître la troisième dérivée de la position.

5ème étape: considérations physiques

Dans la suite, nous allons poser  $M = M_0 + \delta M$  et décréter que  $M$  est la masse telle qu'on la mesure. Cet argument, qui permet de s'affranchir de divergences, est fondé sur une procédure mathématique rigoureuse dite *renormalisation*. L'équation d'évolution pour  $\vec{q}(t)$  s'écrit:

$$\boxed{\begin{aligned} M \ddot{\vec{q}}(t) - M \tau \ddot{\vec{q}}(t) &= \vec{F}_{ext}(t) \\ M &= M_0 + \delta M \quad , \quad \tau = \frac{Q^2}{6\pi \epsilon_0 M c^3} \quad , \quad t \gg \frac{a}{c} \\ \vec{F}_{ext}(t) &= \vec{F}_{ext}^{champ}(t) + \vec{F}_{ext}^{noyau}(t) \end{aligned}} \quad (4.5.22)$$

Cette équation porte le nom d'*équation d'Abraham-Lorentz*. Dans l'exercice 2.3 on dérive l'analogue relativiste (équation de Lorentz-Dirac).

Reprenons (4.5.16). L'attraction du noyau, en se restreignant aux mouvements de faible amplitude  $|\tilde{q}(t)| \ll a$ , donc en utilisant le développement (4.5.13) de  $V$ , devient:

$$\vec{F}_{ext}^{noyau}(t) = -\frac{Q^2}{3\pi^{3/2}\epsilon_0 a^3} \tilde{q}(t), \quad |\tilde{q}(t)| \ll a \quad (4.5.23)$$

Il est montré à la fin de l'appendice 1 que dans l'autre limite  $|\tilde{q}(t)| \gg a$ , qui devient significative si  $a \rightarrow 0$ , on retrouve la force de Coulomb entre deux particules ponctuelles  $\frac{(-Q)Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ .

Pour la contribution du champ, si on prend la limite  $L \rightarrow \infty$  et on insère la forme explicite des  $\vec{A}_\lambda(\vec{k}, \vec{q}(t))$  il vient

$$\vec{F}_{ext}^{champ}(t) = Q \sqrt{\frac{h_0}{(2\pi)^3 \epsilon_0}} \sum_\lambda \int d^3k e^{-\frac{a^2 k^2}{4}} \sqrt{\frac{\omega(\vec{k})}{2}} [i a_{\vec{k},\lambda}(0) e^{-i\omega(\vec{k})t} \vec{e}_\lambda(\vec{k}) + c.c.] \quad (4.5.24)$$

*Le temps de freinage  $\tau$*

Nous avons défini auparavant le temps  $\tau = \frac{Q^2}{6\pi\epsilon_0 M c^3}$ , qui joue le rôle de temps de freinage. En utilisant le "rayon classique de l'électron  $r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2}$ " on trouve, pour un nuage avec  $N$  électrons ( $Q = Ne$ ,  $M = Nm_e$ ):

$$\tau = \frac{2}{3} N \frac{r_0}{c}.$$

$\frac{r_0}{c}$  est le temps que la lumière emploie pour "traverser un électron". Numériquement,  $r_0 \approx 2.84 \times 10^{-15} m$  et donc  $\tau \approx 10^{-23} s$ .

*Régime permanent*

Pour discuter le régime permanent, on peut passer en transformée de Fourier sur le temps.

Soit  $A = \frac{Q^2}{3\pi^{3/2}\epsilon_0 a^3}$ :

$$M\ddot{\tilde{q}}(t) - M\tau\ddot{\tilde{q}}(t) + A\tilde{q}(t) = \vec{F}_{ext}^{champ}(t)$$

$\Downarrow$

$$[-M\omega^2 - iM\tau\omega^3 + A]\tilde{q}(\omega) = \vec{F}(\omega)$$

et par conséquent<sup>3</sup>

$$\tilde{q}(\omega) = \frac{1}{M} \frac{\vec{F}(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\tau\omega^3}, \quad \omega_0^2 = \frac{A}{M} = \frac{Q^2}{3\epsilon_0 M a^3 \pi^{3/2}}. \quad (4.5.25)$$

En comparant avec (4.5.4), on voit que  $M$  remplace  $M_0$  dans la formule de la pulsation, dans le cas du rayonnement. Les contributions principales de cette fonction  $\tilde{q}(\omega)$  se font au

voisinage des poles, i.e. des valeurs complexes de  $\omega$  telles que  $\omega^2 = \omega_0^2 - i\tau\omega^3$ . On peut montrer (cf. appendice 3) que, pour  $\tau$  petit,  $\tilde{q}(\omega)$  décrit un système résonant à la fréquence  $\omega_0$  avec une largeur de raie  $\Delta\omega = \omega_0^2\tau$ .

## 6ème étape: cohérence du formalisme

Nous avons travaillé avec deux équations d'évolution: l'équation (4.51) avec  $j_{\vec{k}\lambda}(t)$  donné par (4.5.5), pour les amplitudes des modes du champ; et l'équation de Newton  $M_0\ddot{\tilde{q}}(t) = \vec{F}(t)$ , avec  $\vec{F}(t)$  donnée par (4.5.10), pour le nuage électronique de l'atome. Pour que notre démarche soit cohérente, il faut finalement exhiber un Hamiltonien qui régit l'évolution du système global "atome + rayonnement", i.e., un Hamiltonien dont les équations canoniques rendent nos équations d'évolution. Nous allons vérifier qu'un tel Hamiltonien existe et s'écrit

$$H(p., q., \vec{p}, \vec{q}) = H_V^{libre}(p., q.) + \frac{(\vec{p} - \vec{W}(\vec{q}, p., q.))^2}{2M_0} + V(\vec{q}) \quad (4.5.26)$$

avec  $V(\vec{q})$  donné par (4.5.12) et

$$\begin{aligned} \vec{W}(\vec{q}, p., q.) &= \sum_{\vec{k}, \lambda} a_{\vec{k}, \lambda}(t) \int \rho(\vec{x}, t) \vec{A}_\lambda(\vec{k}, \vec{x}) d^3x + c.c. = \\ &\stackrel{(4.5.2)}{=} Q \sum_{\vec{k}, \lambda} e^{-\frac{a^2 k^2}{4}} [a_{\vec{k}, \lambda}(t) \vec{A}_\lambda(\vec{k}, \vec{q}(t)) + c.c.] = \\ &\stackrel{(4.41)}{=} Q \sum_{\vec{k}, \lambda} e^{-\frac{a^2 k^2}{4}} \sqrt{\frac{2}{h_0 \omega(\vec{k})}} [p_{\vec{k}, \lambda} \text{Re} \vec{A}_\lambda(\vec{k}, \vec{q}) + \omega(\vec{k}) q_{\vec{k}, \lambda} \text{Im} \vec{A}_\lambda(\vec{k}, \vec{q})] \end{aligned} \quad (4.5.27)$$

Les équations canoniques pour l'atome sont:

$$\begin{aligned} \vec{grad}_{\vec{p}} H &= \frac{1}{M_0} (\vec{p} - \vec{W}(\vec{q}, p., q.)) \equiv \dot{\vec{q}} \implies \dot{\vec{p}} = M_0 \ddot{\vec{q}} + \partial_t \vec{W}(\vec{q}, p., q.) \\ \vec{grad}_{\vec{q}} H &= -\frac{1}{M_0} \underbrace{(\vec{p} - \vec{W}(\vec{q}, p., q.))}_{\dot{\vec{q}}} \text{div}_{\vec{q}} \vec{W}(\vec{q}, p., q.) + \vec{grad}_{\vec{q}} V(\vec{q}) \equiv -\dot{\vec{p}} \end{aligned}$$

ce qui donne

$$M_0 \ddot{\vec{q}} = -\partial_t \vec{W}(\vec{q}, p., q.) + \dot{\vec{q}} \text{div}_{\vec{q}} \vec{W}(\vec{q}, p., q.) - \vec{grad}_{\vec{q}} V(\vec{q}) \equiv \vec{F}(t).$$

Il faut donc vérifier que cette expression de la force coïncide avec la force de Lorentz (4.5.10). Cela relève de calculs sans difficultés, une fois qu'on a remplacé  $\vec{A}_\lambda(\vec{k}, \vec{q}(t))$  par son expression (4.34) dans (4.5.27).

<sup>3</sup>La forme explicite de  $\vec{F}(\omega)$  ne joue pas de rôle dans la discussion qui suit.

Pour vérifier les *équations canoniques pour le champ*, en vertu de (4.52) et de (4.54 i) il suffit de vérifier que

$$\begin{aligned}\frac{\partial (H - H_V^{libre})}{\partial p_{\vec{k}\lambda}} &= \dot{\vec{q}} \cdot \frac{\partial \vec{W}(\vec{q}, p., q.)}{\partial p_{\vec{k}\lambda}} \equiv -\frac{\text{Re} j_{\vec{k}\lambda}}{\omega(\vec{k})} \\ \frac{\partial (H - H_V^{libre})}{\partial q_{\vec{k}\lambda}} &= \dot{\vec{q}} \cdot \frac{\partial \vec{W}(\vec{q}, p., q.)}{\partial q_{\vec{k}\lambda}} \equiv \text{Im} j_{\vec{k}\lambda}\end{aligned}$$

où nous avons utilisé  $\frac{1}{M_0}(\vec{p} - \vec{W}(\vec{q}, p., q.)) = \dot{\vec{q}}$ , et où  $j_{\vec{k}\lambda}$  est donné par (4.5.5). La vérification est presque immédiate en utilisant (4.5.28).

### Remarques conclusives

Dans cet exercice on a étudié la dynamique du système “particule ponctuelle + rayonnement”. Comme il est dit dans le cours (fin du paragraphe 4.3), cette théorie souffre de graves défauts structurels: la nécessité de redéfinir la masse pour tenir compte de la “self-masse” divergente; et l’apparition d’une “self-force” qui dépend de la dérivée troisième de la position, ce qui est contraire à la structure habituelle d’une équation de Newton. Dans l’appendice 4, on discute rapidement la prédiction d’une “pre-accélération”, qui fait que cette théorie est en fait non-causale (sur des temps qui sont certes de l’ordre du rayon de l’électron divisé par la vitesse de la lumière). On rappelle ici la remarque déjà faite auparavant: l’apparition de la self-masse et de la self-force ne dépend pas des détails du modèle (ici, l’électron dans le champ coulombien du noyau).

Cela dit, il est aussi important de signaler que l’équation d’Abraham-Lorentz (4.5.22) est très précise dans ses prédictions: en fait, elle est utilisée avec succès dans la physique des accélérateurs.

### Appendice 1: expression pour le potentiel scalaire

Afin d’alléger la notation, nous omettons la dépendance temporelle et la constante  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ , et nous notons  $q = |\vec{q}|$ . Soit  $\Phi(\vec{x})$  le potentiel électrostatique instantané du système:

$$\Phi(\vec{x}) = \int d^3y \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} - \frac{Q}{|\vec{x}|}. \quad (4.5.29)$$

et soit  $V(\vec{q})$  défini par  $\int d^3x \Phi(\vec{x}) \rho(\vec{x})$  soit explicitement

$$V(\vec{q}) = \frac{1}{2} \int d^3x d^3y \frac{\rho(\vec{x}) \rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} - Q \int d^3x \frac{\rho(\vec{x})}{|\vec{x}|}. \quad (4.5.30)$$

Nous nous proposons de montrer les deux relations suivantes (avec  $\partial_{\vec{q}} = \vec{g} \text{rad}_{\vec{q}}$ ):

$$\partial_{\vec{q}} V(\vec{q}) = \int d^3x \rho(\vec{x}) \partial_{\vec{x}} \Phi(\vec{x}) \quad (4.5.31)$$

$$V(\vec{q}) = \frac{Q^2}{a\sqrt{\pi}} \left[ \frac{1 - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{2}{3} \left(\frac{q}{a}\right)^2 + O\left(\frac{q}{a}\right)^4 \right] \quad (4.5.32)$$

Commençons par montrer l’éq. (4.5.31):

$$\partial_{\vec{q}} V(\vec{q}) = \frac{1}{2} \int d^3x d^3y \left[ (\partial_{\vec{q}} \rho(\vec{x})) \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} + \frac{\rho(\vec{x})}{|\vec{x} - \vec{y}|} (\partial_{\vec{q}} \rho(\vec{y})) \right] - \int d^3x (\partial_{\vec{q}} \rho(\vec{x})) \frac{Q}{|\vec{x}|}$$

Comme  $\partial_{\vec{q}} \rho(\vec{x}) = -\partial_{\vec{x}} \rho(\vec{x})$ , on en déduit

$$\begin{aligned}\partial_{\vec{q}} V(\vec{q}) &= - \int d^3x (\partial_{\vec{x}} \rho(\vec{x})) \Phi(\vec{x}) = \\ &= \int d^3x \rho(\vec{x}) (\partial_{\vec{x}} \Phi(\vec{x})) - \int d^3x \partial_{\vec{x}} (\rho(\vec{x}) \Phi(\vec{x})).\end{aligned}$$

Pour obtenir (4.5.31), il suffit de remarquer que la deuxième intégrale est nulle. En effet, calculons pour la première composante (avec des notations évidentes):

$$\int d^3x \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2, x_3) = \int dx_2 dx_3 [f(X_1^+, x_2, x_3) - f(X_1^-, x_2, x_3)]$$

et dans notre cas  $\lim_{X \rightarrow \pm\infty} f(X, x_2, x_3) = 0$ .

Pour la dérivation de (4.5.32) on introduit la *fonction erreur*, qui n’est autre que l’intégrale de la gaussienne normalisée:

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt;$$

on a donc  $\text{erf}(x) \rightarrow 1$  pour  $x \rightarrow \infty$ . Lorsque  $x \ll 1$  on a:

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!} x^{2n+1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} x \left( 1 - \frac{1}{3} x^2 + O(x^4) \right). \quad (4.5.33)$$

La partie fastidieuse du calcul consiste à montrer que:

$$\frac{V(\vec{q})}{Q^2} = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{q} \operatorname{erf}\left(\frac{q}{a}\right); \quad (4.5.34)$$

une fois cette formule établie, (4.5.32) suit immédiatement en utilisant (4.5.33) pour  $x = \frac{z}{a}$ . Il nous reste donc à établir (4.5.34). Il s'agit d'insérer dans (4.5.30) la formule explicite de  $\rho$ . Nous ne discutons pas les égalités "triviales" (changement de variable évident, intégrations par parties. . .). Notons  $\vec{x} = \vec{v}$ . On a:

$$\begin{aligned} \frac{V(\vec{q})}{Q^2} &= \frac{1}{2\pi^3 a} \int d^3x d^3y \frac{e^{-(x^2+y^2)}}{|\vec{x}-\vec{y}|} - \frac{e^{-v^2}}{\pi^{3/2} a} \int d^3x \frac{e^{-x^2+2\vec{x}\cdot\vec{v}}}{|\vec{x}|} = \\ &= \frac{1}{2\pi^3 a} \int d^3x e^{-2x^2} \int d^3z \frac{e^{-x^2+2\vec{x}\cdot\vec{z}}}{|\vec{z}|} - \frac{e^{-v^2}}{\pi^{3/2} a} \int d^3x \frac{e^{-x^2+2\vec{x}\cdot\vec{v}}}{|\vec{x}|} = \\ &= \frac{1}{2\pi^3 a} \left( \int d^3x e^{-2x^2} F(\vec{x}) \right) + \frac{e^{-v^2}}{\pi^{3/2} a} F(\vec{v}). \end{aligned} \quad (4.5.35)$$

Calculons alors  $F(\vec{u})$ :

$$\begin{aligned} F(\vec{u}) &\equiv \int d^3x \frac{e^{-x^2+2\vec{x}\cdot\vec{u}}}{|\vec{x}|} = \int_0^\infty r^2 \frac{e^{-r^2}}{r} dr \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin\theta e^{2ru\cos\theta}}_{2\pi \frac{sh(2ru)}{ru}} = \\ &= \frac{2\pi}{u} \int_0^\infty dr e^{-r^2} sh(2ru) = \frac{\pi}{u} e^{u^2} \int_0^\infty dr \left( e^{-(r-u)^2} - e^{-(r+u)^2} \right) = \\ &= \frac{\pi}{u} e^{u^2} \left[ \int_{-u}^{+\infty} e^{-r^2} dr - \int_u^{+\infty} e^{-r^2} dr \right] = \frac{\pi}{u} e^{u^2} \int_{-u}^{+u} e^{-r^2} dr = \frac{\pi^{3/2}}{u} e^{u^2} \operatorname{erf}(u). \end{aligned}$$

En insérant ce résultat dans (4.5.35) on obtient

$$\frac{aV(\vec{q})}{Q^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty r e^{-r^2} \operatorname{erf}(r) dr - \frac{1}{v} \operatorname{erf}(v)$$

Puisque  $v = \frac{q}{a}$ , le deuxième terme est bien le deuxième terme de (4.5.34); il reste seulement:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty r e^{-r^2} \operatorname{erf}(r) dr = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-r^2} \operatorname{erf}(r) \Big|_0^\infty + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-2r^2} dr = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

ce qui conclut le calcul.

Notons pour conclure que nous avons obtenu, en vertu de (4.5.34) et en reintroduisant les constantes:

$$\vec{\operatorname{grad}}V(\vec{q}(t)) = -\frac{(-Q)Q}{4\pi\epsilon_0} \vec{\operatorname{grad}}\left(\frac{\operatorname{erf}(\vec{q}(t)/a)}{|\vec{q}(t)|}\right). \quad (4.5.36)$$

En particulier, si  $a \rightarrow 0$  on retrouve l'attraction de Coulomb entre deux charges ponctuelles.

## Appendice 2: expression des $g_n$

On reprend (4.5.20) pour  $ct/a \rightarrow \infty$  et on utilise la fonction Gamma d'Euler

$$\Gamma(x) \equiv \int_0^\infty y^{x-1} e^{-y} dy, \quad x > 0.$$

On rappelle que la fonction  $\Gamma$  a les propriétés suivantes:  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ , et  $\Gamma(m+1) = m!$  pour  $m \in \mathbb{N}$ . Il vient:

$$\begin{aligned} g_n &\equiv \int_0^\infty x^n (1-x^2) e^{-x^2/2} dx = (\sqrt{2})^{n-1} \int_0^\infty y^{(n-1)/2} (1-2y) e^{-y} dy = \\ &= (\sqrt{2})^{n-1} \left[ \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) - 2\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right) \right] = -n(\sqrt{2})^{n-1} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \end{aligned}$$

ce qui donne bien, avec  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ :  $g_0 = 0$ ,  $g_1 = -1$ ,  $g_2 = -\sqrt{2\pi}$ .

## Appendice 3: raie lorentzienne

Nous devons étudier une expression de la forme

$$\frac{f(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\tau\omega^3} \quad (4.5.37)$$

au voisinage d'un pôle. Soit alors  $\Omega$  tel que

$$\omega_0^2 - \Omega^2 - i\tau\Omega^3 = 0. \quad (4.5.38)$$

On admettra que la fonction  $f$  est régulière en  $\Omega$ . Posons  $\omega = \Omega + \delta\omega$ :

$$\omega_0^2 - \omega^2 - i\tau\omega^3 = (2\Omega - 3i\tau\Omega^2) \delta\omega + O(\delta\omega^2);$$

et par conséquent, en remplaçant  $\delta\omega$  par  $\omega - \Omega$ :

$$\frac{f(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\tau\omega^3} \sim \frac{g(\Omega)}{\omega - \Omega} \quad (4.5.39)$$

avec  $g(\Omega) = f(\Omega) (2\Omega - 3i\tau\Omega^2)^{-1}$ . Il reste à estimer  $\Omega$ . Intuitivement, vue (4.5.38), plus  $\tau$  est petit, plus  $\Omega$  est proche de  $\omega_0$ . Posons alors  $\Omega = \omega_0 + \lambda\tau + O(\tau^2)$ ; en insérant ceci dans (4.5.38) on trouve que  $\lambda = -i\frac{\omega_0^2}{2}$ ; donc finalement

$$\Omega = \omega_0 - i\frac{\omega_0^2\tau}{2}. \quad (4.5.40)$$

On rappelle finalement qu'une fonction ayant un pôle de la forme  $\frac{1}{\omega - \omega_0 + i\Gamma}$  décrit une résonance à la fréquence  $\omega_0$ , de largeur  $2\Gamma$ .

#### Appendice 4: la pre-accélération

Considérons un champ extérieur nul pour  $t < 0$  et enclenché soudain en  $t = 0$ , constant ensuite. On peut montrer que l'équation d'Abraham-Lorentz prédit que la particule se met en mouvement *avant* l'instant où le champ est enclenché! En fait, le temps d'avance est de l'ordre du rapport entre le rayon de l'électron et la vitesse de la lumière. Dans une image classique, on pourrait dire que dès que la "surface" de l'électron rencontre la marche de potentiel, elle transmet cette information jusqu'au centre de masse à la vitesse de la lumière. Puisque l'électron se déplace moins vite que la lumière, l'information arrive au centre de masse avant que le centre de masse ait lui-même atteint la marche de potentiel. Naturellement, il ne vaut pas la peine de s'arrêter plus longtemps sur une telle image.

Pour les détails sur la pre-accélération, on peut se référer au paragraphe 6.13 du livre de Rohrlich déjà cité, ou au paragraphe 5.4 de: P.C.W. Davies, *The Physics of Time Asymmetry*, Surrey University Press, London 1974.

Ici on termine simplement par une remarque sur la structure typique de cette non-causalité. On regarde une fonction de réponse  $R(t)$  à une excitation  $F(t)$ , supposée telle que  $F(t < 0) = 0$ . On dit alors que la théorie est causale si la réponse satisfait aussi  $R(t < 0) = 0$ . Avec les conventions habituelles de la transformée de Fourier on a trouvé (voir appendice 3)  $R(t) = \int R(\omega)e^{-i\omega t} d\omega$  avec  $R(\omega) = \frac{F(\omega)}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)(\omega - \omega_3)}$ . Pour obtenir  $R(t < 0)$ , on ferme le contour d'intégration dans le demi-plan complexe supérieur ( $\text{Im}\omega > 0$ ), car c'est dans ce demi-plan que  $e^{-i\omega t}$  donne une contribution décroissante  $e^{\text{Im}\omega t}$  lorsque  $t < 0$ . Ainsi, la condition de causalité  $R(t < 0) = 0$  équivaut à demander qu'il n'y ait pas de pôle de  $R(\omega)$  dans le demi-plan complexe supérieur.

Or, nous connaissons déjà deux pôles causaux:  $\omega_{\pm} = \pm\omega_0 - i\frac{\omega_0^2\tau}{2} + O(\tau^2)$ . Il reste à déterminer le troisième pôle. Il se trouve que ce pôle est purement imaginaire:  $\omega_3 = i\xi$  avec  $\omega_0^2 + \xi^2 - \tau\xi^3 = 0$ . On peut vérifier que  $\xi > 0$  et donc le troisième pôle est non-causal.

## Exercice 4.6

Tout le calcul est détaillé dans le cours: chapitre 4, paragraphe 4.6 (pages 35-40).

## Exercice 4.7

Soient  $\delta_V$  et  $\Delta_V^{ij}$  les distributions définies par

$$\delta_V(\vec{x}) = \frac{1}{L^3} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad (4.7.1)$$

$$\Delta_V^{ij}(\vec{x}) = \frac{1}{L^3} \sum_{\vec{k}} \left( \delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{k^2} \right) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad (4.7.2)$$

Toute fonction  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  périodique aux bords du domaine cubique  $V$  peut être écrite en série de Fourier:

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\vec{k}} f_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \quad \text{avec } f_{\vec{k}} = \frac{1}{L^{3/2}} \int_V d^3x f(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad (4.7.3)$$

### Point (i)

Il s'agit d'établir (4.86 i) du cours:

$$\begin{aligned} \int_V d^3y \delta_V(\vec{x} - \vec{y}) f(\vec{y}) &\stackrel{(4.7.1)}{=} \frac{1}{L^3} \sum_{\vec{k}} \int_V d^3y e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} f(\vec{y}) \\ &\stackrel{(4.7.3)}{=} \frac{1}{L^3} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\vec{k}'} f_{\vec{k}'} \underbrace{\int_V d^3y e^{i(\vec{k}'-\vec{k})\cdot\vec{y}}}_{=L^3 \delta_{\vec{k},\vec{k}'}} = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\vec{k}} f_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = f(\vec{x}). \end{aligned}$$

### Point (ii)

Posons  $D_V(\vec{x} - \vec{y}) = \frac{1}{L^3} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{k^2} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}$ ; alors :

$$\partial_x^i \partial_y^j D_V(\vec{x} - \vec{y}) = \frac{1}{L^3} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{k^2} \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \right] = \frac{1}{L^3} \sum_{\vec{k}} \frac{k^i k^j}{k^2} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}$$

et par comparaison avec (4.7.1) et (4.7.2) on obtient (4.86 ii) du cours:

$$\Delta_V^{ij}(\vec{x} - \vec{y}) = \delta^{ij} \delta_V(\vec{x} - \vec{y}) - \partial_x^i \partial_y^j D_V(\vec{x} - \vec{y}).$$

### Point (iii)

Etant donné que  $\Delta_{\vec{x}} D_V(\vec{x} - \vec{y}) = -\frac{1}{L^3} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} = -\delta_V(\vec{x} - \vec{y})$ , on peut calculer

$$\Delta_{\vec{x}} \left[ \int_V d^3y D_V(\vec{x} - \vec{y}) f(\vec{y}) \right] = \int_V d^3y [\Delta_{\vec{x}} D_V(\vec{x} - \vec{y})] f(\vec{y}) \stackrel{(i)}{=} -f(\vec{x}).$$

Or, la solution de  $\Delta_{\vec{x}} F(\vec{x}) = -f(\vec{x})$  est  $F(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3y \frac{f(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}$ , ce qui donne bien (4.86 v):

$$\int_V d^3y D_V(\vec{x} - \vec{y}) f(\vec{y}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3y \frac{f(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}.$$

### Point (iv)

Finalement, établissons (4.86 vi):

$$\begin{aligned} \int_V d^3y \Delta_V^{ij}(\vec{x} - \vec{y}) f(\vec{y}) &\stackrel{(ii)}{=} \int_V d^3y \delta^{ij} \delta_V(\vec{x} - \vec{y}) f(\vec{y}) - \partial_x^i \int_V d^3y [\partial_y^j D_V(\vec{x} - \vec{y})] f(\vec{y}) \\ &\stackrel{(i), \text{parties}}{=} \delta^{ij} f(\vec{x}) + \partial_x^i \int_V d^3y D_V(\vec{x} - \vec{y}) \partial_y^j f(\vec{y}) = \\ &\stackrel{(iii)}{=} \delta^{ij} f(\vec{x}) + \partial_x^i \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3y \frac{\partial_y^j f(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \end{aligned}$$

## Exercice 4.9

Prenons (4.79), et ses conséquences immédiates (4.83) et (4.84), cette dernière avec  $\Phi = 0$  car on considère le rayonnement libre. Il est alors manifeste que toute forme quadratique faisant intervenir  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  va donner lieu à des sommes de termes du type:  $a_{\vec{k},\lambda} a_{\vec{k}',\lambda'}$ ,  $a_{\vec{k},\lambda}^\dagger a_{\vec{k}',\lambda'}^\dagger$ ,  $a_{\vec{k},\lambda}^\dagger a_{\vec{k}',\lambda'}$  et  $a_{\vec{k},\lambda} a_{\vec{k}',\lambda'}^\dagger$ . C'est en particulier le cas pour  $u(\vec{x}) = \frac{\epsilon_0}{2} (\vec{E}^2(\vec{x}) + c^2 \vec{B}^2(\vec{x}))$  et pour  $\vec{T}(\vec{x}) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{x}) \wedge \vec{B}(\vec{x})$ .

Reste seulement à remarquer que les termes proportionnels à  $\mathbb{1}$  ne jouent aucun rôle dans la dynamique, puisqu'ils commutent avec toute observable. En outre, ce sont les seuls termes pour lesquels la valeur moyenne sur l'état du vide  $|\Omega_0\rangle$  est non-nulle. Il est donc naturel d'associer ces termes à la densité d'énergie et d'impulsion du vide; comme il est discuté dans le paragraphe 4.7 du cours, on peut redéfinir le zéro de ces densités de sorte à oublier ces termes.

### Appendice: calcul explicite

Par définition, on a :

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{x}) &= -\frac{\vec{\Pi}(\vec{x})}{\epsilon_0} = \sum_{\vec{k},\lambda} i\omega(\vec{k}) \left[ a_{\vec{k},\lambda} \vec{A}_\lambda(\vec{k}, \vec{x}) - a_{\vec{k},\lambda}^\dagger \vec{A}_\lambda(\vec{k}, \vec{x})^* \right] \\ \vec{B}(\vec{x}) &= \text{rot} \vec{A}(\vec{x}) = \sum_{\vec{k},\lambda} i\vec{k} \wedge \left[ a_{\vec{k},\lambda} \vec{A}_\lambda(\vec{k}, \vec{x}) - a_{\vec{k},\lambda}^\dagger \vec{A}_\lambda(\vec{k}, \vec{x})^* \right].\end{aligned}$$

Nous devons calculer  $\vec{E}^2$ ,  $\vec{B}^2$  et  $\vec{E}(\vec{x}) \wedge \vec{B}(\vec{x})$ . Les calculs sont formellement identiques; faisons dans le détail celui pour  $\vec{E}^2$ :

$$\vec{E}^2 = \sum_{\vec{k},\lambda} \sum_{\vec{k}',\lambda'} -\omega(\vec{k}) \omega(\vec{k}') \left[ a_{\vec{k},\lambda} \vec{A}_\lambda(\vec{k}, \vec{x}) - a_{\vec{k},\lambda}^\dagger \vec{A}_\lambda(\vec{k}, \vec{x})^* \right] \cdot \left[ a_{\vec{k}',\lambda'} \vec{A}_{\lambda'}(\vec{k}', \vec{x}) - a_{\vec{k}',\lambda'}^\dagger \vec{A}_{\lambda'}(\vec{k}', \vec{x})^* \right].$$

Il convient de noter:

$$\begin{aligned}c_{\vec{k},\lambda;\vec{k}',\lambda'}^E(\vec{x}) &= \omega(\vec{k}) \omega(\vec{k}') \vec{A}_\lambda(\vec{k}, \vec{x}) \cdot \vec{A}_{\lambda'}(\vec{k}', \vec{x}) \\ d_{\vec{k},\lambda;\vec{k}',\lambda'}^E(\vec{x}) &= \omega(\vec{k}) \omega(\vec{k}') \vec{A}_\lambda(\vec{k}, \vec{x}) \cdot \vec{A}_{\lambda'}(\vec{k}', \vec{x})^*.\end{aligned}\quad (4.9.1)$$

En explicitant tous les termes du produit, puis en utilisant les relations de commutation

$$a_{\vec{k},\lambda} a_{\vec{k}',\lambda'}^\dagger = a_{\vec{k}',\lambda'}^\dagger a_{\vec{k},\lambda} + \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{\lambda\lambda'} \mathbb{1} \quad (4.9.2)$$

on arrive à:

$$\begin{aligned}\vec{E}^2(\vec{x}) &= \sum_{\vec{k},\lambda} \sum_{\vec{k}',\lambda'} \left[ -c_{\vec{k},\lambda;\vec{k}',\lambda'}^E(\vec{x}) a_{\vec{k},\lambda} a_{\vec{k}',\lambda'} - c_{\vec{k},\lambda;\vec{k}',\lambda'}^E(\vec{x})^* a_{\vec{k},\lambda}^\dagger a_{\vec{k}',\lambda'}^\dagger + \right. \\ &\quad \left. + \left( d_{\vec{k},\lambda;\vec{k}',\lambda'}^E(\vec{x}) + d_{\vec{k},\lambda;\vec{k}',\lambda'}^E(\vec{x})^* \right) a_{\vec{k},\lambda}^\dagger a_{\vec{k}',\lambda'} \right] + \left( \sum_{\vec{k},\lambda} d_{\vec{k},\lambda;\vec{k},\lambda}^E(\vec{x}) \right) \mathbb{1}.\end{aligned}$$

On obtient exactement le même résultat pour  $\vec{B}^2$  et  $\vec{E}(\vec{x}) \wedge \vec{B}(\vec{x})$ , quitte à remplacer les  $c^E$  et les  $d^E$  par respectivement:

$$\begin{aligned}c_{\vec{k},\lambda;\vec{k}',\lambda'}^B(\vec{x}) &= \left[ \vec{k} \wedge \vec{A}_\lambda(\vec{k}, \vec{x}) \right] \cdot \left[ \vec{k}' \wedge \vec{A}_{\lambda'}(\vec{k}', \vec{x}) \right] \\ d_{\vec{k},\lambda;\vec{k}',\lambda'}^B(\vec{x}) &= \left[ \vec{k} \wedge \vec{A}_\lambda(\vec{k}, \vec{x}) \right] \cdot \left[ \vec{k}' \wedge \vec{A}_{\lambda'}(\vec{k}', \vec{x})^* \right],\end{aligned}\quad (4.9.3)$$

$$\begin{aligned}\vec{c}_{\vec{k},\lambda;\vec{k}',\lambda'}^T(\vec{x}) &= \epsilon_0 \omega(\vec{k}) \left[ \vec{A}_\lambda(\vec{k}, \vec{x}) \wedge \left( \vec{k} \wedge \vec{A}_{\lambda'}(\vec{k}', \vec{x}) \right) \right] = \\ &= \epsilon_0 \omega(\vec{k}) \left[ \left( \vec{A}_\lambda(\vec{k}, \vec{x}) \cdot \vec{A}_{\lambda'}(\vec{k}', \vec{x}) \right) \vec{k} \right] \\ \vec{d}_{\vec{k},\lambda;\vec{k}',\lambda'}^T(\vec{x}) &= \epsilon_0 \omega(\vec{k}) \left[ \left( \vec{A}_\lambda(\vec{k}, \vec{x}) \cdot \vec{A}_{\lambda'}(\vec{k}', \vec{x})^* \right) \vec{k} \right].\end{aligned}\quad (4.9.4)$$

Finalement, nous pouvons calculer les coefficients des termes proportionnels à l'unité dans la densité d'énergie et d'impulsion:

$$u_{\text{vide}}(\vec{x}) = \frac{\epsilon_0}{2} \left[ \sum_{\vec{k},\lambda} d_{\vec{k},\lambda;\vec{k},\lambda}^E(\vec{x}) + c^2 \sum_{\vec{k},\lambda} d_{\vec{k},\lambda;\vec{k},\lambda}^B(\vec{x}) \right] \mathbb{1} = \frac{1}{L^3} \sum_{\vec{k},\lambda} \frac{\hbar \omega(\vec{k})}{2} \mathbb{1} \quad (4.9.5)$$

$$\vec{T}_{\text{vide}}(\vec{x}) = \sum_{\vec{k},\lambda} \vec{d}_{\vec{k},\lambda;\vec{k},\lambda}^T(\vec{x}) \mathbb{1} = \frac{1}{L^3} \sum_{\vec{k},\lambda} \frac{\hbar \vec{k}}{2} \mathbb{1} \quad (4.9.6)$$

où nous avons utilisé (4.79 iii). Remarquons que ces quantités sont indépendantes de  $\vec{x}$ . On retrouve bien les expressions du paragraphe 4.7.

*Remarque:* dans le cas du champ avec sources, l'équation pour la densité d'énergie reste la même (cf. discussion au paragraphe 4.3), mais le champ électrique est donné par (4.84):

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\frac{\vec{\Pi}(\vec{x})}{\epsilon_0} - \text{grad} \Phi(\vec{x}, t) \mathbb{1}.$$

Ceci introduit dans l'expression de  $u(\vec{x})$  et de  $\vec{T}(\vec{x})$  un terme proportionnel à  $\mathbb{1}$  fini, et des combinaisons linéaires (autoadjointes) des  $a_{\vec{k},\lambda}$ ,  $a_{\vec{k},\lambda}^\dagger$ . C'est la manifestation du champ coulombien de la source, qui ne change pas la problématique de la redéfinition de l'énergie du vide.

## Exercice 4.10

*Rappels sur la représentation d'Heisenberg:* Soit  $O$  une observable en représentation de Schrödinger: on a

$$\langle O \rangle(t) = \langle \psi(t) | O | \psi(t) \rangle = \langle \psi(0) | U^\dagger(t) O U(t) | \psi(0) \rangle \equiv \langle \psi(0) | O^H | \psi(0) \rangle,$$

avec  $O^H$  l'observable en représentation d'Heisenberg. Les deux représentations sont bien sûr équivalentes; celle d'Heisenberg peut s'avérer pratique car on montre sans difficulté que  $\frac{d}{dt} O^H(t) = \frac{i}{\hbar} [H, O^H]$  i.e., l'équation d'évolution est une équation différentielle dont la solution ne nécessite en principe pas la manipulation explicite de l'opérateur d'évolution  $U(t)$ . Dans l'exercice, nous allons utiliser cette équation sous la forme équivalente

$$\frac{d}{dt} O^H(t) = \frac{i}{\hbar} U^\dagger(t) [H, O] U(t). \quad (4.10.1)$$

Soit  $a_{\vec{k},\lambda}^H(t)$  la représentation d'Heisenberg de l'annihilateur  $a_{\vec{k},\lambda}$ :

$$a_{\vec{k},\lambda}^H(t) \stackrel{\text{def}}{=} U^\dagger(t) a_{\vec{k},\lambda} U(t), \text{ avec } U(t) = e^{-iH_V^{\text{bre}} \frac{t}{\hbar}}.$$

Comme annoncé, nous n'allons pas calculer cette expression directement, mais plutôt résoudre (4.10.1). Puisque (cf. cours, (4.90))  $[H_V^{\text{bre}}, a_{\vec{k},\lambda}] = -\hbar \omega(\vec{k}) a_{\vec{k},\lambda}$ , on obtient:

$$\frac{d}{dt} a_{\vec{k},\lambda}^H(t) = -i \omega(\vec{k}) a_{\vec{k},\lambda}^H(t) \implies a_{\vec{k},\lambda}^H(t) = a_{\vec{k},\lambda}^H(0) e^{-i \omega(\vec{k}) t}$$

et puisque  $a_{\vec{k},\lambda}^H(0) \equiv a_{\vec{k},\lambda}$  on a

$$\boxed{a_{\vec{k},\lambda}^H(t) = a_{\vec{k},\lambda} e^{-i \omega(\vec{k}) t}.} \quad (4.10.2)$$

Ainsi le potentiel vecteur en représentation d'Heisenberg s'écrit:

$$\vec{A}_H(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{k},\lambda} a_{\vec{k},\lambda} e^{-i \omega(\vec{k}) t} \vec{A}_\lambda(\vec{k}, \vec{x}) + \text{adj.}$$

et par conséquent il est immédiat que

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{A}_H(\vec{x}, t) &= \sum_{\vec{k},\lambda} a_{\vec{k},\lambda} e^{-i \omega(\vec{k}) t} \underbrace{\text{div} \vec{A}_\lambda(\vec{k}, \vec{x})}_{=i\vec{k} \cdot \vec{A}_\lambda(\vec{k}, \vec{x})=0} + \text{adj.} = 0; \\ \square \vec{A}_H(\vec{x}, t) &= \Delta \vec{A}_H(\vec{x}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A}_H(\vec{x}, t) = \\ &= \sum_{\vec{k},\lambda} a_{\vec{k},\lambda} e^{-i \omega(\vec{k}) t} \vec{A}_\lambda(\vec{k}, \vec{x}) \left( -|\vec{k}|^2 + \frac{\omega^2(\vec{k})}{c^2} \right) + \text{adj.} = 0. \end{aligned}$$



### Exercice 4.11

(i) Rappels, et valeur moyenne de  $\vec{A}(\vec{x})$  sur un état à nombre donné de photons

On rappelle les relations (4.101) du cours:

$$a_{\vec{k},\lambda}|n_{\dots}\rangle = \sqrt{n_{\vec{k},\lambda}}|n_{\dots} - \delta_{\vec{k},\lambda}^{\vec{k},\lambda}\rangle \quad (4.11.1)$$

$$a_{\vec{k},\lambda}^\dagger|n_{\dots}\rangle = \sqrt{n_{\vec{k},\lambda} + 1}|n_{\dots} + \delta_{\vec{k},\lambda}^{\vec{k},\lambda}\rangle \quad (4.11.2)$$

d'où les noms d'opérateurs d'annihilation et de création. En particulier alors, puisque les états à nombre donné de photons sont orthonormés, on a

$$\langle\{m_{\dots}\}|a_{\vec{k},\lambda}|n_{\dots}\rangle = \begin{cases} \sqrt{n_{\vec{k},\lambda}}, & m_{\dots} = n_{\dots} - \delta_{\vec{k},\lambda}^{\vec{k},\lambda} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (4.11.3)$$

$$\langle\{m_{\dots}\}|a_{\vec{k},\lambda}^\dagger|n_{\dots}\rangle = \begin{cases} \sqrt{n_{\vec{k},\lambda} + 1}, & m_{\dots} = n_{\dots} + \delta_{\vec{k},\lambda}^{\vec{k},\lambda} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (4.11.4)$$

Au vu de cela, il est manifeste que

$$\langle\vec{A}(\vec{x})\rangle \equiv \langle\{n_{\dots}\}|\vec{A}(\vec{x})|\{n_{\dots}\}\rangle = \sum_{\vec{k},\lambda} \vec{A}_\lambda(\vec{k},\vec{x}) \langle a_{\vec{k},\lambda} \rangle + \vec{A}_\lambda^*(\vec{k},\vec{x}) \langle a_{\vec{k},\lambda}^\dagger \rangle = 0.$$

Donc on a obtenu

$$\langle\{n_{\dots}\}|\vec{A}(\vec{x})|\{n_{\dots}\}\rangle = 0 \quad (4.11.5)$$

(ii) Ecart quadratique de  $\vec{A}(\vec{x})$  sur un état à nombre donné de photons

Pour fixer les idées, posons  $\vec{k} = k\hat{e}_3$ , de sorte que  $A^3(\vec{x}) = 0$ . Pour  $i = 1, 2$  on calcule l'écart quadratique, qui est défini par  $\Delta A^i(\vec{x}) = \sqrt{\langle A^i(\vec{x})^2 \rangle - \langle A^i(\vec{x}) \rangle^2}$ ; dans notre cas donc, toujours sur un état à nombre donné de photons,  $\Delta A^i(\vec{x}) = \sqrt{\langle A^i(\vec{x})^2 \rangle}$ . On a:

$$A^i(\vec{x})^2 = \sum_{\vec{k},\lambda} \sum_{\vec{k}',\lambda'} A_\lambda^i(\vec{k},\vec{x}) A_{\lambda'}^i(\vec{k}',\vec{x}) a_{\vec{k},\lambda} a_{\vec{k}',\lambda'} + adj. + \sum_{\vec{k},\lambda} \sum_{\vec{k}',\lambda'} A_\lambda^i(\vec{k},\vec{x})^* A_{\lambda'}^i(\vec{k}',\vec{x}) 2 a_{\vec{k},\lambda}^\dagger a_{\vec{k}',\lambda'} + \sum_{\vec{k},\lambda} |A_\lambda^i(\vec{k},\vec{x})|^2 \mathbb{1}.$$

Clairement  $\langle a_{\vec{k},\lambda} a_{\vec{k}',\lambda'} \rangle = \langle a_{\vec{k},\lambda}^\dagger a_{\vec{k}',\lambda'}^\dagger \rangle = 0$  (deux annihilations ou deux créations), alors que

$$\langle a_{\vec{k},\lambda}^\dagger a_{\vec{k}',\lambda'} \rangle = \sqrt{n_{\vec{k},\lambda} n_{\vec{k}',\lambda'}} \langle\{n_{\dots}\}|\{n_{\dots} - \delta_{\vec{k},\lambda}^{\vec{k},\lambda} + \delta_{\vec{k}',\lambda'}^{\vec{k}',\lambda'}\}\rangle = n_{\vec{k},\lambda} \delta_{\vec{k},\lambda}^{\vec{k}',\lambda'}$$

et donc

$$\begin{aligned} \langle A^i(\vec{x})^2 \rangle &= \sum_{\vec{k},\lambda} |A_\lambda^i(\vec{k},\vec{x})|^2 (2n_{\vec{k},\lambda} + 1) \geq \sum_{\vec{k},\lambda} |A_\lambda^i(\vec{k},\vec{x})|^2 = \\ &= \frac{\hbar}{2L^3 \epsilon_0 c} \sum_{\vec{k},\lambda} \frac{|e_\lambda^i(\vec{k})|^2}{|\vec{k}|} \doteq \text{const.} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{|\vec{k}|} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \infty \end{aligned}$$

Pour l'égalité marquée par \*, on utilise  $\sum_\lambda |e_\lambda^i(\vec{k})|^2 = 1$ , conséquence assez immédiate des relations (4.30). En conclusion:

$$\Delta A^i(\vec{x}) = \infty. \quad (4.11.6)$$

(iii) Valeur moyenne de  $\vec{A}(\vec{x})$  sur une superposition de deux états à nombre donné de photons

Soit  $|n_{\vec{k},\lambda}\rangle = |\vec{k}\lambda; \dots; \vec{k}\lambda\rangle$  un état à nombre donné de photons, tous les photons étant dans le mode  $(\vec{k}, \lambda)$ . De même pour  $|n_{\vec{k}',\lambda'}\rangle = |\vec{k}'\lambda'; \dots; \vec{k}'\lambda'\rangle$ . Considérons la superposition

$$|\Omega\rangle = \alpha|n_{\vec{k},\lambda}\rangle + \beta|n_{\vec{k}',\lambda'}\rangle, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Alors en vertu du résultat obtenu sous (i):

$$\langle\Omega|\vec{A}(\vec{x})|\Omega\rangle = \alpha^* \beta \langle n_{\vec{k},\lambda} | \vec{A}(\vec{x}) | n_{\vec{k}',\lambda'} \rangle + \text{c.c.}$$

et puisque deux états à nombre donné de photons différents sont orthogonaux:

$$\begin{aligned} \langle n_{\vec{k},\lambda} | a_{\vec{k}',\lambda'} | n_{\vec{k}',\lambda'} \rangle &= \delta_{\vec{k},\lambda}^{\vec{k}',\lambda'} \sqrt{n_{\vec{k}',\lambda'}} \langle n_{\vec{k},\lambda} | n_{\vec{k}',\lambda'} - 1 \rangle = \\ &= \sqrt{n_{\vec{k}',\lambda'}} \delta_{\vec{k},\lambda}^{\vec{k}',\lambda'} \delta_{\vec{k}',\lambda'}^{\vec{k},\lambda} \delta_{n_{\vec{k},\lambda}}^{n_{\vec{k}',\lambda'} - 1} \\ \langle n_{\vec{k},\lambda} | a_{\vec{k}',\lambda'}^\dagger | n_{\vec{k}',\lambda'} \rangle &= \sqrt{n_{\vec{k}',\lambda'} + 1} \delta_{\vec{k},\lambda}^{\vec{k}',\lambda'} \delta_{\vec{k}',\lambda'}^{\vec{k},\lambda} \delta_{n_{\vec{k},\lambda}}^{n_{\vec{k}',\lambda'} + 1}. \end{aligned}$$

Donc il vient après substitution:

$$\langle\Omega|\vec{A}(\vec{x})|\Omega\rangle = \begin{cases} 2\text{Re}(\alpha^* \beta A_\lambda(\vec{k},\vec{x})) \sqrt{n_{\vec{k},\lambda} - 1} & \text{si } (\vec{k}, \lambda) = (\vec{k}', \lambda') \text{ et } n_{\vec{k},\lambda} = n_{\vec{k}',\lambda'} - 1 \\ 2\text{Re}(\alpha^* \beta A_\lambda(\vec{k},\vec{x})) \sqrt{n_{\vec{k},\lambda}} & \text{si } (\vec{k}, \lambda) = (\vec{k}', \lambda') \text{ et } n_{\vec{k},\lambda} = n_{\vec{k}',\lambda'} + 1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

## Exercice 4.14

Nous nous plaçons dans le référentiel dans lequel l'électron est initialement au repos. Les paramètres fixes du problème sont l'impulsion du photon incident  $\vec{p}_{in}$ , et l'angle de diffusion du photon  $\theta$ . Le choix des axes et des notations est donné dans la figure. La conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie totales du système s'écrit :

$$\vec{p}_{in} = \vec{p}_{dif} + \vec{p}_e \quad (4.14.1)$$

$$E_{in} + m_e c^2 = E_{dif} + E_e \quad (4.14.2)$$

où  $E_{in}$ ,  $E_{dif}$  désignent les énergies du photon incident et diffusé respectivement.

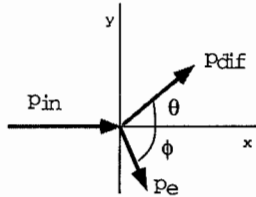


Figure 1: Définition des objets

En projetant sur les axes  $x$  et  $y$  l'équation (4.14.1), on obtient

$$p_{in} = p_{dif} \cos \theta + p_e \cos \phi \quad (4.14.3)$$

$$0 = p_{dif} \sin \theta - p_e \sin \phi. \quad (4.14.4)$$

En prenant le carré des équations ci-dessus, on a :

$$p_e^2 (1 - \sin^2 \phi) \stackrel{(4.14.3)}{=} p_{in}^2 - 2 p_{in} p_{dif} \cos \theta + p_{dif}^2 \cos^2 \theta$$

$$p_e^2 (1 - \sin^2 \phi) \stackrel{(4.14.4)}{=} p_e^2 - p_{dif}^2 \sin^2 \theta$$

d'où l'égalité des membres de droite:

$$p_e^2 = p_{in}^2 + p_{dif}^2 - 2 p_{in} p_{dif} \cos \theta. \quad (4.14.5)$$

Par ailleurs, (4.14.2) s'écrit  $E_e = c(p_{in} - p_{dif}) + m_e c^2$ , et donc:

$$E_e^2 \stackrel{def.}{=} c^2 p_e^2 + m_e^2 c^4 = c^2 (p_{in} - p_{dif})^2 + m_e^2 c^4 + 2 m_e c^3 (p_{in} - p_{dif})$$

ce qui donne après rearrangement

$$p_e^2 = p_{in}^2 + p_{dif}^2 - 2 p_{in} p_{dif} + 2 m_e c (p_{in} - p_{dif}) \quad (4.14.6)$$

En utilisant (4.14.5) et (4.14.6) on obtient  $2 p_{in} p_{dif} (1 - \cos \theta) = 2 m_e c (p_{in} - p_{dif})$  c'est-à-dire:

$$p_{dif}^{-1} = p_{in}^{-1} + \frac{1 - \cos \theta}{m_e c}. \quad (4.14.7)$$

### Remarques conclusives

- En posant  $p = 2\pi/\lambda$ , on obtient

$$\Delta \lambda \equiv \lambda_{fin} - \lambda_{in} = \lambda_c (1 - \cos \theta); \quad (4.14.8)$$

le paramètre  $\lambda_c = h/(m_e c) \simeq 3 * 10^{-13} m$  est appelé "longueur d'onde de de Broglie".

- Les paramètres pour la diffusion de l'électron s'obtiennent à partir de (4.14.3) et (4.14.4):

$$\cotg \phi = \left( \frac{p_{in}}{p_{dif}} - \cos \theta \right) \frac{1}{\sin \theta}, \quad p_e = p_{dif} \frac{\sin \theta}{\sin \phi}.$$

- Vue (4.14.7): si  $p_{in} \rightarrow 0$ , la dépendance en  $\theta$  de  $p_{dif}$  devient négligeable; on retrouve le modèle de l'électron qui oscille faiblement et émet une onde de longueur d'onde  $\lambda_{dif} = \lambda_{in}$  dans toutes les directions (cf. diffraction de rayons X pour la cristallographie). Si d'autre part  $p_{in} \rightarrow \infty$ , alors  $p_{dif} \rightarrow \frac{m_e c}{1 - \cos \theta}$  reste fini (sauf pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ); en revanche on voit que  $\phi \rightarrow 0$  et donc  $p_e \rightarrow \infty$ .

## Exercice 4.8

On rappelle les deux résultats suivants (pour le premier, cf. ex. 4.6; le deuxième est la transformée de Fourier de la gaussienne):

$$[E^i(\vec{x}), B^j(\vec{y})] = \frac{\hbar}{\epsilon_0} (\vec{e}_i \wedge \vec{e}_j) \cdot \frac{1}{L^3} \sum_{\vec{k}} \vec{k} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \mathbb{1} \quad (4.8.1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ds e^{-a^2 s^2 + ius} = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-\frac{u^2}{4a^2}}. \quad (4.8.2)$$

### Calcul général

Soient les opérateurs de champ macroscopiques

$$(\vec{E} \star g)(\vec{x}) = \int_V d^3 x' \vec{E}(\vec{x}') g(\vec{x}' - \vec{x}), \quad (\vec{B} \star g)(\vec{y}) = \int_V d^3 y' \vec{B}(\vec{y}') g(\vec{y}' - \vec{y}).$$

On aura le commutateur

$$\begin{aligned} [(E^i \star g)(\vec{x}), (B^j \star g)(\vec{y})] &= \int_V d^3 x' \int_V d^3 y' g(\vec{x}' - \vec{x}) g(\vec{y}' - \vec{y}) [E^i(\vec{x}'), B^j(\vec{y}')] = \\ &\stackrel{(4.8.1)}{=} \frac{\hbar}{\epsilon_0} (\vec{e}_i \wedge \vec{e}_j) \cdot \frac{1}{L^3} \sum_{\vec{k}} \vec{k} f(\vec{k}) \mathbb{1} \end{aligned} \quad (4.8.3)$$

avec

$$\begin{aligned} f(\vec{k}) &= \int_V d^3 x' \int_V d^3 y' g(\vec{x}' - \vec{x}) g(\vec{y}' - \vec{y}) e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x}' - \vec{y}')} = \\ &= \underbrace{\int_V d^3 x' g(\vec{x}' - \vec{x}) e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x}' - \vec{x})}}_{\equiv \hat{g}_{\vec{k}}} \underbrace{\int_V d^3 y' g(\vec{y}' - \vec{y}) e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{y}' - \vec{y})}}_{\equiv \hat{g}_{-\vec{k}}} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} = |\hat{g}_{\vec{k}}|^2 e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})}. \end{aligned}$$

En remarquant que  $\vec{k} e^{i\vec{k} \cdot \vec{v}} = -i \text{grad}_{\vec{v}}(e^{i\vec{k} \cdot \vec{v}})$ , on récrit (4.8.3) sous la forme

$$[(E^i \star g)(\vec{x}), (B^j \star g)(\vec{y})] = -i \frac{\hbar}{\epsilon_0} (\vec{e}_i \wedge \vec{e}_j) \cdot \text{grad}_{\vec{v}} \left[ \frac{1}{L^3} \sum_{\vec{k}} |\hat{g}_{\vec{k}}|^2 e^{i\vec{k} \cdot \vec{v}} \right] \mathbb{1}, \quad (4.8.4)$$

où nous avons posé  $\vec{v} = \vec{x} - \vec{y}$ .

### Cas particulier: distribution gaussienne

Nous prenons une distribution gaussienne  $g(\vec{x}) = \frac{1}{(a\sqrt{\pi})^3} \exp(-\vec{x}^2/a^2)$ . Si  $a \ll L$  on aura  $\hat{g}_{\vec{k}} \simeq g(\vec{k})$  avec

$$g(\vec{k}) = \frac{1}{(a\sqrt{\pi})^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 x e^{-\frac{x^2}{a^2} + i\vec{k} \cdot \vec{x}} = \frac{1}{(a\sqrt{\pi})^3} \prod_{j=1}^3 \int_{-\infty}^{+\infty} ds e^{-\frac{s^2}{a^2} + ik_j s} \stackrel{(4.8.2)}{=} e^{-\frac{a^2 \vec{k}^2}{4}}.$$

Le passage à la limite  $L \rightarrow \infty$  donne

$$\frac{1}{L^3} \sum_{\vec{k}} |g_{\vec{k}}|^2 e^{i\vec{k} \cdot \vec{v}} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k |g(\vec{k})|^2 e^{i\vec{k} \cdot \vec{v}} \stackrel{(4.8.2)}{=} \frac{1}{(a\sqrt{2\pi})^3} e^{-\frac{\vec{v}^2}{2a^2}}. \quad (4.8.5)$$

En insérant ce résultat dans (4.8.4) on aboutit à

$$[(E^i \star g)(\vec{x}), (B^j \star g)(\vec{y})] = i \frac{\hbar}{\epsilon_0} (\vec{e}_i \wedge \vec{e}_j) \cdot (\vec{x} - \vec{y}) \frac{1}{a^5 (2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{(\vec{x} - \vec{y})^2}{2a^2}} \mathbb{1}. \quad (4.8.6)$$

### Appendice: autre manière de calculer le cas général

On commence par récrire (4.8.1) en remplaçant  $\frac{1}{L^3} \sum_{\vec{k}} \vec{k} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})}$  par  $i \text{grad}_{\vec{y}} \delta_V(\vec{x} - \vec{y})$ , où le gradient a été pris selon  $\vec{y}$  (d'où le signe) en vue de ce qui suit. Alors le commutateur (4.8.3) devient  $i \frac{\hbar}{\epsilon_0} (\vec{e}_i \wedge \vec{e}_j) \cdot \vec{F}(\vec{x}, \vec{y})$  avec

$$\vec{F}(\vec{x}, \vec{y}) = \int_V d^3 x' \int_V d^3 y' g(\vec{x}' - \vec{x}) g(\vec{y}' - \vec{y}) \text{grad}_{\vec{y}'} \delta_V(\vec{x}' - \vec{y}'). \quad (4.8.7)$$

Etant donné la périodicité des conditions aux bords, on peut translater tout le volume  $V$  de  $\vec{x}$  ce qui donne avec  $\vec{v} = \vec{x} - \vec{y}$ :

$$\vec{F}(\vec{x}, \vec{y}) \equiv \vec{F}(\vec{v}) = \int_V d^3 x' \int_V d^3 y' g(\vec{x}') g(\vec{y}' + \vec{v}) \text{grad}_{\vec{y}'} \delta_V(\vec{x}' - \vec{y}'). \quad (4.8.8)$$

On peut alors intégrer par parties; le terme tout intégré disparaissant par la périodicité on a

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{v}) &= - \int_V d^3 x' \int_V d^3 y' \text{grad}_{\vec{y}'} [g(\vec{x}') g(\vec{y}' + \vec{v})] \delta_V(\vec{x}' - \vec{y}') = \\ &= - \text{grad}_{\vec{v}} \int_V d^3 x' \left( \int_V d^3 y' g(\vec{x}') g(\vec{y}' + \vec{v}) \right) \delta_V(\vec{x}' - \vec{y}') = - \text{grad}_{\vec{v}} \left( \int_V d^3 y' g(\vec{y}') g(\vec{y}' + \vec{v}) \right) \end{aligned}$$

où on a tiré profit du fait que  $\text{grad}_{\vec{y}'} g(\vec{y}' + \vec{v}) = \text{grad}_{\vec{v}} g(\vec{y}' + \vec{v})$  pour sortir le gradient de l'intégrale, et on a ensuite utilisé la propriété de la distribution  $\delta_V$  établie au point (i) de l'exercice 4.7. On retrouve le produit de convolution de  $g$  avec lui-même. Donc l'équivalent de (4.8.4) est

$$[(E^i \star g)(\vec{x}), (B^j \star g)(\vec{y})] = -i \frac{\hbar}{\epsilon_0} (\vec{e}_i \wedge \vec{e}_j) \cdot \text{grad}_{\vec{v}} (g \star g)(-\vec{v}). \quad (4.8.9)$$

La comparaison avec (4.8.4) donne  $(g \star g)(\vec{x}) = \frac{1}{L^3} \sum_{\vec{k}} |\hat{g}_{\vec{k}}|^2 e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}}$ , résultat bien connu de la théorie des transformées de Fourier:  $\text{TF}[f \star g] = (\text{TF}[f])^* (\text{TF}[g])$ .

Le calcul de  $(g \star g)(-\vec{v})$  pour la gaussienne est sans difficultés.

## Exercice 4.12

### Position du problème et point (i)

Considérons d'abord le champ  $\vec{E}$ . En combinant (4.84) du cours sans potentiel extérieur et la définition  $(\vec{E} \star g)(\vec{x}) = \int_V d^3x' \vec{E}(\vec{x}') g(\vec{x}' - \vec{x})$  on trouve immédiatement

$$(\vec{E} \star g)(\vec{x}) = \sum_{\vec{k}, \lambda} a_{\vec{k}, \lambda} \vec{\mathcal{E}}_{\vec{k}, \lambda}(\vec{x}) + \text{adj.}, \quad \text{avec} \quad \vec{\mathcal{E}}_{\vec{k}, \lambda}(\vec{x}) = -i\omega(\vec{k}) \int_V d^3x' \vec{A}_\lambda(\vec{k}, \vec{x}') g(\vec{x}' - \vec{x}) =$$

$$\stackrel{(4.79 \text{ iii})}{=} -i \sqrt{\frac{\hbar c |\vec{k}|}{2L^3 \epsilon_0}} \vec{e}_\lambda(\vec{k}) \underbrace{\int_V d^3x' g(\vec{x}' - \vec{x}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}'}}_{e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \hat{g}_\vec{k}}.$$

De même alors pour le champ  $\vec{B}$ :

$$(\vec{B} \star g)(\vec{x}) = \sum_{\vec{k}, \lambda} a_{\vec{k}, \lambda} \vec{\mathcal{B}}_{\vec{k}, \lambda}(\vec{x}) + \text{adj.}, \quad \text{avec} \quad \vec{\mathcal{B}}_{\vec{k}, \lambda}(\vec{x}) = i \sqrt{\frac{\hbar |\vec{k}|}{2L^3 \epsilon_0 c}} (\hat{k} \wedge \vec{e}_\lambda(\vec{k})) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \hat{g}_\vec{k}.$$

Il est dès lors manifeste que la moyenne de ces champs macroscopiques sur les états à nombre donné de photons est nulle, pour la même raison vue dans l'exercice 4.11.

### Point (ii): écart quadratique

Calculons pour le champ  $\vec{E}$ :

$$[(E^i \star g)(\vec{x})]^2 = \sum_{\vec{k}, \lambda} |\mathcal{E}_{\vec{k}, \lambda}^i(\vec{x})|^2 (2a_{\vec{k}, \lambda}^\dagger a_{\vec{k}, \lambda} + 1) + \text{termes en } a_{\vec{k}, \lambda} a_{\vec{k}, \lambda}, a_{\vec{k}, \lambda}^\dagger a_{\vec{k}, \lambda}^\dagger \text{ et } a_{\vec{k}, \lambda}^\dagger a_{\vec{k}, \lambda}$$

$$\Rightarrow \langle \{n_{\vec{k}, \lambda}\} | [(E^i \star g)(\vec{x})]^2 | \{n_{\vec{k}, \lambda}\} \rangle = \sum_{\vec{k}, \lambda} |\mathcal{E}_{\vec{k}, \lambda}^i(\vec{x})|^2 (2n_{\vec{k}, \lambda} + 1). \quad (4.12.1)$$

Le calcul ne peut pas être effectué si l'on ne connaît pas la distribution exacte des photons dans les modes. Cependant si  $\sum_{\vec{k}, \lambda} n_{\vec{k}, \lambda} = n$ , il est manifeste que

$$\sum_{\vec{k}, \lambda} |\mathcal{E}_{\vec{k}, \lambda}^i(\vec{x})|^2 \leq \langle \{n_{\vec{k}, \lambda}\} | [(E^i \star g)(\vec{x})]^2 | \{n_{\vec{k}, \lambda}\} \rangle < (2n+1) \sum_{\vec{k}, \lambda} |\mathcal{E}_{\vec{k}, \lambda}^i(\vec{x})|^2. \quad (4.12.2)$$

Or en utilisant l'argument  $\sum_{\lambda} |e_\lambda^i(\vec{k})|^2 = 1$  on a

$$\sum_{\vec{k}, \lambda} |\mathcal{E}_{\vec{k}, \lambda}^i(\vec{x})|^2 = \frac{\hbar c}{2\epsilon_0} \frac{1}{L^3} \sum_{\vec{k}} |\vec{k}| |\hat{g}_\vec{k}|^2. \quad (4.12.3)$$

Naturellement le calcul est identique pour le champ  $\vec{B}$ :

$$\sum_{\vec{k}, \lambda} |\mathcal{B}_{\vec{k}, \lambda}^i(\vec{x})|^2 = \frac{\hbar}{2\epsilon_0 c} \frac{1}{L^3} \sum_{\vec{k}} |\vec{k}| |\hat{g}_\vec{k}|^2. \quad (4.12.4)$$

Cette expression ne diffère de celle pour  $\vec{E}$  que dans la position de la constante  $c$ . Notons que si la distribution  $g$  était une distribution de Dirac, sa transformée de Fourier  $\hat{g}_\vec{k}$  serait une constante et on aurait un écart quadratique infini: on retrouve bien la situation de l'exercice 4.11.

Considérons la distribution gaussienne introduite dans l'exercice 4.8. Alors<sup>1</sup>

$$\frac{1}{L^3} \sum_{\vec{k}} |\vec{k}| |\hat{g}_\vec{k}|^2 \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^3} 4\pi \int_0^\infty k^3 e^{-\frac{a^2 k^2}{4}} dk = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty x e^{-\frac{a^2}{2} x} dx = \frac{4}{\pi^2 a^4}.$$

En conclusion on trouve

$$\sqrt{\frac{2\hbar c}{\epsilon_0} \frac{1}{\pi a^2}} \leq \Delta_n[(E^i \star g)(\vec{x})] < \sqrt{(2n+1) \frac{2\hbar c}{\epsilon_0} \frac{1}{\pi a^2}}. \quad (4.12.5)$$

On retrouve les écarts quadratiques infinis dans la limite  $a \rightarrow 0$ . La borne inférieure est atteinte si  $|\{n_{\vec{k}, \lambda}\}\rangle = |\Omega_0\rangle$ . La borne supérieure est très grossière: elle décrit un état du champ dans lequel on a  $n$  photons dans chaque mode, donc un nombre infini de photons (en ce sens on voit que  $\Delta_n[(E^i \star g)(\vec{x})]$  reste fini même pour des états à nombre infini de photons).

<sup>1</sup> Calcul de l'intégrale: (1) On passe en coordonnées sphériques pour l'intégrale; (2) on note  $x = k^2/2$ ; (3) on intègre par parties en utilisant  $xe^{-cx} = \frac{1}{c} [e^{-cx} - \frac{d}{dx}(xe^{-cx})]$ .

## Exercice 4.13

### Comparaison avec l'exercice 4.12

Dans l'exercice 4.12, on travaillait avec un état

$$|\Omega\rangle \equiv | \{n_{\vec{k}}\} \rangle = \dots \otimes |n\rangle \otimes |n'\rangle \otimes |n''\rangle \otimes \dots$$

Dans chaque mode il y a un état à  $n$ -photons; un tel état est donc état propre de  $N_{\vec{k}\lambda}$  pour la valeur propre  $n_{\vec{k}\lambda}$ . Ici, on travaille en revanche avec

$$|\Omega\rangle \equiv |1\text{ph}\rangle = \psi_1[\dots \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes \dots] + \psi_2[\dots \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle \otimes \dots] + \dots$$

C'est un état du champ dans lequel il y a un photon en tout et pour tout, la normalisation des  $\psi$  impliquant  $\langle 1\text{ph} | \sum_{\vec{k}\lambda} N_{\vec{k}\lambda} |1\text{ph}\rangle = 1$ . Mais ce photon ne se trouve pas dans un mode défini. Nous allons voir quelles sont les similitudes et les différences avec le cas précédent.

### Moyennes et écarts quadratiques

Les moyennes des observables de champ macroscopique sont encore une fois nulles, toujours pour la même raison. En effet, on a montré dans l'exercice 4.11 que seules des superpositions d'états à nombre *différent* de photons donnent, sous certaines conditions, des valeurs moyennes non nulles<sup>1</sup>.

Pour les écarts quadratiques, on peut reprendre le même raisonnement que dans l'exercice 4.12, car il est facile de se convaincre que dans ce cas aussi les termes en  $a_{\vec{k}\lambda} a_{\vec{k}\lambda}$ ,  $a_{\vec{k}\lambda}^\dagger a_{\vec{k}\lambda}^\dagger$  et  $a_{\vec{k}\lambda}^\dagger a_{\vec{k}\lambda}$  donnent une contribution nulle. La seule différence en fait vient de ce que  $\langle 1\text{ph} | N_{\vec{k}\lambda} |1\text{ph}\rangle = |\psi_\lambda(\vec{k})|^2$  et donc

$$\langle 1\text{ph} | [(E^i \star g)(\vec{x})]^2 |1\text{ph}\rangle = \sum_{\vec{k}, \lambda} |\mathcal{E}_{\vec{k}\lambda}^i(\vec{x})|^2 (2|\psi_\lambda(\vec{k})|^2 + 1). \quad (4.13.1)$$

Le reste de la discussion suit exactement les mêmes lignes que dans l'exercice 4.12, en remplaçant  $n_{\vec{k}\lambda}$  par  $|\psi_\lambda(\vec{k})|^2$  et donc  $n$  par 1.

<sup>1</sup>Pour le calcul explicite, on utilise les formules (4.118) et (4.119) du cours.

## Exercice 4.18

### Introduction

Le système "champ électromagnétique et atome à deux niveaux" est décrit par l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H} = \mathcal{F} \otimes \mathbb{C}^2. \quad (4.18.1)$$

L'interaction entre le champ et l'atome est gouvernée par

$$H = H^{libre} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_{at} + H_{int} \quad (4.18.2)$$

avec  $H^{libre}$  donné par (4.104 ii),  $H_{at} = E_1|1\rangle\langle 1| + E_2|2\rangle\langle 2| \equiv \hbar\omega_0|2\rangle\langle 2|$  (cette dernière égalité n'étant qu'une redéfinition du zéro de l'énergie); le terme d'interaction est choisi comme

$$H_{int} = \frac{1}{\sqrt{L^3}} \sum_{\vec{k}, \lambda} (g_{\vec{k}, \lambda} a_{\vec{k}, \lambda} \otimes b^\dagger + g_{\vec{k}, \lambda}^* a_{\vec{k}, \lambda}^\dagger \otimes b) \quad (4.18.3)$$

où  $b = |1\rangle\langle 2|$ , et les  $g_{\vec{k}, \lambda}$  sont des constantes complexes. Cet hamiltonien gouverne la dynamique suivante: en raison du premier terme  $a_{\vec{k}, \lambda} \otimes b^\dagger$ , si l'atome est dans l'état fondamental  $|1\rangle$ , il peut absorber un photon (qui disparaît du champ:  $a_{\vec{k}, \lambda}$ ) et passer à l'état excité; le deuxième terme, adjoint du premier, gouverne le processus inverse, à savoir le fait que l'atome dans l'état excité peut se desexciter en émettant un photon. Naturellement, plus  $|g_{\vec{k}, \lambda}|$  est grand, plus l'absorption ou l'émission d'un photon  $|\vec{k}, \lambda\rangle$  sera favorisée.

**Point (i): observable "nombre de photons généralisé"**

Soit  $J$  l'opérateur suivant

$$J = \underbrace{\sum_{\vec{k}, \lambda} a_{\vec{k}, \lambda}^\dagger a_{\vec{k}, \lambda}}_N \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes |2\rangle\langle 2|. \quad (4.18.4)$$

L'observable  $J$  peut être interprétée comme le "nombre de photons généralisé": le premier terme  $N \otimes \mathbb{1}$  compte le nombre de photons dans le champ; le deuxième ajoute 1 si l'atome est dans l'état excité (et a par conséquent absorbé un photon). Le spectre de cette observable est donc constitué par les nombres naturels; il est facile de se convaincre de que tous et seuls

les états de la forme<sup>1</sup>

$$|\Psi_j\rangle = \alpha |j \text{ photons}\rangle \otimes |1\rangle + \beta |j-1 \text{ photons}\rangle \otimes |2\rangle, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \quad (4.18.5)$$

sont états propres de  $J$  pour la valeur propre  $j > 0$ , et que l'état propre pour  $j = 0$  est  $|\Omega_0\rangle \otimes |1\rangle$ .

Montrons que  $J$  commute avec l'Hamiltonien du système (4.18.2). En toute généralité

$$[A_1 \otimes B_1, A_2 \otimes B_2] = [A_1, A_2] \otimes B_1 B_2 + A_2 A_1 \otimes [B_1, B_2].$$

En appliquant ceci au calcul de  $[J, H]$ , on voit que le seul terme non trivial est  $[J, H_{int}]$ .

Or, d'une part, en utilisant (4.78):

$$\begin{aligned} [N \otimes \mathbb{1}, H_{int}] &= \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\vec{k}, \lambda} \sum_{\vec{k}', \lambda'} g_{\vec{k}, \lambda} [N_{\vec{k}', \lambda'}, a_{\vec{k}, \lambda}] \otimes b^\dagger + adj. = \\ &= - \left( \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\vec{k}, \lambda} g_{\vec{k}, \lambda} a_{\vec{k}, \lambda} \otimes b^\dagger - adj. \right); \end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned} [\mathbb{1} \otimes |2\rangle\langle 2|, H_{int}] &= \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\vec{k}, \lambda} g_{\vec{k}, \lambda} a_{\vec{k}, \lambda} \otimes \underbrace{[|2\rangle\langle 2|, b^\dagger]}_{=-b} + g_{\vec{k}, \lambda}^* a_{\vec{k}, \lambda}^\dagger \otimes \underbrace{[|2\rangle\langle 2|, b]}_{=b^\dagger} \\ &= \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\vec{k}, \lambda} g_{\vec{k}, \lambda} a_{\vec{k}, \lambda} \otimes b^\dagger - adj. \end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{[J, H] = 0.} \quad (4.18.6)$$

Par conséquent, le "nombre de photons" (en comptant celui qui est éventuellement absorbé dans l'atome) est conservé; et nous pouvons travailler avec une base d'états du système formée d'états propres de  $H$  et de  $J$ .

Précisons quelques conséquences du résultat que l'on vient d'obtenir,  $[J, H] = 0$ . Soit  $\mathcal{H}_j$  le sous-espace de  $\mathcal{H}$  associé à la valeur propre  $j$  de  $J$ . Chaque sous-espace  $\mathcal{H}_j$  est stable sous la dynamique, c'est-à-dire que si  $|\Psi(0)\rangle \in \mathcal{H}_j$ , alors  $|\Psi(t)\rangle \in \mathcal{H}_j$  pour tout  $t$ . En particulier on voit que si  $\dim(\mathcal{H}_j) = 1$  alors  $|\Psi(t)\rangle = |\Psi(0)\rangle$  à une phase près.

<sup>1</sup>Il est clair que, quitte à redéfinir la phase globale de p.ex.  $|1\rangle$ , on peut toujours trouver  $\theta$  tel que  $\alpha = \sin \theta$  et  $\beta = \cos \theta$ . L'angle  $\theta$  est défini à un multiple de  $\pi$  près, car  $(\sin(\theta + \pi), \cos(\theta + \pi)) = (-\alpha, -\beta)$  donnent le même état physique que  $(\alpha, \beta)$ .

On sait d'ailleurs que, par définition d'observable, on a la décomposition

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{j=0}^{\infty} \mathcal{H}_j.$$

Le fait que  $[J, H] = 0$  implique que chaque  $\mathcal{H}_j$  peut à son tour être décomposé comme

$$\mathcal{H}_j = \bigoplus_{\nu(j) \in \mathcal{E}_j} \mathcal{H}_{\nu(j), j},$$

où  $\nu(j)$  est le nombre quantique indexant le spectre de  $H$  sur les états à  $j$  donné; c'est-à-dire

$$H|\Psi_{\nu(j), j}\rangle = E_{\nu(j)}|\Psi_{\nu(j), j}\rangle.$$

Si  $H$  et  $J$  constituent un ECOC (ce qui est le cas ici) alors  $\dim(\mathcal{H}_{\nu(j), j}) = 1$ .

Il est important de remarquer qu'à ce stade nous ne savons rien sur l'ensemble  $\mathcal{E}_j$  dans lequel  $\nu(j)$  prend ses valeurs, et qui naturellement est a priori différent pour des  $j$  différents. Dans la suite, nous simplifions la notation en écrivant par  $\nu$  au lieu de  $\nu(j)$ . Il faudra garder à l'esprit que l'indice  $\nu$  n'est pas indépendant de  $j$ .

### Points (ii) et (iii): base d'états du système

Notons tout d'abord qu'il y a un seul état associé à  $j = 0$ , qui est  $|\Omega_0\rangle \otimes |1\rangle$ . En d'autres termes  $\dim(\mathcal{H}_{j=0}) = 1$ , et donc la dynamique est triviale dans ce sous-espace. D'ailleurs, puisque  $[J, H] = 0$ , cet état doit être aussi état propre de  $H$ , et on vérifie sans problèmes que c'est le cas pour la valeur propre  $E = 0$ .

Nous nous bornons désormais à  $j \geq 1$ .

Nous savons que les états propres de  $J$  pour  $j \geq 1$  sont de la forme (4.18.5). En exigeant des états qui soient également états propres de  $H$ , nous allons trouver des restrictions sur les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$ , ainsi que sur les états  $|j$  photons) et  $|j - 1$  photons) (dans toute cette section on notera  $|j$  photons) =  $|j\rangle$ ). L'état

$$|\Psi_{\nu, j}\rangle = \sin \theta_{\nu, j} |j\rangle_{\nu} \otimes |1\rangle + \cos \theta_{\nu, j} |j - 1\rangle_{\nu} \otimes |2\rangle \quad (4.18.7)$$

est par construction état propre de  $J$ , et on demande aussi

$$H|\Psi_{\nu, j}\rangle = E_{\nu, j}|\Psi_{\nu, j}\rangle. \quad (4.18.8)$$

Pour la suite posons

$$\hat{A} = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\vec{k}, \lambda} g_{\vec{k}, \lambda} a_{\vec{k}, \lambda} \Rightarrow H_{int} = \hat{A} \otimes b^\dagger + \hat{A}^\dagger \otimes b.$$

Alors (pour les calculs qui suivent, on omet tous les indices):

$$\hat{A}^\dagger \otimes b|\Psi\rangle = \sin \theta \hat{A}^\dagger |j\rangle \otimes \underbrace{b|1\rangle}_{=0} + \cos \theta \hat{A}^\dagger |j - 1\rangle \otimes \underbrace{b|2\rangle}_{=|1\rangle}$$

$$\hat{A} \otimes b^\dagger |\Psi\rangle = \sin \theta \hat{A} |j\rangle \otimes |2\rangle,$$

et par conséquent

$$H_{int}|\Psi\rangle = \sin \theta \hat{A} |j\rangle \otimes |2\rangle + \cos \theta \hat{A}^\dagger |j - 1\rangle \otimes |1\rangle.$$

Par ailleurs,  $\mathbb{1} \otimes H_{at}|\Psi\rangle = \hbar\omega_0 \cos \theta |j - 1\rangle \otimes |2\rangle$ . Donc l'équation aux valeurs propres (4.18.8) s'écrit

$$\begin{aligned} H|\Psi\rangle - E|\Psi\rangle &= (H^{libre} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_{at} + H_{int} - E\mathbb{1})|\Psi\rangle = \\ &= [\sin \theta (H^{libre} - E)|j\rangle + \cos \theta \hat{A}^\dagger |j - 1\rangle] \otimes |1\rangle + \\ &\quad + [\cos \theta (H^{libre} + \hbar\omega_0 \mathbb{1} - E\mathbb{1})|j - 1\rangle + \sin \theta \hat{A} |j\rangle] \otimes |2\rangle = 0 \end{aligned}$$

ce qui donne les deux conditions  $[\dots] \otimes |1\rangle = 0$  et  $[\dots] \otimes |2\rangle = 0$ , i.e., en remettant les indices:

$$\sin \theta_{\nu, j} (H^{libre} - E_{\nu, j} \mathbb{1}) |j\rangle_{\nu} + \cos \theta_{\nu, j} \hat{A}^\dagger |j - 1\rangle_{\nu} = 0, \quad (4.18.9)$$

$$\sin \theta_{\nu, j} \hat{A} |j\rangle_{\nu} + \cos \theta_{\nu, j} [H^{libre} + (\hbar\omega_0 - E_{\nu, j}) \mathbb{1}] |j - 1\rangle_{\nu} = 0. \quad (4.18.10)$$

De la première de ces deux relations on déduit immédiatement que  $\sin \theta_{\nu, j} \neq 0$ : ceci entraînerait en effet  $\hat{A}^\dagger |j - 1\rangle_{\nu} = 0$ , ce qui est impossible étant donné l'expression de  $\hat{A}^\dagger$ .

En partant de l'équation (4.18.10), on obtient donc

$$\cos \theta_{\nu, j} |j - 1\rangle_{\nu} = -\sin \theta_{\nu, j} [H^{libre} + (\hbar\omega_0 - E_{\nu, j}) \mathbb{1}]^{-1} \hat{A} |j\rangle_{\nu}$$

ce qui inséré dans (4.18.9) donne

$$[H^{libre} - \hat{A}^\dagger [H^{libre} + (\hbar\omega_0 - E_{\nu, j}) \mathbb{1}]^{-1} \hat{A}] |j\rangle_{\nu} = E_{\nu, j} |j\rangle_{\nu} \quad (4.18.11)$$

### Point (iv): états avec $j = 1$

A partir de maintenant, nous nous intéressons exclusivement à des états qui décrivent la présence d'un seul photon (nous notons  $\theta_{\nu, 1} = \theta_{\nu}$  et  $E_{\nu, 1} = E_{\nu}$ ):

$$|\Psi_{\nu, 1}\rangle = \sin \theta_{\nu} |1 \text{ ph}\rangle_{\nu} \otimes |1\rangle + \cos \theta_{\nu} |\Omega_0\rangle \otimes |2\rangle. \quad (4.18.12)$$

Nous devons déterminer  $|1 \text{ ph}\rangle_\nu$  et  $\theta_\nu$  (ce dernier, rappelons-le, à un multiple de  $\pi$  près). En toute généralité,

$$|1 \text{ ph}\rangle_\nu = \sum_{\vec{k}, \lambda} \psi_\lambda^{(\nu)}(\vec{k}) |\vec{k}, \lambda\rangle. \quad (4.18.13)$$

On obtient alors, du fait que les  $|\vec{k}, \lambda\rangle$  sont linéairement indépendants:

$$\left. \begin{aligned} H^{\text{libre}} |1 \text{ ph}\rangle_\nu &= \sum_{\vec{k}, \lambda} \psi_\lambda^{(\nu)}(\vec{k}) \hbar\omega(\vec{k}) |\vec{k}, \lambda\rangle \\ \hat{A}^\dagger |\Omega_0\rangle &= \sum_{\vec{k}, \lambda} g_{\vec{k}, \lambda}^* |\vec{k}, \lambda\rangle \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(4.18.9)} \psi_\lambda^{(\nu)}(\vec{k}) = \cotg\theta_\nu \frac{1}{\sqrt{L^3}} \frac{g_{\vec{k}, \lambda}^*}{E_\nu - \hbar\omega(\vec{k})}$$

Par conséquent

$$|1 \text{ ph}\rangle_\nu = \cotg\theta_\nu \frac{1}{\sqrt{L^3}} \sum_{\vec{k}, \lambda} \frac{g_{\vec{k}, \lambda}^*}{E_\nu - \hbar\omega(\vec{k})} |\vec{k}, \lambda\rangle \quad (4.18.14)$$

A l'aide de ce résultat, nous pouvons connaître (en principe) le spectre, ainsi que la relation qui lie l'angle  $\theta_\nu$  à l'énergie  $E_\nu$ . En effet:

$$(4.18.10) : \hat{A} |1 \text{ ph}\rangle_\nu = \cotg\theta_\nu (E_\nu - \hbar\omega_0) |\Omega_0\rangle$$

$$(4.18.14) : \hat{A} |1 \text{ ph}\rangle_\nu = \cotg\theta_\nu \frac{1}{L^3} \sum_{\vec{k}', \lambda'} g_{\vec{k}', \lambda'} \sum_{\vec{k}, \lambda} \frac{g_{\vec{k}, \lambda}^*}{E_\nu - \hbar\omega(\vec{k})} \underbrace{a_{\vec{k}', \lambda'} | \vec{k}, \lambda\rangle}_{= \delta_{\vec{k}', \vec{k}} \delta_{\lambda', \lambda} |\Omega_0\rangle}$$

et donc le spectre est fourni par les  $E_\nu$  solutions de l'équation

$$E - \hbar\omega_0 = \frac{1}{L^3} \sum_{\vec{k}, \lambda} \frac{|g_{\vec{k}, \lambda}|^2}{E - \hbar\omega(\vec{k})} \equiv R(E). \quad (4.18.15)$$

Par ailleurs, en exigeant que l'état  $|1 \text{ ph}\rangle_\nu$  soit normalisé à 1, on obtient

$$1 = \frac{\cotg^2\theta_\nu}{L^3} \sum_{\vec{k}, \lambda} \frac{|g_{\vec{k}, \lambda}|^2}{(E_\nu - \hbar\omega(\vec{k}))^2} \Rightarrow \boxed{\text{tg}^2\theta_\nu = -\frac{dR}{dE}(E_\nu)}. \quad (4.18.16)$$

**Point (v): discussion qualitative du spectre de  $H$  pour  $j = 1$**

Remarquons tout d'abord que le spectre est non-dégénéré: en effet, on vient de trouver que

$$\psi_\lambda^{(\nu)}(\vec{k}) = \left( \sum_{\vec{k}', \lambda'} \frac{|g_{\vec{k}', \lambda'}|^2}{(E_\nu - \hbar\omega(\vec{k}'))^2} \right) \frac{g_{\vec{k}, \lambda}^*}{E_\nu - \hbar\omega(\vec{k})}$$

donc la donnée de  $E_\nu$  détermine entièrement un état et un seul. Il nous reste à étudier les solutions de (4.18.15). cette étude est illustré dans la figure (1)

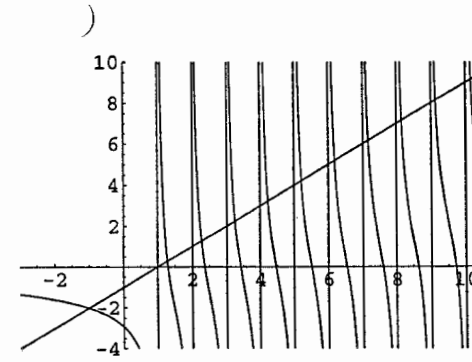


Figure 1: Fonctions  $E - \hbar\omega_0$  et  $R(E)$  pour  $|g_{\vec{k}, \lambda}| = \hbar\omega_0\sqrt{L^3}$  pour tout  $(\vec{k}, \lambda)$ . D'après (4.18.15), le spectre est constitué des valeurs de  $E$  auxquelles les deux courbes se croisent.

La fonction  $R(E)$  est une somme d'hyperboles, chaque hyperbole ayant son asymptote verticale en  $E = \hbar c|\vec{k}|$ . Il n'existe par conséquent pas d'asymptotes verticales pour  $E < 0$ . La condition (4.21) due à  $L < \infty$  implique que les valeurs possibles de  $|\vec{k}|$  forment un ensemble infini mais discret; elles sont en fait espacées de manière périodique, avec période  $\frac{2\pi}{L}$ .

Entre deux asymptotes verticales,  $R(E)$  est continue, monotone décroissante, et prend toutes les valeurs de  $+\infty$  à  $-\infty$ ; par conséquent, dans chaque intervalle où elle est définie,  $R(E)$  a un et un seul point d'intersection avec la droite  $E - \hbar\omega_0$ , ce point définissant une valeur propre  $E_\nu$  de  $H$ . En particulier, il y a un seul point d'intersection pour  $E \in ]-\infty, \hbar c k_{\min}[$ , avec  $k_{\min} > 0$  la plus petite valeur de  $|\vec{k}|$  pour laquelle  $g_{\vec{k}, \lambda} \neq 0$ ; par conséquent le spectre de  $H$  est borné inférieurement.

Dans l'hypothèse (utile pour la suite) que  $g_{\vec{k}, \lambda} \neq 0$  pour tout  $(\vec{k}, \lambda)$ , on conclut que le spectre de  $H$  pour les états tels que  $j = 1$  est un ensemble infini et discret, borné inférieurement, avec

$$E_0 < \dots < \hbar c(k - \frac{2\pi}{L}) < E_{\nu-1} < \hbar ck < E_\nu < \hbar c(k + \frac{2\pi}{L}) < \dots$$

Pour reprendre les notions introduites en petits caractères à la fin du paragraphe (i), on vient donc de trouver que  $\mathcal{E}_{j=1}$  est isomorphe à  $\mathbb{N}$  et que donc  $\dim\mathcal{H}_{j=1} = \infty$ .

Dans la limite  $L \rightarrow \infty$ , le spectre de  $H$  tend vers le continu  $\mathbb{R}_+$ .



**Point (vi): probabilité d'émission d'un photon**

Les états propres de  $J$  et  $H$ ,  $|\Psi_{\nu j}\rangle$ , définis en (4.18.7) forment une base orthonormée de  $\mathcal{H}$ , par conséquent on a la relation de fermeture  $\mathbb{1} = \sum_{\nu, j} |\Psi_{\nu j}\rangle \langle \Psi_{\nu j}|$ .

On prépare le système dans l'état  $|\Omega_0, 2\rangle \equiv |\Omega_0\rangle \otimes |2\rangle$  au temps  $t = 0$ . Vue (4.18.12) et le fait que  $\sin \theta_\nu \neq 0$ , on sait que cet état n'est pas stationnaire. La probabilité  $p(t)$  de trouver le système dans cet état au temps  $t$  est donnée par  $|A(t)|^2$  avec

$$\begin{aligned} A(t) &= \langle \Omega_0, 2 | U(t) | \Omega_0, 2 \rangle = \\ &= \sum_{\nu, j} \langle \Omega_0, 2 | e^{-\frac{i}{\hbar} H t} | \Psi_{\nu j} \rangle \langle \Psi_{\nu j} | \Omega_0, 2 \rangle = \sum_{\nu} e^{-\frac{i}{\hbar} E_\nu t} \cos^2 \theta_\nu \end{aligned} \quad (4.18.17)$$

car, vu (4.18.7),  $\langle \Psi_{\nu j} | \Omega_0, 2 \rangle = \delta_{j1} \cos \theta_\nu$ . Deux remarques:

1. On a donc  $|\Omega_0, 2\rangle = \sum_{\nu} \cos \theta_{\nu 1} |\Psi_{\nu 1}\rangle$ . La normalisation  $\sum_{\nu} \cos^2 \theta_{\nu 1} = 1$  est implicite dans nos calculs. Qualitativement on peut voir que cette somme contient beaucoup de termes infinitésimaux: si on reprend la figure 1, on voit qu'en allant vers les hautes énergies l'intersection des courbes se fait de plus en plus près des asymptotes, donc il existe  $\vec{k}$  tel que  $E_\nu \simeq \hbar\omega(\vec{k})$  pour  $\nu$  assez grand. Cela dans (4.18.16) entraîne  $|\tan \theta_\nu| \simeq \infty$  et donc  $\cos \theta_\nu \simeq 0$ . Notons finalement que cette condition de normalisation avec (4.18.17) donne bien  $p(t=0) = 1$ .
2. Si  $H_{int}$  couple un nombre fini d'états, on sait que  $p(t)$  sera une fonction périodique (les oscillations de Rabi dans le cas le plus simple). Nous allons considérer le cas d'un couplage avec un nombre infini d'états (cf. plus bas: choix de  $g_\lambda(\vec{k})$ ); dans ce cas,  $p(t)$  va être de la forme  $e^{-\gamma t}$ : voir point (vii).

D'autre part, les poles de la fonction

$$f(E) = \frac{\exp(-\frac{i}{\hbar} E t)}{E - R(E) - \hbar\omega_0}$$

sont les  $E_\nu$ , qui sont simples d'après la discussion qualitative du spectre. Alors

$$\text{Res}(f, E_\nu) = \frac{\exp(-\frac{i}{\hbar} E_\nu t)}{\frac{d}{dE}(E - R(E) - \hbar\omega_0)|_{E_\nu}} \stackrel{(4.18.16)}{=} e^{-\frac{i}{\hbar} E_\nu t} \cos^2 \theta_\nu$$

et par conséquent<sup>2</sup>

$$\frac{1}{2i\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} \frac{\exp(-\frac{i}{\hbar} E t)}{E - R(E) - \hbar\omega_0} dE = \sum_{\nu} e^{-\frac{i}{\hbar} E_\nu t} \cos^2 \theta_\nu \stackrel{(4.18.17)}{=} A(t).$$

<sup>2</sup>La condition  $\epsilon > 0$  vient du fait que nous voulons définir un chemin d'intégration fermé avec les poles à l'intérieur du contour. Pour la raison discutée plus bas, pour  $t > 0$  on doit fermer le contour par le demi-plan des imaginaires négatifs; cela oblige à prendre  $\epsilon > 0$ . Voir figure 3 (a), avec des poles discrets au lieu de la coupure.

Nous aboutissons donc à

$$p(t) = \left| \frac{1}{2i\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} \frac{e^{-\frac{i}{\hbar} E t}}{E - R(E) - \hbar\omega_0} dE \right|^2. \quad (4.18.18)$$

**Point (vii,a): limite  $L \rightarrow \infty$ , fonction  $R(E)$  pour un choix de couplage**

La limite  $L \rightarrow \infty$  donne

$$R(E) = \frac{1}{L^3} \sum_{\vec{k}, \lambda} \frac{|g_{\vec{k}, \lambda}|^2}{E - \hbar\omega(\vec{k})} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \sum_{\lambda} \frac{|g_{\lambda}(\vec{k})|^2}{E - \hbar\omega(\vec{k})}. \quad (4.18.19)$$

Pour continuer, nous devons donner explicitement les fonctions de couplage  $g_{\lambda}(\vec{k})$ . On choisit<sup>3</sup>

$$g_{\lambda}(\vec{k}) = g_0 |\vec{k}|^{-\frac{1}{2}}, \quad g_0 \in \mathbb{C}, \quad \forall \lambda. \quad (4.18.20)$$

On remplace ceci dans (4.18.19), puis on passe en coordonnées sphériques et on effectue l'intégration angulaire (qui est triviale); on aboutit à

$$\begin{aligned} R(E) &= \frac{|g_0|^2}{\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{1}{\sqrt{k}(E - \hbar ck)} = \\ &= \frac{|g_0|^2}{\hbar c \pi^2} \int_{-\infty}^\infty dy \frac{1}{(\epsilon - y^2)} = \frac{|g_0|^2}{\hbar c \pi^2} \int_{-\infty}^\infty dy \frac{1}{\underbrace{(\sqrt{\epsilon - y})(\sqrt{\epsilon + y})}_{f(y)}}. \end{aligned} \quad (4.18.21)$$

où pour la deuxième égalité on a effectué le changement de variable  $y = \sqrt{k}$ , et on a tenu compte de la parité. On a aussi noté  $\epsilon = \frac{E}{\hbar c}$ ; rappelons que, dans le but de résoudre (4.18.18),  $\epsilon$  est complexe:  $\epsilon = \epsilon_0 e^{i\phi}$  avec  $\epsilon_0 > 0$ . Pour l'instant, la détermination de la racine n'est pas précisée.

Pour résoudre (4.18.21), on se donne  $\Gamma_D$ , un contour fermé et orienté positivement dans le plan complexe<sup>4</sup>, défini par exemple par  $\Gamma_D = [-D, D] \cup C_D$ , avec  $[-D, D]$  l'intervalle orienté dans l'axe réel et  $C_D$  le demi cercle de rayon  $D$  dans le demi-plan supérieur, orienté de  $+D$  à  $-D$ . Alors pour  $D$  assez grand

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_D} f(z) dz &= \int_{-D}^D f(y) dy + \int_{C_D} f(z) dz \\ \parallel &\quad \downarrow D \rightarrow \infty \quad \downarrow D \rightarrow \infty \\ 2\pi i \text{Res}(f, \sigma\sqrt{\epsilon}) &\propto R(E) \quad 0 \end{aligned}$$

<sup>3</sup>L'explication de ce choix sera donnée plus loin.

<sup>4</sup>Il ne faut pas confondre ce plan complexe défini pour  $y$  avec celui défini pour  $E$ .

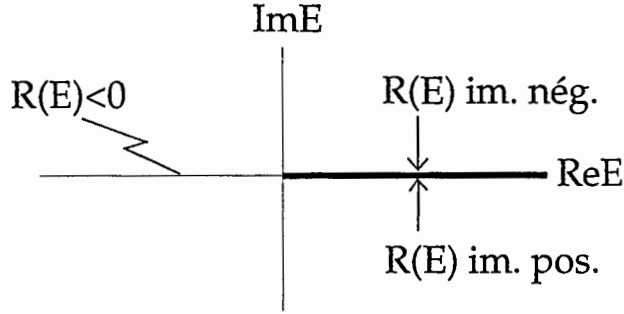


Figure 2: Comportement de  $R(E) = -iR/\sqrt{E}$ .

car le pole qui se trouve dans le demi-plan supérieur est  $+\sqrt{\epsilon}$  pour la détermination positive de la racine,  $-\sqrt{\epsilon}$  pour la détermination négative. Avec<sup>5</sup>  $\text{Res}(f, \sigma\sqrt{\epsilon}) = -\frac{\sigma}{2\sqrt{\epsilon}}$  on obtient  $\int f(y)dy = -\frac{\pi i \sigma}{\sqrt{\epsilon}}$ . En choisissant la *détermination positive* de la racine ( $\sigma = +1$ ) on trouve finalement dans (4.18.21)

$$R(E) = -\frac{i|g_0|^2}{\sqrt{\hbar c \pi}} \frac{1}{\sqrt{E}} \equiv -i \frac{R}{\sqrt{E}}, \quad \sqrt{E} = \sqrt{E_0} e^{i\phi/2}. \quad (4.18.22)$$

Remarquons que pour  $E = -E_0 < 0$  on aura  $\sqrt{E} = i\sqrt{E_0}$  et donc  $R(E) < 0$ ; ceci aurait pu se voir en posant  $E < 0$  dans (4.18.19). Cette condition permet en fait de fixer la coupure de  $R(E)$  dans le plan complexe; le comportement de  $R(E)$  est schématisé dans la figure 2.

#### Point (vii,b): calcul de $A(t)$

Nous devons calculer

$$A(t) = \frac{1}{2i\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \lim_{D \rightarrow \infty} \int_{-D+ic}^{D+ic} \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}Et}}{E + iR\frac{1}{\sqrt{E}} - \hbar\omega_0} dE. \quad (4.18.23)$$

Soit  $\Gamma_D$  le chemin défini dans la figure 3 (a). Pour  $t > 0$ , la contribution de la fonction sur le demi-cercle s'annule lorsque  $D \rightarrow \infty$ , puisque  $\text{Re}(e^{-\frac{i}{\hbar}Et})$  tend vers 0. En toute rigueur,  $\Gamma_D$  ne peut pas être fermé, puisqu'il traverse la coupure. Cependant d'un côté comme de l'autre de la coupure  $R(E) \rightarrow 0$  lorsque  $|E| \rightarrow \infty$ . Il est dès lors habituel en physique de considérer que le chemin est à *tout effet pratique* fermé pour  $|E|$  assez grand. On introduit là un élément

<sup>5</sup>On rappelle que si  $a$  est un pole simple de  $f$  alors  $\text{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z)$ .

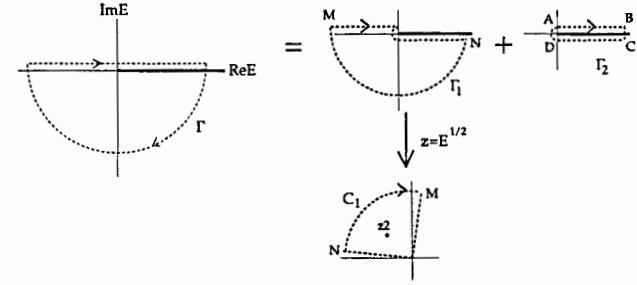


Figure 3: Contours utilisés pour le calcul de  $A(t)$ .

interprétatif (les interactions disparaissent à haute énergie) pour s'affranchir d'un problème mathématique: c'est une démarche qui peut paraître choquante, et qui l'est dans un certain sens, mais qui est employée régulièrement dans ce genre de calculs. Le résultat est, quant à lui, hautement prédictif lorsque le modèle est plus réaliste que celui qui est considéré ici. Avec cette précaution, nous pouvons donc écrire (avec  $F(E) = \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}Et}}{E + iR/\sqrt{E} - \hbar\omega_0}$ )

$$\lim_{D \rightarrow \infty} \int_{-D+ic}^{D+ic} F(E) dE = \lim_{D \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_D} F(E) dE. \quad (4.18.24)$$

Le calcul du terme de droite est schématisé dans la figure 3 (b). Commençons par le chemin  $\Gamma_1$ . Effectuons le changement de variable<sup>6</sup>  $z = \sqrt{E}$ . Alors

$$\int_{\Gamma_1} F(E) dE = \int_{C_1} \frac{2e^{-\frac{i}{\hbar}z^2t}}{z^3 - \hbar\omega_0 z + iR} z^2 dz \equiv \int_{C_1} G(z) dz = -2\pi i \sum_k \text{Res}(G, z_k)$$

avec  $z_k$  les poles de  $G(z)$  qui se trouvent à l'intérieur du chemin  $C_1$ . Les poles sont les solutions de  $P(z) \equiv z^3 - \hbar\omega_0 z + iR = 0$ , avec  $R > 0$ . L'analyse est donnée en appendice; on trouve que les trois poles sont

$$\begin{aligned} z_0 &= -ib_0 \\ z_1 &= a + i\frac{b_0}{2}, \quad a = \sqrt{\frac{3}{4}b_0^2 + \hbar\omega_0}, \quad b_0 > 0 \text{ tel que } b_0^3 + \hbar\omega_0 b_0 = R. \\ z_2 &= -a + i\frac{b_0}{2} \end{aligned} \quad (4.18.25)$$

Donc seul le pole  $z_2$  se trouve à l'intérieur de  $C_1$ , pour  $D$  assez grand. Ainsi finalement

$$\lim_{D \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} F(E) dE = -\frac{2e^{-\frac{i}{\hbar}z_2^2t} z_2^2}{(z_2 - z_0)(z_2 - z_1)} = A(b_0, t) e^{-ab_0 t/\hbar}. \quad (4.18.26)$$

<sup>6</sup>On parle de passage à la *variable d'uniformisation*.

avec

$$A(b_0, t) = -\frac{a(2b_0^2 + \hbar\omega_0) + i\hbar\omega_0 b_0/2}{a(3b_0^2 + \hbar\omega_0)} e^{-\frac{i}{\hbar}(a^2 - b_0^2/4)t}.$$

Passons à l'évaluation de l'intégrale sur le chemin  $\Gamma_2 = A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ . On paramétrise l'arc de cercle  $D \rightarrow A$  par  $E = \epsilon e^{i\theta}$  avec  $\epsilon$  fixé et  $\theta : \frac{3\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2}$ . On vérifie sans problèmes que  $F(E) \frac{dE}{d\theta}$  tend alors vers 0 si  $\epsilon$  tend vers 0. Le segment  $B \rightarrow C$  est paramétrisé par  $E = D + ix$ , avec  $D$  fixé et  $x : +\epsilon \rightarrow -\epsilon$ . Aussi dans ce cas,  $F(E) \frac{dE}{dx}$  tend vers 0 lorsque  $D$  tend vers l'infini.

Le segment  $A \rightarrow B$  est paramétrisé par  $E = x + i\epsilon$  avec  $\epsilon$  fixé et  $x : 0 \rightarrow D$ , donc

$$\int_{AB} F(E) dE = \int_0^D dx \frac{e^{-i\frac{1}{\hbar}x} e^{\epsilon t}}{x + i\epsilon + iR/\sqrt{x + i\epsilon} - \hbar\omega_0}.$$

Pour le segment  $C \rightarrow D$ , il suffit de remplacer  $\epsilon$  par  $-\epsilon$  et d'inverser les bornes. Or sur le feuillet physique, c'est-à-dire sans traverser la coupure, on a<sup>7</sup>

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sqrt{x + i\epsilon} = \sqrt{x}, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sqrt{x - i\epsilon} = -\sqrt{x}.$$

Donc dans la limite  $\epsilon \rightarrow 0$  on trouve après de l'algèbre triviale

$$\begin{aligned} \lim_{D \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} F(E) dE &= -\frac{R}{\pi} \int_0^\infty e^{-i\frac{1}{\hbar}x} \frac{\sqrt{x}}{x(x - \hbar\omega_0)^2 + R^2} dx \\ &= -\frac{\alpha^{3/2}}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{y e^{-iy}}{\alpha y (\alpha y - \frac{\hbar\omega_0}{\epsilon})^2 + 1}. \end{aligned} \quad (4.18.27)$$

Pour la deuxième égalité on a effectué le changement de variable  $\frac{1}{\hbar}x = y$ , et on a défini le paramètre sans dimension  $\alpha = \frac{\hbar}{\epsilon t}$ , avec  $\mathcal{E} = R^{2/3}$ . On remarquera que les deux limites  $\mathcal{E}t \rightarrow 0$  et  $\mathcal{E}t \rightarrow \infty$  ne posent aucun problème.

**Point (vii,c): étude des contributions à  $A(t)$**

Résumons-nous: on a trouvé

$$A(t) = A(b_0, t) e^{-ab_0 t/\hbar} - \frac{\alpha(t)^{3/2}}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{y e^{-iy}}{\alpha(t)y (\alpha(t)y - \frac{\hbar\omega_0}{\epsilon})^2 + 1}. \quad (4.18.28)$$

avec  $b_0$  solution réelle de  $b_0^3 + \hbar\omega_0 b_0 = \mathcal{E}^{3/2}$  et  $\alpha(t) = \frac{\hbar}{\epsilon t}$ . On voit immédiatement que  $A(t)$  tend vers 0 pour  $t \rightarrow \infty$ . Le but de ce paragraphe est de se livrer à une analyse qualitative du

<sup>7</sup>Si on note  $x + i\epsilon = re^{i\alpha}$ , alors sans traverser la coupure on arrive à  $x - i\epsilon = re^{-i\alpha + 2\pi i}$ . En prenant la racine avec détermination positive, on a bien le signe  $-$  pour  $x - i\epsilon$ .

comportement de deux termes qui composent  $A(t)$  pour  $t$  "assez grand". Dans le deuxième terme, la décroissance se fait sur un temps typique  $\tau_2 \approx \hbar/\mathcal{E}$ . Pour le premier terme, la constante de temps est  $\tau_1 = \frac{\hbar}{ab_0}$ ; pour l'évaluer, il faut distinguer les limites du couplage fort et du couplage faible.

- **Limite du couplage faible:**  $\mathcal{E} \ll \hbar\omega_0$ . On peut négliger  $b_0^3$  pour obtenir  $b_0 = \frac{\mathcal{E}^{3/2}}{\hbar\omega_0}$ . Alors

$$\tau_1^{-1} = \frac{\mathcal{E}^{3/2}}{\hbar\sqrt{\hbar\omega_0}} = \tau_2^{-1} \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{\hbar\omega_0}}.$$

Donc  $\tau_1$  est beaucoup plus long que  $\tau_2$ ; autrement dit, au bout d'un temps  $t > \tau_2$  on peut négliger le deuxième terme, et  $A(t)$  est essentiellement donné par le premier terme.

- **Limite du couplage fort:**  $\mathcal{E} \gg \hbar\omega_0$ . Dans ce cas on néglige le terme  $\hbar\omega_0 b_0$  pour trouver  $b_0 = \mathcal{E}^{1/2}$ . Donc:

$$\tau_1^{-1} = \frac{\mathcal{E}}{\hbar} \sqrt{\frac{3}{4}} \approx \tau_2^{-1}.$$

Alors en la limite du couplage fort les deux termes s'équivalent et il faudrait aller davantage dans le détail, ce qui n'est pas notre but.

**Point (vii,d): expression de  $p(t)$  et commentaires**

On a  $p(t) = |A(t)|^2$ . L'analyse du paragraphe précédent montre que  $p(t) \rightarrow 0$  pour  $t \rightarrow \infty$ . Dans le cas du couplage faible on peut écrire

$$p(t) \sim e^{-t/\tau(b_0)}, \quad \mathcal{E} \ll \hbar\omega_0, \quad t > \hbar/\mathcal{E} \quad \tau(b_0)^{-1} = \frac{R}{\hbar\sqrt{\hbar\omega_0}} = \frac{|g_0|^2}{\hbar\pi\sqrt{\epsilon\omega_0}}. \quad (4.18.29)$$

Le résultat général demande plusieurs commentaires:

- La probabilité de trouver l'atome dans l'état excité dans lequel il a été préparé diminue avec le temps, la constante de temps étant d'autant plus courte que l'interaction est plus forte. Le formalisme est entièrement réversible, la décroissance exponentielle vient du fait qu'on couple l'atome à un nombre infini d'états du champ. Dans une interprétation physique, on dira qu'il y a desexcitation de l'atome avec émission d'un photon, et que  $\tau(b_0)$  mesure la durée de vie de l'état excité.

- Le choix (4.18.20) du couplage a été fait pour des raisons de commodité: la fonction  $k^{-5/4}$  est d'une part suffisamment décroissante pour éviter des divergences qui demanderaient des procédures de renormalisation, et d'autre part elle donne dans  $R(E)$  la fonction non-méromorphe la plus simple, qui est la racine carrée.

#### Appendice: étude du polynôme $P(z)$

Nous devons factoriser le polynôme  $P(z) = z^3 - \hbar\omega_0 z + iR$ , avec  $R > 0$ . Posons  $z = a + ib$ , alors

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a[a^2 - (3b^2 + \hbar\omega_0)] = 0 \\ 3a^2b - b^3 - \hbar\omega_0 b - R = 0 \end{cases} \quad (4.18.30)$$

La première solution s'obtient pour  $a = 0$  et  $b$  solution réelle de  $b^3 + \hbar\omega_0 b + R = 0$ . Ce polynôme en  $b$  est toujours croissant, donc la solution est unique; elle est négative car tous les coefficients sont positifs. On notera donc

$$z_0 = -ib_0, \quad b_0 > 0 \quad \text{tel que} \quad b_0^3 + \hbar\omega_0 b_0 = R.$$

Pour les autres deux racines, nous savons par la première équation (4.18.30) que  $a_1 = -a_2 = a$  avec  $a^2 = 3b_{1,2}^2 + \hbar\omega_0$ , ce qui entraîne  $b_1^2 = b_2^2$ . Par ailleurs en insérant  $a^2$  dans la deuxième équation (4.18.30) on trouve que  $b_{1,2}$  doivent satisfaire  $(2b)^3 + (2b)\hbar\omega_0 = R$  et donc  $b_1 = b_2 = \frac{b_0}{2}$ . En conclusion:

$$\begin{aligned} z_1 &= a + i \frac{b_0}{2} \\ z_2 &= -a + i \frac{b_0}{2} \end{aligned} \quad \text{avec} \quad a = \sqrt{\frac{3}{4}b_0^2 + \hbar\omega_0}.$$

## Exercice 5.1

Les états cohérents de l'oscillateur harmonique sont les états propres de l'opérateur

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(p - i\omega q) \quad (5.1.1)$$

dont le spectre est  $\mathbb{C}$ . Par conséquent

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad \alpha \in \mathbb{C}. \quad (5.1.2)$$

Notons qu'en vertu de (5.1.1) on a  $\sqrt{2\hbar\omega}\langle a \rangle_\alpha = \langle p \rangle_\alpha - i\omega\langle q \rangle_\alpha$  et donc

$$\langle q \rangle_\alpha = -\sqrt{\frac{2\hbar}{\omega}} \operatorname{Im}(\alpha) \quad (5.1.3)$$

$$\langle p \rangle_\alpha = \sqrt{2\hbar\omega} \operatorname{Re}(\alpha) \quad (5.1.4)$$

### Fonction d'onde et densité de probabilité en représentation $q$

En représentation  $q$ , l'équation (5.1.2) devient

$$\frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} \left( -i\hbar \frac{d}{dx} - i\omega x \right) \psi_\alpha(x) = \alpha \psi_\alpha(x)$$

ce qui après réarrangement donne, en posant  $k = \sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}$ :

$$\frac{d}{dx} \psi_\alpha(x) = (-k^2 x + ik\alpha\sqrt{2}) \psi_\alpha(x) \quad (5.1.5)$$

La solution de cette équation différentielle est

$$\psi_\alpha(x) = C \exp \left[ -\frac{k^2}{2} \left( x - i \frac{\alpha\sqrt{2}}{k} \right)^2 \right], \quad (5.1.6)$$

avec  $C$  une constante qui assure la normalisation. Alors la distribution de probabilité par rapport à la position est

$$\begin{aligned} |\psi_\alpha(x)|^2 &= |C|^2 \exp \left[ \frac{k^2}{2} \left[ \left( x - i \frac{\alpha\sqrt{2}}{k} \right)^2 + \left( x + i \frac{\alpha^*\sqrt{2}}{k} \right)^2 \right] \right] = \\ &= C' \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x + \operatorname{Im}(\alpha)\sqrt{\frac{2\hbar}{\omega}}}{\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

où on a complété du carré et redéfini la constante. Donc la distribution de probabilité est une gaussienne centrée en  $\langle q \rangle_\alpha$  et de largeur<sup>1</sup>  $\Delta q = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}$ .

<sup>1</sup>On rappelle que toute gaussienne peut être mise sous la forme  $\exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x-\langle x \rangle}{\Delta x} \right)^2 \right]$ . La notation n'est pas ambiguë: il s'agit bien du même  $\Delta q$  qui intervient dans les inégalités d'Heisenberg.

### Fonction d'onde et densité de probabilité en représentation $p$

La fonction d'onde  $\hat{\psi}_\alpha(p)$  en représentation  $p$  est la transformée de Fourier de  $\psi_\alpha(x)$ . Cependant, nous avons une méthode plus directe d'obtenir ce résultat. En effet, l'équation (5.1.2) en représentation  $p$  (on rappelle que  $q = i\hbar \frac{d}{dp}$ ) devient après réarrangement, en posant  $k = \sqrt{\frac{1}{\hbar\omega}}$ :

$$\frac{d}{dp} \hat{\psi}_\alpha(p) = (-k^2 p + k\alpha\sqrt{2}) \hat{\psi}_\alpha(p) \quad (5.1.8)$$

ce qui est formellement identique à (5.1.5). Donc on a immédiatement

$$\hat{\psi}_\alpha(p) = D \exp \left[ -\frac{k^2}{2} \left( p - \frac{\alpha\sqrt{2}}{k} \right)^2 \right], \quad (5.1.9)$$

$$|\hat{\psi}_\alpha(p)|^2 = D' \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{p - \operatorname{Re}(\alpha)\sqrt{2\hbar\omega}}{\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}} \right)^2 \right]; \quad (5.1.10)$$

la distribution de probabilité est une gaussienne centrée en  $\langle p \rangle_\alpha$  et de largeur  $\Delta p = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}$ .

### Evolution

Pour traiter la dynamique, il suffit de remarquer qu'un état cohérent reste cohérent au cours de l'évolution. En effet:

$$a|\alpha(t)\rangle \stackrel{\text{def}}{=} a e^{-iHt/\hbar} |\alpha\rangle \stackrel{(4.70)}{=} e^{-i\omega t} e^{-iHt/\hbar} a |\alpha\rangle \stackrel{(5.1.2)}{=} \alpha e^{-i\omega t} \underbrace{e^{-iHt/\hbar} |\alpha\rangle}_{|\alpha(t)\rangle}.$$

Donc tous les résultats précédents restent valables au cours du temps quitte à remplacer  $\alpha$  par  $\alpha(t) = \alpha e^{-i\omega t}$ . En particulier

$$\langle q \rangle_\alpha(t) = -\sqrt{\frac{2\hbar}{\omega}} \operatorname{Im}(\alpha(t)) = \underbrace{\sqrt{\frac{2\hbar}{\omega}} \operatorname{Re}(\alpha)}_{\langle q \rangle_\alpha(0)} \sin \omega t - \underbrace{\sqrt{\frac{2\hbar}{\omega}} \operatorname{Im}(\alpha)}_{\langle q \rangle_\alpha(0)} \cos \omega t \quad (5.1.11)$$

$$\langle p \rangle_\alpha(t) = \sqrt{2\hbar\omega} \operatorname{Re}(\alpha(t)) = \underbrace{\sqrt{2\hbar\omega} \operatorname{Re}(\alpha)}_{\langle p \rangle_\alpha(0)} \cos \omega t + \underbrace{\sqrt{2\hbar\omega} \operatorname{Im}(\alpha)}_{-\langle p \rangle_\alpha(0)} \sin \omega t \quad (5.1.12)$$

et  $\Delta q(t) = \Delta q$ ,  $\Delta p(t) = \Delta p$ . Donc la distribution de probabilité, aussi bien en  $x$  qu'en  $p$ , est une gaussienne de largeur constante dont le centre suit la dynamique classique. Dans la limite  $\hbar \rightarrow 0$  on a  $\Delta q \rightarrow 0$ ,  $\Delta p \rightarrow 0$ .

## Exercice 5.2

Soit  $\Psi(z)$  la série de Taylor définie par

$$\Psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Psi_n}{\sqrt{n!}} z^n, \quad z \in \mathbb{C} \quad (5.2.1)$$

où  $\Psi_n = \langle n | \Psi \rangle$ , et  $|n\rangle$  un état propre de  $N = a^\dagger a$ .

**Point (i): rayon de convergence**

Le rayon de convergence  $R$  est défini par

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{|\Psi_n|}{\sqrt{n!}} \right)^{1/n}. \quad (5.2.2)$$

Comme  $|\Psi_n| \leq 1 \forall n$ , il vient

$$0 \leq \frac{1}{R} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n!)^{1/n}} \quad (5.2.3)$$

En utilisant la formule de Stirling  $n! \geq \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$  on obtient

$$\frac{1}{(n!)^{1/n}} \leq \frac{\sqrt{e}}{(2\pi n)^{1/4n} \sqrt{n}}$$

qui tend vers 0 pour  $n \rightarrow \infty$ . Par conséquent dans (5.2.3) on obtient bien  $R = \infty$ .

**Point (ii): produit scalaire**

En utilisant la décomposition  $|\Psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n |n\rangle$ , on a  $\langle \Phi | \Psi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n^* \Psi_n$ .

D'autre part, en introduisant les séries  $\Phi(z)$  et  $\Psi(z)$  dans l'intégrale et en passant en coordonnées polaires  $z = re^{i\theta}$ , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int \int dx dy e^{-|z|^2} \Phi^*(z) \Psi(z) &= \frac{1}{\pi} \sum_{n,m} \frac{\Phi_n^* \Psi_m}{\sqrt{n!m!}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta e^{i\theta(m-n)}}_{= 2\pi \delta_{m,n}} \int_0^\infty dr e^{-r^2} r^{n+m+1} = \\ &\equiv 2 \sum_n \frac{\Phi_n^* \Psi_n}{n!} I_n \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n^* \Psi_n \end{aligned}$$

où pour l'égalité réperée par \* on utilise les propriétés de la fonction Gamma d'Euler:

$$I_n = \int_0^\infty dr r^{2n+1} e^{-r^2} = \frac{1}{2} \int_0^\infty dx x^n e^{-x} = \frac{n!}{2}.$$

On a donc obtenu le résultat énoncé.

## Point (iii): représentation de Bargman

Nous allons montrer que

$$\begin{aligned} \mathcal{B} : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{E} \\ |\Psi\rangle &\longrightarrow \Psi(z) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces de Hilbert entre l'espace abstrait  $\mathcal{H}$  qui décrit l'oscillateur harmonique et l'espace des fonctions entières, noté ici  $\mathcal{E}$ . Il suffit de vérifier que:

1.  $\mathcal{B}$  est linéaire. Ceci est trivial.
2.  $\mathcal{B}$  conserve le produit scalaire. Ceci a été montré au point (ii).
3. Le noyau de  $\mathcal{B}$  est trivial; i.e. qu'au vecteur  $0 \in \mathcal{H}$  correspond biunivoquement la fonction  $0 \in \mathcal{E}$ . Or, puisque  $\Psi(z)$  est une fonction analytique, son développement en puissances de  $z$  est unique. En particulier,  $\Psi(z) = 0$  si et seulement si  $\Psi_n = 0 \forall n$ .

**Points (iv) et (v): opérateurs  $a$  et  $a^\dagger$ , et états cohérents en représentation  $\mathcal{B}$**

Calculons d'abord:

$$\frac{d}{dz} \Psi(z) = \sum_n \Psi_n \frac{nz^{n-1}}{\sqrt{n!}} = \sum_n \Psi_{n+1} \frac{n+1}{\sqrt{(n+1)!}} z^n.$$

On a alors, toujours avec  $|\Psi\rangle = \sum_n \Psi_n |n\rangle$ :

$$a|\Psi\rangle = \sum_n \Psi_{n+1} \sqrt{n+1} |n\rangle \xrightarrow{\mathcal{B}} \sum_n \Psi_{n+1} \frac{n+1}{\sqrt{(n+1)!}} z^n = \frac{d}{dz} \Psi(z) \quad (5.2.4)$$

$$a^\dagger |\Psi\rangle = \sum_n \Psi_n \sqrt{n+1} |n+1\rangle \xrightarrow{\mathcal{B}} \sum_n \Psi_n \sqrt{n+1} \frac{z^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} = z \Psi(z). \quad (5.2.5)$$

Le problème aux valeurs propres pour les états cohérents  $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$  se traduit par

$$\frac{d}{dz} \Psi_\alpha(z) = \alpha \Psi_\alpha(z) \Rightarrow \Psi_\alpha(z) = c(\alpha) e^{-\alpha z}$$

où on vérifie par normalisation que  $c(\alpha) = e^{-|\alpha|^2/2}$ . Notons également que les états propres de  $N = a^\dagger a$  sont les solutions de  $z \frac{d}{dz} \Psi(z) = c \Psi(z)$ , i.e. les  $\Psi(z) = C z^c$ . Or cette fonction n'est analytique que pour  $c \in \mathbb{N}$ , ce qui donne le spectre de  $N$ . Finalement, on voit immédiatement avec (5.2.5) que  $a^\dagger$  n'a pas de vecteurs propres.

## Exercice 5.5

Il s'agit d'un simple constat. Plus généralement:

Soient  $\vec{E}_1$  et  $\vec{E}_2$  deux solutions des équations de Maxwell. Alors  $\vec{E}_3 = c_1\vec{E}_1 + c_2\vec{E}_2$  est aussi une solution. Comme cas particulier, on retrouve la situation envisagée dans l'énoncé: un champ de polarisation circulaire peut être écrit comme la somme de deux champs de polarisation linéaire.

Or, soit  $|\alpha_i\rangle$  est l'état cohérent associé à  $\vec{E}_i$ ; c'est-à-dire  $\vec{E}_i = \langle \alpha_i | \vec{E}_{op} | \alpha_i \rangle$ . Il est manifeste que  $|\alpha_3\rangle$  ne peut pas être écrit sous la forme  $\gamma_1|\alpha_1\rangle + \gamma_2|\alpha_2\rangle$ : on peut le vérifier par calcul direct, ou simplement en remarquant que la superposition linéaire de deux états cohérents distincts n'est jamais un état cohérent.

Conclusion: il n'y a pas de relation entre la superposition des champs classiques (qui est une conséquence de la linéarité des équations d'évolution de Maxwell) et la superposition des états quantiques (qui est une conséquence du fait que le système est décrit par un espace de Hilbert). *Conséquence "dramatique"*: les interférences de Young avec la lumière classique *ne sont pas* une manifestation du caractère quantique de la lumière!

## Exercice 5.6

En l'absence de champ extérieur, l'hamiltonien qui régit l'évolution du système "champ + moment magnétique" devient

$$H = \underbrace{\sum_{\vec{k}, \lambda} \hbar \omega(\vec{k}) N_{\vec{k}, \lambda}}_{H^{\text{libre}}} \otimes \mathbb{1} - \mu \vec{B}(\vec{0}) \otimes \vec{\sigma}. \quad (5.6.1)$$

On rappelle  $\langle \alpha.. | a_{\vec{k}, \lambda} | \alpha.. \rangle = \alpha_{\vec{k}, \lambda}$  et  $\langle \alpha.. | a_{\vec{k}, \lambda}^\dagger | \alpha.. \rangle = \alpha_{\vec{k}, \lambda}^*$ . On utilise aussi (cf. exercice 4.4) le fait que  $(\hat{k} \wedge \vec{e}_\lambda(\vec{k})) \cdot \vec{v} = (\vec{v} \wedge \hat{k}) \cdot \vec{e}_\lambda(\vec{k})$  est la composante de  $\vec{v} \wedge \hat{k}$  selon  $\vec{e}_\lambda(\vec{k})$ . Du fait que  $\vec{v} \wedge \hat{k}$  est orthogonal à  $\hat{k}$  suivent alors:

$$\sum_\lambda [(\hat{k} \wedge \vec{e}_\lambda(\vec{k})) \cdot \vec{v}] \vec{e}_\lambda(\vec{k}) = \vec{v} \wedge \hat{k}; \quad (5.6.2)$$

$$\sum_\lambda |(\hat{k} \wedge \vec{e}_\lambda(\vec{k})) \cdot \vec{v}|^2 = |\vec{v} \wedge \hat{k}|^2. \quad (5.6.3)$$

Points (i) et (iii): minimum de l'énergie sur les états  $|\alpha.. \rangle \otimes |m_s \rangle$

On note  $|\alpha.. \rangle \otimes |m_s \rangle = |\alpha^0.., m_s \rangle$ . On a:

$$\langle \alpha^0.., m_s | H | \alpha^0.., m_s \rangle = \langle \alpha.. | H^{\text{libre}} | \alpha.. \rangle - \mu \langle \alpha.. | \vec{B}(\vec{0}) | \alpha.. \rangle \cdot \langle m_s | \vec{\sigma} | m_s \rangle = \sum_{\vec{k}, \lambda} E_\lambda(\vec{k}) \quad (5.6.4)$$

avec

$$E_\lambda(\vec{k}) = \hbar \omega(\vec{k}) |\alpha_{\vec{k}, \lambda}|^2 - \mu \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega(\vec{k})\epsilon_0 L^3}} \langle m_s | \vec{\sigma} | m_s \rangle \cdot [i(\vec{k} \wedge \vec{e}_\lambda(\vec{k})) \alpha_{\vec{k}, \lambda} + \text{c.c.}] \quad (5.6.5)$$

On minimise  $\langle \alpha^0.., m_s | H | \alpha^0.., m_s \rangle$  en minimisant chaque  $E_\lambda(\vec{k})$  par rapport à  $\alpha_{\vec{k}, \lambda}$ . On calcule alors  $\frac{d}{d\alpha_{\vec{k}, \lambda}} E_\lambda(\vec{k}) = 0$  en considérant  $\alpha_{\vec{k}, \lambda}$  et  $\alpha_{\vec{k}, \lambda}^*$  comme des variables indépendantes<sup>1</sup>. On trouve:

$$\alpha_{\vec{k}, \lambda}^0 = -\mu i \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega(\vec{k})\epsilon_0 L^3}} \frac{\langle m_s | \vec{\sigma} | m_s \rangle \cdot (\vec{k} \wedge \vec{e}_\lambda(\vec{k}))}{\hbar \omega(\vec{k})}. \quad (5.6.6)$$

La valeur moyenne correspondante de l'énergie se calcule sans difficulté; avec (5.6.3):

$$\langle \alpha^0.., m_s | H | \alpha^0.., m_s \rangle = -\frac{\mu_0 \mu^2}{L^3} \sum_{\vec{k}} |\langle m_s | \vec{\sigma} | m_s \rangle \wedge \hat{k}|^2.$$

<sup>1</sup>Si cela paraît étrange, on pensera que  $\alpha_{\vec{k}, \lambda}$  contient deux nombres réels qui peuvent effectivement être modifiés indépendamment. Puisque  $E_\lambda(\vec{k})$  est réel, la condition  $\frac{d}{d\alpha_{\vec{k}, \lambda}} E_\lambda(\vec{k}) = 0$  est équivalente.

Or puisque les  $|\alpha^0.., m_s \rangle$  de la somme sont non-négatifs, si on restreint la somme aux vecteurs  $\vec{k}'$  qui sont orthogonaux à  $\langle m_s | \vec{\sigma} | m_s \rangle$  on obtient une borne inférieure:

$$\sum_{\vec{k}} |\dots|^2 \geq \sum_{\vec{k}'} |\dots|^2 \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \infty.$$

Point (ii): valeur moyenne de  $\vec{A}(\vec{x}) \otimes \mathbb{1}$  sur  $|\alpha^0.., m_s \rangle$

Le calcul ne présente aucun piège:

$$\begin{aligned} \langle \alpha^0.., m_s | \vec{A}(\vec{x}) \otimes \mathbb{1} | \alpha^0.., m_s \rangle &= \langle \alpha^0.. | \vec{A}(\vec{x}) | \alpha^0.. \rangle = \sum_{\vec{k}, \lambda} \alpha_{\vec{k}, \lambda}^0 \vec{A}_\lambda(\vec{k}, \vec{x}) + \text{c.c.} = \\ &\stackrel{(5.6.2)}{=} \frac{\mu_0}{2} \mu \langle m_s | \vec{\sigma} | m_s \rangle \wedge \left( \frac{1}{L^3} \sum_{\vec{k}} \frac{i \vec{k} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{|\vec{k}|^2} \right) + \text{c.c.} \end{aligned}$$

Le passage à la limite et l'intégration du terme entre parenthèses ont été discutés dans l'exercice 4.4, dont on peut reprendre sans autre le résultat:

$$\langle \alpha^0.., m_s | \vec{A}(\vec{x}) \otimes \mathbb{1} | \alpha^0.., m_s \rangle = \frac{\mu_0}{4\pi} \mu \langle m_s | \vec{\sigma} | m_s \rangle \wedge \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}. \quad (5.6.7)$$

### Commentaires

Dans cet exercice, nous avons étudié l'habillement d'un état cohérent par interaction avec un spin. On remarquera en particulier que l'on retrouve le champ dipolaire habituel pour la valeur moyenne du potentiel vecteur.

Les états  $|\alpha.. \rangle \otimes |m_s \rangle$  ne sont pas des états propres de  $H$ ; ils n'évoluent pas non plus de manière à rester factorisables  $|\alpha..(t) \rangle \otimes |s \rangle$ . En particulier,  $\langle H \rangle$  n'est pas l'énergie (bien définie) de l'état fondamental, mais l'énergie moyenne minimale pour un état du type choisi. En fait, notre démarche — habituelle pour les problèmes d'habillement — est celle d'un calcul variationnel, dans lequel la dérivée fonctionnelle a pu être remplacée par une dérivée algébrique puisque les états cohérents sont caractérisés par un nombre complexe.



## Exercice 6.1

Le système atome-champ électromagnétique est décrit par l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_{\text{atome}} \otimes \mathcal{F}$ ; ici  $\mathcal{H}_{\text{atome}} = L^2(\mathbb{R}^3, d^3x)$ , décrivant un électron ("atome d'hydrogène") sans spin. L'évolution est gouvernée par l'hamiltonien

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} \otimes \mathbb{1} - e\vec{A}(\vec{q}))^2 + \Phi(\vec{q}) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_{\text{photons}} \quad (6.1.1)$$

avec  $\Phi(\vec{q})$  le potentiel coulombien. On note  $\vec{q}$  et  $\vec{p}$  les *opérateurs* de position et d'impulsion, de sorte que  $\vec{q}|\vec{x}\rangle = \vec{x}|\vec{x}\rangle$  et  $\vec{p}|\vec{p}'\rangle = \vec{p}'|\vec{p}'\rangle$ . En particulier, vue (4.79),  $\vec{A}(\vec{q})$  est une combinaison linéaire d'opérateurs de la forme  $e^{i\vec{k}\cdot\vec{q}} \otimes a_{\vec{k},\lambda} + \text{adj.}$

**Point (i): élément de matrice de l'interaction**

En explicitant le carré dans l'expression de l'hamiltonien, on obtient

$$H = H_0 + H_{\text{int}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} H_0 = \left(\frac{\vec{p}^2}{2m} + \Phi(\vec{q})\right) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_{\text{photons}} \\ H_{\text{int}} = -\frac{e}{2m} \left\{ \vec{p} \otimes \mathbb{1}, \vec{A}(\vec{q}) \right\} + \frac{e^2}{2m} \vec{A}^2(\vec{q}) \end{cases} \quad (6.1.2)$$

L'*effet photoélectrique* est défini par:

$$|in\rangle = |n, l, m\rangle \otimes |\vec{k}, \lambda\rangle \quad \longrightarrow \quad |fin\rangle = |\vec{p}'\rangle \otimes |\Omega_0\rangle. \quad (6.1.3)$$

Ces états sont des états propres de  $H_0$ , pour les valeurs propres<sup>1</sup>

$$E_{in} = E_n + \hbar\omega(\vec{k}), \quad E_{fin} = \frac{\vec{p}'^2}{2m}. \quad (6.1.4)$$

Nous devons calculer  $\langle fin|H_{\text{int}}|in\rangle$ ; il est immédiat<sup>2</sup> que  $\langle fin|\vec{A}^2(\vec{q})|in\rangle = 0$ . Donc

$$\begin{aligned} \langle fin|H_{\text{int}}|in\rangle &= -\frac{e}{2m} \sum_{\vec{k}, \lambda'} \sqrt{\frac{\hbar}{2L^3 \epsilon_0 \omega(\vec{k}')}} \left[ \vec{e}_{\lambda'}(\vec{k}') \underbrace{\langle fin|\{\vec{p}, e^{i\vec{k}'\cdot\vec{q}}\} \otimes a_{\vec{k}', \lambda'}|in\rangle}_{=\langle \vec{p}'|\{\vec{p}, e^{i\vec{k}'\cdot\vec{q}}\}|n, l, m\rangle \delta_{\vec{k}', \lambda'}^{\vec{k}, \lambda}} \right. \\ &\quad \left. + \vec{e}_{\lambda'}(\vec{k}')^* \underbrace{\langle fin|\{\vec{p}, e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{q}}\} \otimes a_{\vec{k}', \lambda'}^\dagger|in\rangle}_{=0} \right] \end{aligned}$$

<sup>1</sup>On rappelle que le spectre des états liés de l'atome d'hydrogène présente une dégénérescence accidentelle par rapport à  $l$ , en plus de la dégénérescence essentielle par rapport à  $m$ ; ainsi que  $E_{n,l,m} = E_n = -\frac{e^2}{2a_0 n^2} = -mc^2 \frac{\alpha^2}{2n^2}$ . Rappelons également ici que  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c}$  et  $a_0 = \frac{\hbar}{\alpha m c}$ .

<sup>2</sup>Remarque que  $\vec{A}^2(\vec{q})$  est une somme de termes du type  $a_{\vec{k},\lambda} a_{\vec{k}',\lambda'}$ ,  $a_{\vec{k},\lambda}^\dagger a_{\vec{k}',\lambda'}^\dagger$ , qui ne peuvent coupler que des états qui diffèrent de deux photons, et  $a_{\vec{k},\lambda}^\dagger a_{\vec{k}',\lambda'}$  et  $a_{\vec{k},\lambda} a_{\vec{k}',\lambda'}^\dagger$ , qui ne peuvent coupler que des états à nombre égal de photons. Or chez nous  $|in\rangle$  et  $|fin\rangle$  diffèrent d'un seul photon.

et finalement

$$\langle fin|H_{\text{int}}|in\rangle = -\sqrt{\frac{\hbar}{2L^3 \epsilon_0 \omega(\vec{k}')}} \vec{e}_{\lambda}(\vec{k}) \cdot \vec{J}_{fi}(\vec{k}) \quad (6.1.5)$$

où nous avons posé

$$\vec{J}_{fi}(\vec{k}) = \frac{e}{2m} \langle \vec{p}'|\{\vec{p}, e^{i\vec{k}\cdot\vec{q}}\}|n, l, m\rangle. \quad (6.1.6)$$

Avant de continuer, montrons que  $\vec{J}_{fi}(\vec{k})$  peut s'interpréter comme la transformée de Fourier de l'élément de matrice de la densité de courant. En effet:

$$\begin{aligned} \frac{2m}{e} \vec{J}_{fi}(\vec{k}) &= \langle \vec{p}'|\vec{p}e^{i\vec{k}\cdot\vec{q}}|n, l, m\rangle + \langle \vec{p}'|e^{i\vec{k}\cdot\vec{q}}\vec{p}|n, l, m\rangle = \\ &= \int d^3x \langle \vec{p}'|\vec{p}e^{i\vec{k}\cdot\vec{q}}|\vec{x}\rangle \langle \vec{x}|n, l, m\rangle + \int d^3x \langle \vec{p}'|\vec{x}\rangle \langle \vec{x}|e^{i\vec{k}\cdot\vec{q}}\vec{p}|n, l, m\rangle, \end{aligned}$$

et puisque  $e^{i\vec{k}\cdot\vec{q}}|\vec{x}\rangle = e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}|\vec{x}\rangle$ , on obtient

$$\vec{J}_{fi}(\vec{k}) = \langle \vec{p}'|\int d^3x e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \vec{J}(\vec{x})|n, l, m\rangle, \quad \vec{J}(\vec{x}) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\vec{p}}{m}, e|\vec{x}\rangle \langle \vec{x}| \right\}. \quad (6.1.7)$$

Il suffit de se convaincre de que  $e|\vec{x}\rangle \langle \vec{x}| = \rho(\vec{x})$  est l'opérateur densité de charge; ainsi l'analogie classique de  $\vec{J}(\vec{x})$  est bien la densité de courant  $\rho(\vec{x})\vec{v}$ . On retrouve la structure générale  $H_{\text{int}} = -\int_V \vec{A} \cdot \vec{j} d^3x$ .

**Point (ii): section efficace différentielle**

Nous devons calculer

$$\frac{d\sigma(in \rightarrow fin)}{d\Omega(\vec{p}')} = \frac{1}{n_{\text{inc}}} \int_0^\infty (p')^2 dp' \frac{dp(in \rightarrow fin[\vec{p}'])}{dt} \quad (6.1.8)$$

avec  $n_{\text{inc}} = \frac{c}{L^3}$  (la justification de ces deux formules est donnée en Appendice). La probabilité de transition est donnée par la règle d'or de Fermi, formule (6.44) du cours; en insérant le résultat (6.1.5), avec  $\vec{J}_{fi}(\vec{k})$  qui dépend de  $\vec{p}'$ , on obtient

$$\frac{d\sigma(in \rightarrow fin)}{d\Omega(\vec{p}')} = \frac{\pi}{\epsilon_0 c \omega(\vec{k})} \int_0^\infty dp |\vec{e}_{\lambda}(\vec{k}) \cdot \vec{J}_{fi}(\vec{k}, \vec{p})|^2 p^2 \delta\left(\frac{p^2}{2m} - E_{in}\right).$$

En utilisant

$$\delta(f(x)) = \left| \frac{1}{f'(x)} \right| \sum_i \delta(x - x_i), \quad \text{avec } f(x_i) = 0$$

$$\downarrow$$

$$\delta\left(\frac{p^2}{2m} - E_{in}\right) = \frac{m}{p} \left[ \delta(p - \sqrt{2mE_{in}}) + \delta(p + \sqrt{2mE_{in}}) \right]$$



on aboutit à

$$\frac{d\sigma(\text{in} \rightarrow \text{fin})}{d\Omega(\vec{p}')} = \frac{\pi m |\vec{p}'|}{\epsilon_0 c \omega(\vec{k})} |\vec{\epsilon}_\lambda(\vec{k}) \cdot \vec{J}_{fi}(\vec{k})|^2, \quad |\vec{p}'| = \sqrt{2m E_{in}} \quad (6.1.9)$$

**Point (iii): section efficace dans l'approximation  $\alpha \ll \frac{|\vec{p}'|}{mc} \ll 1$**

Tout en gardant le régime non relativiste ( $\frac{|\vec{p}'|}{mc} \ll 1$ ), nous nous intéressons au cas où l'énergie cinétique de l'électron émis est beaucoup plus grande que l'énergie de l'état fondamental, ce qui se traduit par  $\frac{|\vec{p}'|}{mc} \gg \alpha$ . Cela revient à poser  $E_n \simeq 0$  dans (6.1.4) et donc

$$|\vec{p}'| = \sqrt{2m E_{in}} \simeq \sqrt{2m c \hbar |\vec{k}|};$$

la condition non-relativiste implique alors  $|\vec{p}'| \gg \hbar |\vec{k}|$ . Physiquement, notre approximation consiste à négliger l'effet de l'attraction coulombienne du noyau sur l'électron émis, qui peut donc être décrit comme libre. Or, pour l'électron libre, la fonction propre de  $\vec{p}$  associée à la valeur propre  $p'$  est, en représentation  $x$ :

$$\langle \vec{x} | \vec{p}' \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{p}' \cdot \vec{x}}. \quad (6.1.10)$$

Reprenons la définition (6.1.6) de  $\vec{J}_{fi}(\vec{k})$ :

$$\vec{J}_{fi}(\vec{k}) = \frac{e}{2m} \langle \vec{p}' | \{ \vec{p}, e^{i\vec{k} \cdot \vec{q}} \} | n, l, m \rangle = \frac{e}{2m} \int d^3x \langle \vec{p}' | \{ \vec{p}, e^{i\vec{k} \cdot \vec{q}} \} | \vec{x} \rangle \underbrace{\langle \vec{x} | n, l, m \rangle}_{= \Psi_{nlm}(\vec{x})}. \quad (6.1.11)$$

Nous devons calculer:

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}' | \vec{p} e^{i\vec{k} \cdot \vec{q}} | \vec{x} \rangle &= \vec{p}' e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \langle \vec{p}' | \vec{x} \rangle \stackrel{(6.1.10)}{=} \frac{\vec{p}'}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{-i(\vec{p}' - \hbar\vec{k}) \cdot \vec{x}} \\ \langle \vec{p}' | e^{i\vec{k} \cdot \vec{q}} \vec{p} | \vec{x} \rangle &= \int d^3y \langle \vec{p}' | e^{i\vec{k} \cdot \vec{q}} | \vec{y} \rangle \langle \vec{y} | \vec{p} | \vec{x} \rangle \stackrel{(6.1.10)}{=} \int d^3y \frac{e^{-i(\vec{p}' - \hbar\vec{k}) \cdot \vec{y}}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \langle \vec{y} | \vec{p} | \vec{x} \rangle = \\ &= \langle \vec{p}' - \hbar\vec{k} | \vec{p} | \vec{x} \rangle \\ &= \langle \vec{p}' - \hbar\vec{k} | \vec{p} | \vec{x} \rangle = (\vec{p}' - \hbar\vec{k}) \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{-i(\vec{p}' - \hbar\vec{k}) \cdot \vec{x}} \end{aligned}$$

et par conséquent dans (6.1.11):

$$\vec{J}_{fi}(\vec{k}) = \frac{e}{2m} \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} (2\vec{p}' - \hbar\vec{k}) \int d^3x e^{-i(\vec{p}' - \hbar\vec{k}) \cdot \vec{x}} \Psi_{nlm}(\vec{x}) \equiv \tilde{\Psi}_{nlm}(\vec{p}' - \hbar\vec{k})$$

Finalement, on insère ce résultat dans l'expression (6.1.9) de la section efficace différentielle; en remarquant que  $\vec{\epsilon}_\lambda(\vec{k}) \cdot \vec{k} = 0$ , et en écrivant  $|\vec{\epsilon}_\lambda(\vec{k}) \cdot \vec{p}'| = |\vec{p}'| \cos \phi$ , on aboutit à

$$\frac{d\sigma(\text{in} \rightarrow \text{fin})}{d\Omega(\vec{p}')} = \frac{\pi e^2 |\vec{p}'|^3}{\epsilon_0 m c \omega(\vec{k})} \cos^2 \phi |\tilde{\Psi}_{nlm}(\vec{p}' - \hbar\vec{k})|^2, \quad |\vec{p}'| \simeq \sqrt{2m c \hbar |\vec{k}|} \ll mc \quad (6.1.12)$$

Le facteur  $\cos^2 \phi$  que l'électron est émis de préférence dans la direction du vecteur de polarisation du photon.

**Point (iv): atome d'hydrogène dans l'état fondamental**

Pour l'état fondamental de l'atome d'hydrogène on a

$$\Psi_{1,0,0}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{\pi} a_0^3} e^{-\frac{|\vec{x}|}{a_0}} \rightarrow \tilde{\Psi}_{1,0,0}(\vec{p}) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{8}{(\alpha m c)^3}} \left[ 1 + \left( \frac{|\vec{p}'|}{\alpha m c} \right)^2 \right]^{-2}$$

où pour le calcul de la transformée de Fourier on a utilisé

$$\int_0^\infty dx x e^{-x} \sin(tx) = \text{Im} \left( \int_0^\infty dx x e^{(-1+it)x} \right) = 2t(1+t^2)^{-2}.$$

On insère dans (6.1.12) et on trouve

$$\frac{d\sigma(\text{in} \rightarrow \text{fin})}{d\Omega(\vec{p}')} = 32 a_0^2 \cos^2 \phi \frac{|\vec{p}'|^3}{\hbar |\vec{k}| m^2 c^2} \left[ 1 + \left( \frac{|\vec{p}' - \hbar\vec{k}|}{\alpha m c} \right)^2 \right]^{-4} \quad (6.1.13)$$

$\simeq \sqrt{\frac{8\hbar |\vec{k}|}{mc}} \quad \simeq \left( \frac{2a_0 |\vec{k}|}{\alpha} \right)^{-4}$

car  $|\vec{p}'| \simeq \sqrt{2m c \hbar |\vec{k}|}$  et  $\left( \frac{|\vec{p}' - \hbar\vec{k}|}{\alpha m c} \right)^2 \simeq \left( \frac{p'}{\alpha m c} \right)^2 \gg 1$ . Donc finalement

$$\frac{d\sigma(\text{in} \rightarrow \text{fin})}{d\Omega(\vec{p}')} = \sqrt{32} \alpha^3 a_0^2 \frac{\cos^2 \phi}{(a_0 |\vec{k}|)^{7/2}}, \quad \begin{aligned} |\text{in}\rangle &= |1, 0, 0\rangle \otimes |\vec{k}, \lambda\rangle \\ |\text{fin}\rangle &= |\vec{p}'\rangle \otimes |\Omega_0\rangle \\ \alpha &\ll \frac{|\vec{p}'|}{mc} \ll 1 \end{aligned} \quad (6.1.14)$$

**Point (v): discussion**

Nous avons travaillé dans l'approximation  $\alpha \ll \frac{|\vec{p}'|}{mc} \ll 1$ . En mettant au carré les termes de cette relation on aboutit, après des estimations évidentes<sup>3</sup>, à l'inégalité  $\alpha \ll a_0 k \ll \alpha^{-1}$ .

<sup>3</sup>Utiliser (6.1.4), poser  $n = 1$  (état fondamental), négliger  $\alpha^2$  devant 1; et cf. note 1.



ou encore, en termes de longueur d'onde et en gardant les ordres de grandeur:  $10^{-2} \ll \lambda/a_0 \ll 10^3$ . Donc on ne peut pas utiliser l'approximation dipolaire électrique dans cette plage, car la longueur d'onde est comparable à la taille de l'atome.

A FAIRE: discuter la plage d'énergie des électrons; observer que le transfert de quantité de mouvement à l'atome engendre un effet Doppler négligeable.

### Appendice: section efficace différentielle et flux de photons incidents

Nous nous proposons de justifier la formule (6.1.8) pour la section efficace différentielle. Le raisonnement est valable évidemment <sup>ou de l'extérieur</sup> en dehors du problème de l'effet photoélectrique. Supposons que l'on ait placé un détecteur dans la direction  $\vec{P}/|\vec{P}|$ . Soit  $dN(\vec{P})$  le nombre de particules qui arrivent dans le détecteur avec impulsion  $|\vec{P}|$ , par unité de temps. Alors

$$dN(\vec{P}) = \frac{dp(\text{in} \rightarrow \text{fin}[\vec{P}])}{dt} d^3P = n_{\text{inc}} d\sigma(\vec{P}). \quad (6.1.15)$$

La deuxième égalité définit la section efficace du processus, avec  $n_{\text{inc}}$  le flux de particules incidentes par unité de temps et de surface. Il est naturel de passer en coordonnées sphériques, ce qui donne:

$$\frac{d\sigma(\vec{P})}{d\Omega(\vec{P})} = \frac{1}{n_{\text{inc}}} \frac{dp(\dots \vec{P})}{dt} P^2 d\vec{P}.$$

Il reste encore une considération physique: nous avons un détecteur d'ouverture  $d\Omega(\vec{P})$ . Dans ce détecteur vont tomber toutes les particules émises dans la direction  $\vec{P}/|\vec{P}|$ , quelle que soit la valeur de leur impulsion. Par conséquent, la quantité physiquement significative est la *section efficace différentielle* donnée en (6.1.8).

Pour calculer le flux de photons incidents, considérons un état initial du champ donné par  $|\{n_{\vec{k},\lambda}\}\rangle$ . L'onde incidente est par conséquent une onde plane de densité d'énergie (moyenne sur le temps)  $\langle u \rangle = \frac{1}{L^3} n_{\vec{k},\lambda} \hbar \omega(\vec{k})$ ; le flux d'énergie est  $\langle \vec{S} \rangle = c \langle u \rangle \vec{k}$ . Or, puisque tous les photons ont la même énergie, le flux de particules ne sera autre chose que le flux d'énergie divisé par l'énergie d'une particule; cela donne  $n_{\text{inc}} = n_{\vec{k},\lambda} \frac{c}{L^3}$ .

## Exercice 6.2

On considère le système "atome + champ"; l'atome est décrit comme au paragraphe 6.1 du cours. Le couplage entre le champ et l'atome est supposé dipolaire électrique, donc l'hamiltonien qui régit la dynamique est donné par

$$H = \underbrace{H_{\text{at}} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_{\text{ph}}}_{H_0} + \underbrace{\frac{1}{\epsilon_0} P^i \otimes \Pi_i(\vec{0})}_{H_{\text{int}}} \quad (6.2.1)$$

avec  $H_{\text{ph}} = \sum_{\vec{k},\lambda} \hbar \omega(\vec{k}) N_{\vec{k},\lambda}$  l'hamiltonien libre.

Points (i), (ii) et (iii): expression pour  $p(\Delta t)$

Par définition,  $H_{\text{int}}^I = e^{iH_0 t/\hbar} H_{\text{int}} e^{-iH_0 t/\hbar}$ . Dans l'exercice A.1, nous avons établi que  $e^{A \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes B} = e^A \otimes e^B$ ; donc

$$H_{\text{int}}^I(t) = \frac{1}{\epsilon_0} P_i^I(t) \otimes \Pi_i^I(\vec{0}, t) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \vec{P}_I(t) &= e^{iH_{\text{at}} t/\hbar} \vec{P} e^{-iH_{\text{at}} t/\hbar} \\ \vec{\Pi}_I(\vec{0}, t) &= e^{iH_{\text{ph}} t/\hbar} \vec{\Pi}(\vec{0}) e^{-iH_{\text{ph}} t/\hbar} \end{cases} \quad (6.2.2)$$

On suit la même ligne de calcul du paragraphe 6.2, avec les mêmes hypothèses. On a:

$$U^I(\Delta t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^{\Delta t} H_{\text{int}}^I(s) ds\right) \approx \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} \int_0^{\Delta t} H_{\text{int}}^I(s) ds.$$

La probabilité de transition entre  $|in\rangle = |\nu_0, 0\rangle \otimes |n..\rangle$  et  $|fin\rangle = |\nu, M_J\rangle \otimes |n..\rangle$  est donnée par  $|\langle fin|U^I(\Delta t)|in\rangle|^2$ . La probabilité que l'atome se trouve dans un niveau excité quelconque n'est autre que la somme sur les états finaux possibles, et donc avec (6.2.2):

$$p(\Delta t) = \sum_{\{n..\}} p(n..) \sum_{\nu \neq \nu_0} \sum_{M_J} \sum_{\{n'..\}} \frac{1}{\hbar^2 \epsilon_0^2} \left| \int_0^{\Delta t} dt \langle \nu, M_J | P_i^I(t) | \nu_0, 0 \rangle \langle n'.. | \Pi_i^I(\vec{0}, t) | n..\rangle \right|^2 \quad (6.2.3)$$

Or, puisque les  $|\nu, M_J\rangle$  sont des états propres de l'atome pour l'énergie  $E_\nu$ :

$$\langle \nu, M_J | P_i^I(t) | \nu_0, 0 \rangle = \langle \nu, M_J | P_i | \nu_0, 0 \rangle e^{i(E_\nu - E_{\nu_0})t/\hbar}.$$

Si on explicite le carré dans (6.2.3) on trouve immédiatement

$$p(\Delta t) = \frac{1}{\hbar^2 \epsilon_0^2} \int_0^{\Delta t} dt' \int_0^{\Delta t} dt'' G_{\text{at}}^{ij}(t', t'') G_{ij}^{\text{ph}}(t', t'') \quad (6.2.4)$$



où nous avons posé<sup>1</sup>:

$$G_{at}^{ij}(t', t'') = \langle \nu_0, 0 | P_i^j(t') P_i^j(t'') | \nu_0, 0 \rangle = \quad (6.2.5)$$

$$= \sum_{\nu \neq \nu_0} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_\nu - E_{\nu_0})(t' - t'')} \left( \sum_{M_j} \langle \nu_0, 0 | P_i^j | \nu, M_j \rangle \langle \nu, M_j | P_i^j | \nu_0, 0 \rangle \right) \quad (6.2.6)$$

$$G_{ij}^{ph}(t', t'') = \sum_{\{n..\}} p(n..) \langle n.. | \Pi_i^j(\vec{0}, t') \Pi_j^i(\vec{0}, t'') | n.. \rangle. \quad (6.2.7)$$

#### Points (iv) et (v): fonctions de corrélation

En regardant (6.2.5), il est manifeste que  $G_{at}^{ij}(t', t'')$  est *invariant par rotation*. En effet, considérons une rotation d'angle  $\theta$  autour d'un axe  $\hat{u}$ . L'opérateur qui représente cette rotation est  $U(\theta \hat{u}) = \exp(i\theta \vec{J} \cdot \hat{u}/\hbar)$ . Or sur un état de moment cinétique total nul  $J = 0$  toutes les composantes de  $\vec{J}$  peuvent être actualisées:  $J_x|0\rangle = J_y|0\rangle = J_z|0\rangle = 0$ . Donc dans notre cas  $U(\theta \hat{u})|\nu_0, 0\rangle = |\nu_0, 0\rangle$  pour toute rotation. Il s'en suit alors que

$$\mathcal{R} G_{at}^{ij}(t', t'') = \langle \nu_0, 0 | U(\theta \hat{u})^\dagger P_i^j(t') P_i^j(t'') U(\theta \hat{u}) | \nu_0, 0 \rangle = G_{at}^{ij}(t', t'')$$

comme nous l'avions affirmé. Or il n'existe qu'un tenseur d'ordre 2 qui soit invariant par rotation, qui est  $\delta^{ij}$ . Donc  $G_{at}^{ij}(t', t'') = \delta^{ij} f(t', t'')$ . Pour déterminer  $f(t', t'')$ , on remarquera, encore à l'aide de (6.2.5), que

$$\sum_{i=1}^3 G_{at}^{ii}(t', t'') = \langle \nu_0, 0 | \vec{P}_I(t') \cdot \vec{P}_I(t'') | \nu_0, 0 \rangle$$

et donc finalement

$$G_{at}^{ij}(\tau) = \frac{1}{3} \delta^{ij} G_{at}(\tau), \quad \text{avec} \quad \begin{cases} G_{at}(\tau) = \sum_{\nu \neq \nu_0} R_\nu^{\nu_0} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_\nu - E_{\nu_0})\tau} \\ R_\nu^{\nu_0} = \sum_{M_j} \langle \nu_0, 0 | \vec{P} | \nu, M_j \rangle \cdot \langle \nu, M_j | \vec{P} | \nu_0, 0 \rangle \end{cases} \quad (6.2.8)$$

En insérant ceci dans (6.2.4) on trouve

$$p(\Delta t) = \frac{1}{3\hbar^2 \epsilon_0^2} \int_0^{\Delta t} dt' \int_0^{\Delta t} dt'' G_{at}(t' - t'') G_{ph}(t' - t'') \quad (6.2.9)$$

avec la définition

$$G_{ph}(t' - t'') = \sum_{\{n..\}} p(n..) \langle n.. | \vec{\Pi}^I(\vec{0}, t') \cdot \vec{\Pi}^I(\vec{0}, t'') | n.. \rangle.$$

<sup>1</sup>Dans la deuxième définition, on utilise la relation de fermeture  $\sum_{\{n'..\}} |n'..\rangle \langle n'..\rangle = \mathbb{1}$ .

Il nous reste à expliciter cette fonction. Le calcul ne présente aucun piège. Pour simplifier l'écriture, on notera  $H$  au lieu de  $H_{ph}$  et  $k$  au lieu de  $\vec{k}$ . On a explicitement:

$$\vec{\Pi}^I(\vec{0}, t') \cdot \vec{\Pi}^I(\vec{0}, t'') = e^{\frac{i}{\hbar} H t'} \vec{\Pi}(\vec{0}) e^{-\frac{i}{\hbar} H (t' - t'')} \vec{\Pi}(\vec{0}) e^{-\frac{i}{\hbar} H t''}$$

et donc avec  $t' - t'' = \tau$ :

$$\langle n.. | \vec{\Pi}^I(\vec{0}, t') \cdot \vec{\Pi}^I(\vec{0}, t'') | n.. \rangle = e^{i\tau \sum_{K\Lambda} \omega(K) n_{K\Lambda}} \langle n.. | \vec{\Pi}(\vec{0}) e^{-\frac{i}{\hbar} H \tau} \vec{\Pi}(\vec{0}) | n.. \rangle. \quad (6.2.10)$$

Reste à calculer l'élément de matrice du membre de droite. Avec (4.79ii) on a:

$$\vec{\Pi}(\vec{0}) | n.. \rangle = \epsilon_0 \sum_{k\lambda} \omega(k) \left[ i \vec{A}_\lambda(k, \vec{0}) \sqrt{n_{k\lambda}} | n.. - \delta^{k\lambda} \rangle - i \vec{A}_\lambda^*(k, \vec{0}) \sqrt{n_{k\lambda} + 1} | n.. + \delta^{k\lambda} \rangle \right]$$

et donc on obtient pour l'élément de matrice:

$$\begin{aligned} \sum_{k\lambda} \sum_{k'\lambda'} \epsilon_0^2 \omega(k) \omega(k') \times & \left[ \vec{A}_\lambda^*(k, \vec{0}) \cdot \vec{A}_{\lambda'}(k', \vec{0}) \sqrt{n_{k\lambda} n_{k'\lambda'}} \langle n.. - \delta^{k\lambda} | e^{-\frac{i}{\hbar} H \tau} | n.. - \delta^{k'\lambda'} \rangle \right. \\ & + \vec{A}_\lambda(k, \vec{0}) \cdot \vec{A}_{\lambda'}^*(k', \vec{0}) \sqrt{(n_{k\lambda} + 1)(n_{k'\lambda'} + 1)} \langle n.. + \delta^{k\lambda} | e^{-\frac{i}{\hbar} H \tau} | n.. + \delta^{k'\lambda'} \rangle \\ & - \vec{A}_\lambda(k, \vec{0}) \cdot \vec{A}_{\lambda'}(k', \vec{0}) \sqrt{(n_{k\lambda} + 1) n_{k'\lambda'}} \langle n.. + \delta^{k\lambda} | e^{-\frac{i}{\hbar} H \tau} | n.. - \delta^{k'\lambda'} \rangle \\ & \left. - \vec{A}_\lambda^*(k, \vec{0}) \cdot \vec{A}_{\lambda'}^*(k', \vec{0}) \sqrt{n_{k\lambda} n_{k'\lambda'}} \langle n.. - \delta^{k\lambda} | e^{-\frac{i}{\hbar} H \tau} | n.. + \delta^{k'\lambda'} \rangle \right]. \end{aligned}$$

Or les éléments de matrice des deux dernières lignes sont nuls; les autres sont non-nuls seulement si  $(k, \lambda) = (k', \lambda')$  et valent dans ce cas

$$\langle n.. \pm \delta^{k\lambda} | e^{-\frac{i}{\hbar} H \tau} | n.. \pm \delta^{k\lambda} \rangle = e^{-i\tau \sum_{K\Lambda} \omega(K) (n_{K\Lambda} \pm \delta_{K\lambda}^2)}$$

En reprenant (6.2.10) on obtient alors

$$\langle n.. | \vec{\Pi}^I(\vec{0}, t') \cdot \vec{\Pi}^I(\vec{0}, t'') | n.. \rangle = \sum_{\vec{k}, \lambda} \left( \epsilon_0 \omega(\vec{k}) | \vec{A}_\lambda(\vec{k}, \vec{0}) | \right)^2 \left[ n_{\vec{k}, \lambda} e^{i\omega(\vec{k})\tau} + (n_{\vec{k}, \lambda} + 1) e^{-i\omega(\vec{k})\tau} \right]$$

et finalement, en notant  $\langle N_{\vec{k}, \lambda} \rangle = \sum_{\{n..\}} p(n..) n_{\vec{k}, \lambda}$ :

$$G_{ph}(\tau) = \frac{\epsilon_0}{2L^3} \sum_{\vec{k}, \lambda} \hbar \omega(\vec{k}) \left[ (\langle N_{\vec{k}, \lambda} \rangle + 1) e^{-i\omega(\vec{k})\tau} + \langle N_{\vec{k}, \lambda} \rangle e^{i\omega(\vec{k})\tau} \right]. \quad (6.2.11)$$

#### Points (vi) et (vii): expression finale pour $p(\Delta t)$

Nous pouvons finalement insérer  $G_{ph}(\tau)$  dans l'expression (6.2.9) pour  $p(\Delta t)$ ; aussi, l'on décompose  $G_{at}(\tau)$  en série de Fourier

$$G_{at}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{G}_{at}(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega, \quad \text{avec} \quad \tilde{G}_{at}(\omega) = \sum_{\nu \neq \nu_0} R_\nu^{\nu_0} \delta\left(\omega - \frac{E_\nu - E_{\nu_0}}{\hbar}\right). \quad (6.2.12)$$



On trouve alors

$$p(\Delta t) = \frac{1}{6L^3\hbar\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{G}_{at}(\omega) \sum_{\vec{k},\lambda} \omega(\vec{k}) \left[ \langle N_{\vec{k},\lambda} \rangle + 1 \right] e^{-i(\omega+\omega(\vec{k}))\tau} + \langle N_{\vec{k},\lambda} \rangle e^{-i(\omega-\omega(\vec{k}))\tau}.$$

Les intégrales sur  $t'$  et  $t''$  sont de la forme

$$\begin{aligned} \int_0^{\Delta t} dt' \int_0^{\Delta t} dt'' e^{-i\Omega(t'-t'')} &= \left( \int_0^{\Delta t} dt' e^{-i\Omega t'} \right) \times \left( \int_0^{\Delta t} dt'' e^{i\Omega t''} \right) = \\ &= \frac{i}{\Omega} (e^{-i\Omega\Delta t} - 1) \times \frac{1}{i\Omega} (e^{i\Omega\Delta t} - 1) = 2\Delta t^2 \frac{1 - \cos\Omega\Delta t}{(\Omega\Delta t)^2} \end{aligned}$$

et donc on obtient bien, avec les notations de la donnée

$$\begin{aligned} p(\Delta t) &= \frac{\pi\Delta t}{3L^3\hbar\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{G}_{at}(\omega) \sum_{\vec{k},\lambda} \hbar\omega(\vec{k}) \\ &\times \left[ \langle N_{\vec{k},\lambda} \rangle + 1 \right] \delta[\hbar(\omega + \omega(\vec{k})), \Delta t] + \langle N_{\vec{k},\lambda} \rangle \delta[\hbar(\omega - \omega(\vec{k})), \Delta t]. \end{aligned}$$

On peut montrer que  $\delta[\hbar\Omega, \Delta t] \sim \delta(\hbar\Omega)$  si  $\Delta t \gg \hbar/\Omega$ : voir cours, passage de (6.42) à (6.43). Or  $\omega + \omega(\vec{k}) > 0$  puisque  $\omega(\vec{k}) > 0$  par convention et  $\omega > 0$  en vertu de (6.2.12).

Alors  $\delta[\hbar(\omega + \omega(\vec{k})), \Delta t] \sim 0$  et finalement<sup>2</sup>

$$p(\Delta t) = \frac{\pi\Delta t}{3\hbar^2\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{G}_{at}(\omega) w(\omega), \quad \Delta t \gg \frac{\hbar}{E_\nu - E_{\nu_0}} \quad (6.2.13)$$

avec  $w(\omega)$  la densité spectrale du rayonnement électromagnétique initial:

$$w(\omega) = \frac{1}{L^3} \sum_{\vec{k},\lambda} \hbar\omega(\vec{k}) \langle N_{\vec{k},\lambda} \rangle \delta(\omega - \omega(\vec{k})).$$

### Point (viii): cas particulier du rayonnement thermique

Le rayonnement thermique ("corps noir") est une situation proche des sources de lumière ordinaires. La densité spectrale est donnée par (5.126) du cours:

$$w(\omega, T) = \frac{2\hbar}{c^2\pi} \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}.$$

Alors nous pouvons calculer (6.2.13) avec  $\tilde{G}_{at}(\omega)$  donné par (6.2.12) et l'on trouve

$$p(\Delta t) = \frac{2}{3} \mu_0 \frac{\Delta t}{\hbar} \sum_{\nu \neq \nu_0} R_\nu^{\nu_0} \left( \frac{E_\nu - E_{\nu_0}}{\hbar} \right)^3 \frac{1}{e^{(E_\nu - E_{\nu_0})/kT} - 1}. \quad (6.2.14)$$

<sup>2</sup>Nous utilisons  $\delta(\hbar\Omega) d\Omega = \frac{1}{\hbar} \delta(\Omega) d\Omega$ .

La probabilité de détection  $p(\Delta t)$  est une fonction croissante de  $T$ , ce qui est attendu. En effet, si  $kT \ll E_\nu - E_{\nu_0}$ , la probabilité d'exciter l'atome dans l'état d'énergie  $E_\nu$  est faible. Au fur et à mesure que  $T$  augmente, le nombre d'états excités qui peuvent être atteints augmente.

### Point (ix): cas particulier du rayonnement avec spectre lorentzien

La lorentzienne est la transformée de Fourier d'une exponentielle décroissante; donc un rayonnement avec spectre d'énergie lorentzien étroit est un rayonnement issu d'un processus de desexcitation avec un temps caractéristique long. Considérons une lorentzienne centrée en  $\hbar\omega_p = E_\nu - E_{\nu_0}$ :

$$w(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma}{(\omega - \omega_p)^2 + \Gamma^2}.$$

Si on suppose que  $\Gamma \ll |\omega_\nu - \omega_p|$  pour tout  $\nu \neq \bar{\nu}$ , le calcul de (6.2.13) donne

$$p(\Delta t) \approx \frac{\Delta t}{3\hbar^2\epsilon_0\Gamma} R_{\bar{\nu}}^{\nu_0}. \quad (6.2.15)$$

### Commentaires finaux

On voit que la détection d'un ou plusieurs photons par excitation d'un atome localisé (ici en  $\vec{x} = \vec{0}$ ) ne fait pas appel à une hypothétique "observable de position" pour le photon. Dit d'une autre manière, le fait qu'un atome localisé soit excité par le champ ne signifie pas qu'il y avait un photon à l'endroit de l'atome!

### Appendice: deux détecteurs

Considérons deux détecteurs, i.e. deux atomes identiques, localisés respectivement en  $\vec{x}_1$  et  $\vec{x}_2$ . On a

$$\begin{aligned} H_0 &= H_{at} \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_{at} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes H_p \\ H_{int} &= \frac{1}{\epsilon_0} P^i \otimes \mathbb{1} \otimes \Pi_i(\vec{x}_1) + \frac{1}{\epsilon_0} \mathbb{1} \otimes P^i \otimes \Pi_i(\vec{x}_2) \end{aligned}$$

Les expressions en représentation d'interaction sont "identiques" à celles obtenues au point (i). On considère que les deux atomes sont initialement dans l'état fondamental  $|\nu_0, 0\rangle = |0\rangle$ ; les états finaux respectifs sont notés  $|f_1\rangle$  et  $|f_2\rangle$ . On suppose, dans l'esprit du calcul perturbatif, qu'au moins l'un de ces états finaux est différent de  $|0\rangle$ : au moins un détecteur a été excité. L'analogue de (6.2.3) s'écrit

$$\begin{aligned} p(\Delta t) &= \sum_{\{n.. \}} p(n..) \sum_{\{i_1 n_1\}} \frac{1}{\hbar^2 \epsilon_0^2} \left| \int_0^{\Delta t} dt \langle f_1 | P^i(t) | 0 \rangle \langle f_2 | 0 \rangle \langle n' | \Pi_i^j(\vec{x}_1, t) | n \rangle + \right. \\ &\quad \left. + \langle f_1 | 0 \rangle \langle f_2 | P^i(t) | 0 \rangle \langle n' | \Pi_i^j(\vec{x}_2, t) | n \rangle \right|^2. \end{aligned}$$



On remarque l'apparition des facteurs  $\langle f1|0 \rangle$  et  $\langle f2|0 \rangle$ . Or par hypothèse on somme sur des états finaux tels que au moins l'un de ces deux facteurs est nul — sans cela, aucun des deux atomes n'a été excité. Il s'en suit que la somme factorise en deux sommes: une somme sur les états tels que  $\langle f1|0 \rangle = 0$  et  $|f2\rangle = |0\rangle$  (excitation de l'atome 1 seulement), et une somme sur les états tels que  $\langle f2|0 \rangle = 0$  et  $|f1\rangle = |0\rangle$  (excitation de l'atome 2 seulement). En résumé:

$$p(\Delta t) = p_1(\Delta t) + p_2(\Delta t).$$

Chaque détecteur peut donc être traité séparément, ce qui est intuitif. Pour  $p_1(\Delta t)$  et  $p_2(\Delta t)$  on peut donc refaire le calcul de l'exercice. Les deux vont être numériquement identiques à (6.2.13), puisque la dépendance en  $\vec{x}_i$  disparaît dans le calcul qui mène de (6.2.10) à (6.2.11). Pour avoir une dépendance spatiale, il faudrait prendre un autre état initial du champ. Un aspect moins évident de ce modèle est le fait que les événements où les deux détecteurs sont excités ne contribuent pas au taux de comptage, et ceci quel que soit l'état du champ.

### Appendice: états cohérents

On peut étudier les prédictions du modèle lorsque le champ est donné par un état cohérent; on considère l'atome localisé en  $\vec{x}$ . Pour simplicité, considérons le cas où l'état cohérent est dans un mode défini  $(\vec{k}, \lambda)$ :

$$|\alpha_{\vec{k}\lambda}\rangle = \dots |\Omega_0\rangle \otimes |\alpha_{\vec{k}\lambda}\rangle \otimes |\Omega_0\rangle \dots \equiv |\alpha_{\vec{k}\lambda}\rangle.$$

La différence avec l'exercice intervient à partir de (6.2.10): on doit calculer

$$G_{ph}(t' - t'') = \langle \alpha_{\vec{k}\lambda} | \tilde{\Pi}^\dagger(\vec{0}, t') \cdot \tilde{\Pi}(\vec{0}, t'') | \alpha_{\vec{k}\lambda} \rangle \quad \text{avec} \quad |\alpha_{\vec{k}\lambda}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \alpha_{\vec{k}\lambda} \rangle |n\rangle$$

où  $|n\rangle$  est l'état avec  $n$  photons dans le mode  $(\vec{k}, \lambda)$ . Le calcul est long mais facile. On trouve

$$G_{ph}(t', t'') = G_{ph}^{(1)}(t' - t'') + G_{ph}^{(2)}(t' + t'', \vec{x}).$$

Le terme  $G_{ph}^{(1)}(t)$  est identique à (6.2.11), sans la sommation et où  $\langle N \rangle = \sum_n | \langle n | \alpha_{\vec{k}\lambda} \rangle |^2 n$  est la valeur moyenne de  $N$  sur l'état cohérent considéré. Le deuxième terme s'écrit

$$G_{ph}^{(2)}(t' + t'', \vec{x}) = -\hbar\omega(\vec{k}) \frac{\epsilon_0}{L^3} e^{|\alpha_{\vec{k}\lambda}|^2/2} \text{Re} \left[ \alpha_{\vec{k}\lambda}^2 \left[ \vec{e}_\lambda(\vec{k}) \cdot \vec{e}_\lambda(\vec{k}) \right] e^{i[2\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega(\vec{k})(t'+t'')]} \right].$$

En insérant ceci dans (6.2.9) et en intégrant par rapport au temps, on obtient la contribution de ce terme à la probabilité de détection (polarisation linéaire):

$$P^{(2)}(\Delta t) = -\frac{2 e^{|\alpha_{\vec{k}\lambda}|^2/2} \omega(\vec{k})}{3\hbar\epsilon_0 L^3} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{\tilde{G}_{at}(\omega)}{\omega^2 - \omega(\vec{k})^2} \text{Re} \left[ \alpha_{\vec{k}\lambda}^2 e^{2i\vec{k}\cdot\vec{x}} \left( 1 + e^{-2i\omega(\vec{k})\Delta t} - 2e^{-i\omega(\vec{k})\Delta t} \cos(\omega\Delta t) \right) \right].$$

Pour des états cohérents donc, le taux de détection dépend de la position du détecteur.

## Exercice 2.1

But de l'exercice: établir les équations du mouvement paramétrisées par rapport au temps propre  $s$ , pour un observateur quelconque utilisant les variables  $q(s) = (\vec{q}(s), t(s))$ .

Rappelons les notations quadriverctorielles:

$$q = (q^\mu) = (\vec{q}, t), \quad p = (p_\mu) = (\vec{p}, -E), \quad A = (A_\mu) = (\vec{A}, -\Phi). \quad (2.1.1)$$

On utilisera comme indices des lettres grecques pour les composantes des quadrivercteurs, des lettres latines pour les composantes de vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ . Il convient également de retranscrire la notation (2.4.ii) du cours, car elle revient souvent dans les calculs:

$$m(\vec{p}, \vec{q}, t) \stackrel{\text{not.}}{=} m\gamma, \quad \text{avec } \gamma \stackrel{\text{not.}}{=} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.1.2)$$

### Quadrivercteur $q$

De  $ds^2 = dt^2 - \frac{d\vec{q}^2}{c^2}$  on tire immédiatement  $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\gamma}$ , c'est-à-dire

$$\boxed{\frac{dt}{ds} = \gamma} \quad (2.1.3)$$

et par conséquent

$$\frac{d\vec{q}}{ds} = \frac{d\vec{q}}{dt} \frac{dt}{ds} \stackrel{(2.3.i),(2.1.3)}{=} \frac{\vec{p} - e\vec{A}}{m(\vec{p}, \vec{q}, t)} \gamma \stackrel{(2.1.2)}{=} \frac{\vec{p} - e\vec{A}}{m}$$

ce qui nous donne

$$\boxed{\frac{d\vec{q}}{ds} = \frac{\vec{p} - e\vec{A}(\vec{q}, t)}{m}} \quad (2.1.4)$$

*Remarque:* En fait, on peut montrer que l'on a pour les quadrivercteurs

$$\boxed{g_{\mu\nu} \frac{dq^\nu}{ds} = \frac{p_\mu - eA_\mu(q)}{m}} \quad (2.1.5)$$

Pour les composantes spatiales, c'est évident; il reste à vérifier  $g_{44} \frac{dt}{ds} = \frac{-E + e\Phi}{m}$ , ce qui se fait sans problèmes en utilisant (2.1).

## Quadrivercteur $p$

Pour l'impulsion:

$$\frac{d\vec{p}}{ds} = \frac{d\vec{p}}{dt} \frac{dt}{ds} \stackrel{(2.3.ii)}{=} e \left[ \underbrace{\frac{\vec{p} - e\vec{A}}{m}}_{= \frac{d\vec{q}}{ds}} \cdot \vec{\nabla} A_i + \underbrace{\gamma}_{= \frac{dq^4}{ds}} \cdot \vec{\nabla}(-\Phi) \right]$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{ds} = e \frac{dq^\mu}{ds} \vec{\nabla} A_\mu.} \quad (2.1.6)$$

Pour l'énergie, il faut remarquer qu'en raison de la structure symplectique du formalisme hamiltonien on a

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{dq^i}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

Alors:

$$\frac{dE}{ds} = \frac{\partial H}{\partial t} \frac{dt}{ds} \stackrel{(2.2) \text{ etc.}}{=} -e \frac{(\vec{p} - e\vec{A})}{m} \cdot \partial_t \vec{A} + e \partial_t \Phi \frac{dt}{ds}$$

ce qui donne finalement

$$\boxed{\frac{d(-E)}{ds} = e \frac{dq^\mu}{ds} \partial_t A_\mu} \quad (2.1.7)$$

ou encore, en formalisme quadriverctoriel:

$$\boxed{\frac{dp_\mu}{ds} = e \frac{dq^\nu}{ds} \partial_\nu A_\mu.} \quad (2.1.8)$$

### Remarques conclusives

1. Le tenseur métrique intervient pour relier la vitesse  $\frac{dq^\mu}{ds}$  à l'impulsion  $p_\mu$ . C'est la manifestation du fait que pour construire la mécanique on doit introduire un tenseur métrique.
2. Si les équations du mouvement sont écrites en prenant comme paramètre d'évolution le temps propre, il n'apparaît plus de "masses variables".
3. Si l'on insère (2.1.5) dans (2.1.8) on trouve une équation de type Newton:

$$m g_{\mu\nu} \frac{d^2 q^\nu}{ds^2} = e F_{\mu\lambda}(q) \frac{dq^\lambda}{ds} \quad (2.1.9)$$

avec  $F_{\mu\lambda} = \partial_\mu A_\lambda - \partial_\lambda A_\mu$ . Si l'on réécrit cette équation avec les champs (cf. ex. 2.3) on obtient les équations bien connues

$$m\ddot{\vec{q}} = e[\vec{\mathcal{E}}\gamma + \dot{\vec{q}} \times \vec{B}], \quad \dot{E} = \vec{\mathcal{E}} \cdot \dot{\vec{q}}.$$

## Exercice 2.2

On se place dans le référentiel CM du “centre de masse”. Ce référentiel est défini par la condition  $\vec{p}_{tot} = 0$ ; la conservation de la norme du quadri-vecteur énergie-impulsion  $g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu$  s’écrit dans CM:

$$E_{tot} = E_1 + E_2 = const.$$

Prenons alors le cas (i):

$$\begin{aligned} e_- &\rightarrow e_- + \gamma \\ m_e c^2 &= m_e c^2 + E_{cin} + \hbar\omega \end{aligned}$$

et ceci est manifestement impossible, puisque  $E_{cin}$  et  $\hbar\omega$  sont des quantités positives.

Le cas (ii) est identique. Les situations (iii) et (iv) peuvent être ramenées à (i) et (ii) en remarquant qu’un positron entrant équivaut à un électron sortant et inversement. Mais on peut également développer un argument “direct”: dans CM, le photon seul a une impulsion nulle, donc une énergie nulle; la paire  $e_-, e_+$  qui est produite possède au moins l’énergie  $2m_e c^2$ .

## Exercice 2.3

*Structure du corrigé:* les parties 1, 2 et 3 de l’exercice seront survolées rapidement: leur portée conceptuelle est détaillée dans l’énoncé, et ce qui reste à faire se réduit à des manipulations formelles, utiles pour “se faire la main”. Les parties 4, 5 et 6 sont discutées dans le détail. La notation matricielle est employée au besoin sans autre explication; se référer au texte “Conventions...” pour les détails.

### Parties 1 et 2: formalisme quadri-vectorel et changements de coordonnées

La partie 1 est purement calculatoire.

Pour la partie 2: puisque

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad (2.3.1)$$

on a  $\Lambda^\mu_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$ , et donc

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \Lambda^\mu_\nu \frac{\partial}{\partial x'^\mu}.$$

### Partie 3: le tenseur métrique de la relativité restreinte

Le tenseur métrique de la relativité restreinte est imposé en exigeant la covariance des relations phénoménologiques dites “constitutives”. On demande de vérifier que le tenseur (11) inséré dans (10), puis dans (9), rend bien les relations constitutives. Cela donne:

$$\begin{aligned} F_{ij} &\stackrel{(9)}{=} \frac{1}{2} \mu_{ij\rho\lambda} H^{\rho\lambda} \stackrel{(10),(11)}{=} \frac{1}{2} \left( \underbrace{\mu_{ijij}}_{\mu_0} H^{ij} + \underbrace{\mu_{ijji}}_{-\mu_0} H^{ji} \right) = \mu_0 H^{ij} \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \\ F_{i4} &\stackrel{(9)}{=} \frac{1}{2} \mu_{i4\rho\lambda} H^{\rho\lambda} = \dots = - \underbrace{\mu_0 c^2}_{\frac{1}{\epsilon_0}} H^{i4} \Rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}. \end{aligned}$$

Pour obtenir (12), il faut remarquer qu’en raison de (11)  $g_{\mu\nu}$  est invariant, i.e. lors d’un changement de référentiel  $g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ ; et d’autre part,  $g_{\mu\nu}$  étant en raison de (10) un tenseur deux fois covariant, il se transforme selon

$$g'_{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})^\rho_\mu (\Lambda^{-1})^\lambda_\nu g_{\rho\lambda}.$$

On appelle *groupe de Lorentz* l’ensemble des transformations  $\Lambda$  satisfaisant (12), relation qui



peut se récrire, en utilisant le fait que  $(\Lambda^{-1})^T = (\Lambda^T)^{-1}$ , sous la forme<sup>1</sup>:

$$g_{\mu\nu} = \Lambda^\rho{}_\mu \Lambda^\lambda{}_\nu g_{\rho\lambda}. \quad (2.3.2)$$

#### Partie 4: transformation de Lorentz pure

Puisque la *physique ne doit pas dépendre du choix des coordonnées*, on peut se placer dans la situation la plus simple pour les calculs, à savoir: (1) Les repères cartésiens dans  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  ont les axes parallèles; (2) Le déplacement se fait selon l'axe  $\hat{e}_3 = \hat{e}'_3$ .

Sous ces hypothèses,  $\Lambda$  prend la forme

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & \tilde{\Lambda} \end{pmatrix} \quad (2.3.3)$$

avec

$$\tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} \Lambda_3^3 & \Lambda_4^3 \\ \Lambda_3^4 & \Lambda_4^4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} A & B \\ K & D \end{pmatrix} \quad (2.3.4)$$

Donc, le fait de regarder une transformation *pure*, i.e. le passage à un référentiel en translation uniforme, nous a permis de ramener le problème à deux dimensions. Utilisons maintenant le fait que  $\Lambda$  est une transformation *de Lorentz*, i.e. elle doit satisfaire (2.3.2). Les relations intéressantes sont celles où  $\mu, \nu \in \{3, 4\}$ :

$$A^2 - c^2 K^2 = 1, \quad AB - c^2 KD = 0, \quad B^2 - c^2 D^2 = -c^2$$

avec la condition  $D > 1$ .

Deux remarques: (1) la relation  $\det\Lambda = 1$  est implicite pour les raisons suivantes: d'une part,  $\Lambda^T g \Lambda = g$  implique immédiatement  $\det\Lambda = \pm 1$ ; d'autre part, les choix de  $\mathbb{1}$  au lieu de  $-\mathbb{1}$  dans (2.3.3) et de  $D > 1$  assurent que  $\det\Lambda = 1$ . (2) Il est normal que nous n'ayons que trois relations indépendantes, puisque la matrice ne peut pas être déterminée complètement sans utiliser l'information sur la valeur de la vitesse.

La solution du système non-linéaire ne présente aucune difficulté. Le résultat, exprimé en fonction de  $K$ , est:

$$\tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + c^2 K^2} & c^2 K \\ K & \sqrt{1 + c^2 K^2} \end{pmatrix}. \quad (2.3.5)$$

<sup>1</sup>Remarquer que la forme matricielle de (12) est  $(\Lambda^{-1})^T g \Lambda^{-1} = g$ .

Tout ce qui reste à faire est de trouver la relation entre  $K$  et la vitesse  $v$ . Partons de (2.3.1), qui donne en particulier (avec nos notations pour les éléments de  $\Lambda$ ):

$$x'^3 = Ax^3 + Bx^4.$$

Suivons alors l'évolution d'un point *fixé dans  $\mathcal{R}'$* , et qui donc par rapport à  $\mathcal{R}$  se déplace avec vitesse  $v$  dans la direction  $\hat{e}_3$ :

$$\underbrace{\Delta x'^3}_{=0} = A \underbrace{\Delta x^3}_{=v\Delta t} + B \underbrace{\Delta x^4}_{=\Delta t} \Rightarrow v = -\frac{B}{A}$$

et si l'on exprime ceci en fonction de  $K$  on aboutit à  $K = -\frac{v}{c^2}$ , ce qui donne finalement

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ & & \gamma & -\gamma v \\ & & -\frac{\gamma v}{c^2} & \gamma \end{pmatrix}, \quad (2.3.6)$$

la généralisation à (17) n'étant qu'une question de réécriture.

DECRIRE ET INTERPRETER LES LOIS DE TRANSFORMATION DES CHAMPS (18) - (21): reste à faire.

#### Partie 5a: équation d'évolution de la particule chargée de masse non-nulle

Dans cette partie, nous utilisons des résultats connus concernant le référentiel de repos d'une particule; un rappel de ces résultats est donné en Appendice.

L'équation de Newton pour une particule chargée dans un champ électromagnétique est

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = e (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).$$

Dans le référentiel de repos  $\mathcal{R}^*(s)$  on a  $\vec{v} \stackrel{*}{=} 0$  et  $\frac{d^2 t}{ds^2} \stackrel{*}{=} 0$ ; par conséquent l'équation de Newton devient

$$m g_{\mu i} \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} \stackrel{*}{=} e E_i \quad (2.3.7)$$

$$m g_{\mu 4} \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} \stackrel{*}{=} 0$$

Le problème est donc: trouver un quadrivecteur  $f_\alpha$  tel que

$$f \stackrel{*}{=} (e\vec{E}, 0). \quad (2.3.8)$$

Notons que si  $f$  existe, alors il est unique. En effet, supposons le contraire: cela signifierait qu'il existe un quadrivecteur  $\phi_\beta$  identiquement nul dans  $\mathcal{R}^*(s)$  et non-identiquement nul

dans un autre référentiel, disons  $\mathcal{R}$ . Soit alors  $\Lambda$  la transformation de Lorentz qui envoie  $\mathcal{R}$  sur  $\mathcal{R}^*(s)$ : on aurait  $\Lambda\phi = 0$ , i.e.  $\Lambda$  aurait une valeur propre nulle. Mais ceci est impossible, car toute matrice de changement de référentiel doit être inversible.

Donc il nous suffit de “deviner”  $f$ , avec lequel l'équation d'évolution va s'écrire

$$m g_{\mu\alpha} \frac{d^2 q^\mu}{ds^2} = f_\alpha.$$

Pour ce faire, on peut procéder comme suit (mais à chacun son intuition!):

1. Regardons d'abord l'équation spatiale dans (2.3.7): puisque  $E_i = F_{i4}$ , pour avoir une forme covariante, nous avons besoin d'un terme de la forme  $F_{i\mu} b^\mu$ ; pour satisfaire l'équation dans le référentiel de repos, il faut que  $b^\mu \stackrel{*}{=} (\vec{0}, 1)$ . Vue (2.3.15), l'unicité entraîne  $b^\mu = \frac{dq^\mu}{ds}$ .

2. Nous sommes alors tentés d'essayer  $F_{4\mu} b^\mu$  au terme de droite de l'équation temporelle.

Or, on a bien  $F_{4\mu} b^\mu \stackrel{*}{=} 0$ . Par conséquent nous avons trouvé

$$f_\alpha = e F_{\alpha\mu} \frac{dq^\mu}{ds} \quad (2.3.9)$$

qui satisfait (2.3.8), et cela donne l'équation d'évolution (22).

## Partie 5b: considérations sur le quadrivecteur énergie-impulsion

La vérification de la condition de masse (25) est triviale si l'on remarque que le membre de gauche est la norme d'un quadrivecteur, donc un invariant. Il suffit alors de remplacer  $p_\mu - eA_\mu$  par son expression tirée de (24) et de calculer dans  $\mathcal{R}^*(s)$ .

Il faut ensuite vérifier que  $p$  et  $q$  sont canoniquement conjugués, i.e. qu'il existe  $H(q, p)$  tel que

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_\mu} &= \frac{dq^\mu}{ds} \\ \frac{\partial H}{\partial q^\mu} &= -\frac{dp_\mu}{ds}. \end{aligned}$$

Les membres de droite peuvent être calculés en utilisant (24) pour la première équation, en insérant (24) dans (22) et en utilisant la définition  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  pour la deuxième.

On arrive ainsi à

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_\mu} &= g^{\mu\nu} \frac{p_\nu - eA_\nu}{m} \\ \frac{\partial H}{\partial q^\mu} &= -e \partial_\mu A_\nu \frac{dq^\nu}{ds} \end{aligned}$$

et l'on peut vérifier que

$$H(q, p) = g^{\mu\nu} \frac{(p_\mu - eA_\mu(q))(p_\nu - eA_\nu(q))}{2m} \quad (2.3.10)$$

satisfait ces conditions. Donc  $p$  et  $q$  sont canoniquement conjugués.

Finalement, il faut déterminer la loi de transformation de  $p$  lors d'une transformation de Lorentz pure. Cette loi s'écrit sous forme matricielle

$$p' = (\Lambda^{-1})^T p.$$

La matrice  $\Lambda^{-1}$  s'obtient évidemment de  $\Lambda$  déterminée en (2.3.6) en remplaçant  $v$  par  $-v$ .

Tout calcul fait, et avec l'interprétation  $p_4 = -E$ , on obtient

$$\begin{cases} \vec{p}' = \vec{p}'_\perp + \gamma \left( \vec{p}'_\parallel - \frac{E}{c^2} \vec{v} \right) \\ E' = \gamma (E - \vec{p}' \cdot \vec{v}) \end{cases} \quad (2.3.11)$$

A la limite  $c \rightarrow \infty$  on obtient  $\vec{p}' = \vec{p}$  et  $E' = E - \vec{p} \cdot \vec{v}$ , qui est bien la loi de transformation pour l'état de mouvement en relativité galiléenne.

Le résultat peut surprendre. Mais c'est en accord avec l'hypothèse que la description de l'état est indépendante de la dynamique que l'on doit supposer  $E$  et  $\vec{p}$  fixés. Dans ces conditions, lorsque  $c \rightarrow \infty$  on a que  $\frac{E}{c^2} \rightarrow 0$ .

## Partie 6: équation de Lorentz-Dirac

Notons  $\xi = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$ . On a

$$m \ddot{\vec{q}} = \vec{F}_{ext} + \xi \frac{d^3 \vec{q}}{dt^3} \stackrel{essqj}{=} m \underbrace{\frac{d^2 q_\mu}{ds^2}}_{(22)} = e F_{\mu\rho} \frac{dq^\rho}{ds} + \xi \left( \frac{d^3 q_\mu}{ds^3} + A \frac{dq_\mu}{ds} \right). \quad (2.3.12)$$

La justification de la forme d'essai est immédiate: le terme  $\frac{d^3 q^\mu}{ds^3}$  rend l'équation spatiale (26) dans le référentiel de repos; les composantes spatiales d'un éventuel terme supplémentaire doivent par conséquent s'annuler dans  $\mathcal{R}^*(s)$ , i.e. ce terme doit être proportionnel à  $\frac{dq^\mu}{ds}$ .

Une manière de procéder consiste à calculer  $\frac{d^3 t}{ds^3}$  dans  $\mathcal{R}^*(s)$  et d'insérer le résultat dans l'équation temporelle. Plus rapidement, on peut remarquer (cf. Appendice) que l'on a toujours

$$\dot{q}^2 = g_{\mu\nu} \frac{dq^\mu}{ds} \frac{dq^\nu}{ds} = -c^2$$

ce qui entraîne en dérivant deux fois par rapport au temps propre

$$\dot{q}\ddot{q} = 0, \quad \ddot{q}^2 + \dot{q}\ddot{q} = 0. \quad (2.3.13)$$

Multiplions alors (2.3.12) par  $\dot{q}$  (au sens d'un produit contracté de quadrivecteurs):

$$m \underbrace{\ddot{q}_\mu \dot{q}^\mu}_{=0} = \underbrace{e F_{\mu\rho} \dot{q}^\rho \dot{q}^\mu}_{=0 \text{ car } F_{\mu\rho} = -F_{\rho\mu}} + \xi \left( \underbrace{\ddot{q}_\mu \dot{q}^\mu}_{=0} + A \underbrace{\dot{q}_\mu \dot{q}^\mu}_{=-c^2} \right)$$

ce qui donne finalement

$$A = \frac{\dot{q}\ddot{q}}{c^2} \stackrel{(2.3.13)}{=} -\frac{\ddot{q}^2}{c^2} \equiv -\frac{1}{c^2} g_{\rho\lambda} \frac{d^2 q^\rho}{ds^2} \frac{d^2 q^\lambda}{ds^2} \quad (2.3.14)$$

### Appendice: le référentiel de repos

A chaque point  $s$  de la ligne d'univers d'une particule on peut associer un référentiel d'inertie, dit *de repos* et noté  $\mathcal{R}^*(s)$  tel que  $\vec{v}^*(s) = \frac{d\vec{q}^*}{dt^*}(s) = 0$ . Puisque clairement  $\frac{dt^*}{ds}(s) = 1$  on a la condition définissant  $\mathcal{R}^*(s)$ :

$$\boxed{\frac{dq}{dt}(s) \stackrel{*}{=} (\vec{0}, 1)}. \quad (2.3.15)$$

Naturellement, si la particule n'est pas libre (i.e., la trajectoire n'est pas une droite), le référentiel de repos sera différent selon le point, et par conséquent on aura une accélération. Notons que l'invariant relativiste "intervalle de temps propre" coïncide avec l'intervalle de temps mesuré dans  $\mathcal{R}^*(s)$ . En effet:

$$ds^2 = dt^2 - \frac{\vec{d}q^2}{c^2} \stackrel{*}{=} (dt^*)^2$$

d'où, pour des transformations orthochrones:

$$\boxed{ds = dt^*}. \quad (2.3.16)$$

Pour calculer la valeur d'un quadrivecteur dans  $\mathcal{R}^*(s)$ , il faut d'abord calculer la forme générale, puis appliquer (2.3.15). A titre d'exemple, calculons  $\frac{d^2 t}{ds^2}$ :

$$\frac{d^2 t}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left( \frac{dt}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{ds} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}}$$

et par conséquent  $\frac{d^2 t}{ds^2} \stackrel{*}{=} 0$ . En fait, on peut montrer plus généralement que  $\frac{d^2 q}{ds^2} \stackrel{*}{=} (\vec{a}, 0)$ .

## Exercice 2.4

Soit  $\Psi(x)$  la solution de l'équation de Dirac libre (2.34):

$$\left[ \gamma^\nu \partial_\nu + \frac{m c}{\hbar} \mathbb{1} \right] \Psi(x) = 0.$$

En multipliant cette équation à gauche par  $(\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{m c}{\hbar} \mathbb{1})$ , on obtient:

$$\left[ \gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu - \left( \frac{m c}{\hbar} \right)^2 \mathbb{1} \right] \Psi(x) = 0.$$

Nous allons montrer que celle-ci n'est autre que l'équation de Klein-Gordon (2.11). En utilisant le fait que  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \mathbb{1}$ , on obtient:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu = 2g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \mathbb{1} - \gamma^\nu \gamma^\mu \partial_\mu \partial_\nu$$

Autrement dit, en observant que  $\partial_\mu \partial_\nu \Psi(x) = \partial_\nu \partial_\mu \Psi(x)$ :

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu = g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \mathbb{1}.$$

Comme  $g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \square$ , on obtient le résultat annoncé.

*Remarque:* l'équation de Klein-Gordon est associée à la condition de masse. Il est donc "normal" que les solutions de l'équation de Dirac satisfassent cette condition, en l'absence de champ.

## Exercice 2.5

*Avertissement:* ces relations peuvent être établies par des approches diverses. Celle qui est proposée ne nécessite la mémorisation d'aucune identité du calcul vectoriel. Il est important d'apprendre à distinguer le caractère vectoriel des objets (lié à la manière dont ils se transforment lors d'un changement de coordonnées; ainsi,  $\vec{\alpha}$  et  $\vec{q}$  sont des vecteurs contravariants, alors que  $\vec{\Sigma}$  et  $\vec{p}$  sont covariants) du caractère opératoire des mêmes objets ( $\vec{p}$  et  $\vec{q}$  agissent sur chaque composante de la fonction d'onde de Dirac en tant que fonction de  $x$ ; alors que  $\vec{\alpha}$  et  $\vec{\Sigma}$  sont des matrices qui mélangent les composantes de la fonction d'onde). C'est donc pour des raisons pédagogiques que l'on travaille avec les notations explicitées<sup>2</sup>, comme

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{p} = \alpha^j \otimes p_j$$

qui mettent en relief le caractère vectoriel dans la position des indices, et le caractère opératoire par l'utilisation du symbole  $\otimes$ . Par ailleurs, on écrira le produit extérieur comme  $(\vec{a} \wedge \vec{b})_i = \epsilon_{ijk} a^j b^k$  (pour se familiariser avec ces objets, cf. l'appendice à ce corrigé). Finalement, on utilisera les identités opératoires:

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C] \quad (2.5.1)$$

$$\{A, BC\} = \{A, B\}C - B\{A, C\} \quad (2.5.2)$$

**Relation (1):**  $[\vec{\alpha} \cdot \vec{p}, \vec{L}] = -i\hbar \vec{\alpha} \wedge \vec{p}$

Le calcul est immédiat:

$$[\vec{\alpha} \cdot \vec{p}, L_i] = [\alpha^j \otimes p_j, \mathbb{1} \otimes \epsilon_{ikl} q^k p_l] = \alpha^j \otimes \epsilon_{ikl} \underbrace{[p_j, q^k p_l]}_{\stackrel{(2.5.1)}{=} -i\hbar \delta_j^k p_l} = -i\hbar \epsilon_{ijl} \alpha^j \otimes p_l = -i\hbar (\vec{\alpha} \wedge \vec{p})_i.$$

**Relation (2):**  $[\vec{\alpha} \cdot \vec{p}, \vec{\Sigma}] = 2i\vec{\alpha} \wedge \vec{p}$

Rappelons que  $\vec{\Sigma} = \frac{1}{2i} \vec{\alpha} \wedge \vec{\alpha}$ , i.e.  $\Sigma_i = \frac{1}{2i} \epsilon_{ijk} \alpha^j \alpha^k$ , et que  $\{\alpha^j, \alpha^k\} = 2\delta^{jk} \mathbb{1}$ . Alors:

$$\begin{aligned} [\vec{\alpha} \cdot \vec{p}, \Sigma_i] &= p_j \otimes [\alpha^j, \Sigma_i] \stackrel{(2.5.2)}{=} p_j \otimes \frac{1}{2i} \epsilon_{ikl} (\{\alpha^j, \alpha^k\} \alpha^l - \alpha^k \{\alpha^j, \alpha^l\}) = \\ &= p_j \otimes \frac{1}{i} (\epsilon_{ijl} \alpha^l - \epsilon_{ikj} \alpha^k) = p_j \otimes i(\epsilon_{ilj} \alpha^l + \epsilon_{ikj} \alpha^k) = 2i(\vec{\alpha} \wedge \vec{p})_i. \end{aligned}$$

*Commentaire aux relations (1) et (2):* ainsi,  $\vec{L}$  et  $\vec{\Sigma}$  ne sont pas des constantes du mouvement pour l'hamiltonien de Dirac libre (2.23). Deux liens avec le cours: (i) *Zitterbewegung* et problématique liée à

<sup>2</sup>En fait, on commet un abus de notation: en toute rigueur, sur cet espace de Hilbert par exemple  $\vec{p} = \mathbb{1} \otimes \vec{p}$  avec  $\vec{\pi} = (-i\hbar \vec{\nabla})$ .

la définition des opérateurs de position et de spin (opérateurs de Newton-Wigner); (ii) atome hydrogénoïde, dans lequel  $l$  associé à  $\vec{L}$  n'est pas un bon nombre quantique.

**Relations (3) et (4):**  $(\vec{\alpha} \cdot \vec{p})(\vec{\alpha} \cdot \vec{q}) = \vec{p} \cdot \vec{q} - i\vec{\Sigma} \cdot \vec{L}$  et adjointe

Montrons l'identité (3), l'identité (4) étant son adjointe. On utilise la notation habituelle  $q_i = g_{ij} q^j$ .

$$\begin{aligned} (\vec{\alpha} \cdot \vec{p})(\vec{\alpha} \cdot \vec{q}) &= \alpha^i \alpha^j \otimes p_i q_j = \frac{1}{2} (\{\alpha^i, \alpha^j\} + [\alpha^i, \alpha^j]) \otimes p_i q_j = \\ &= \mathbb{1} \delta^{ij} \otimes p_i q_j + \frac{1}{4} [\alpha^i, \alpha^j] \otimes (p_i q_j - p_j q_i) = \\ &= \mathbb{1} \otimes \vec{p} \cdot \vec{q} - i \frac{1}{2} \underbrace{[\alpha^i, \alpha^j]}_{=\epsilon^{ijk} \Sigma_k} \otimes \underbrace{(q_i p_j - q_j p_i)}_{=\epsilon_{ijl} L^l} = \vec{p} \cdot \vec{q} - i\vec{\Sigma} \cdot \vec{L} \end{aligned}$$

où on a utilisé  $\epsilon^{ijk} \epsilon_{ijl} = 2\delta_l^k$ .

**Relation (5):**  $\{\vec{\alpha} \cdot \vec{p}, \vec{\Sigma} \cdot \vec{L}\} = -2\hbar \vec{\alpha} \cdot \vec{p}$

On travaille ici avec des notations plus concises. En soustrayant les identités (4) et (3), on obtient:

$$2i \vec{\Sigma} \cdot \vec{L} = \{[\vec{\alpha} \cdot \vec{q}, \vec{\alpha} \cdot \vec{p}] - \underbrace{[q^i, p_i]}_{=3i\hbar \mathbb{1}}\}.$$

Ainsi:

$$\{\vec{\alpha} \cdot \vec{p}, \vec{\Sigma} \cdot \vec{L}\} = \frac{1}{2i} \{\vec{\alpha} \cdot \vec{p}, ([\vec{\alpha} \cdot \vec{q}, \vec{\alpha} \cdot \vec{p}] - 3i\hbar \mathbb{1})\} = -2\hbar \vec{\alpha} \cdot \vec{p}$$

car

$$\{\vec{\alpha} \cdot \vec{p}, [\vec{\alpha} \cdot \vec{q}, \vec{\alpha} \cdot \vec{p}]\} = [\vec{\alpha} \cdot \vec{q}, (\vec{\alpha} \cdot \vec{p})^2] = [\vec{\alpha} \cdot \vec{q}, \vec{p}^2] = \vec{\alpha} \cdot [\vec{q}, \vec{p}^2] \stackrel{(2.5.1)}{=} 2i\hbar \vec{\alpha} \cdot \vec{p}.$$

**Appendice: le produit extérieur**

Soient  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ , supposés initialement contravariants (on verra que la donnée du tenseur métrique permet d'étendre naturellement cette définition). Le produit extérieur peut être écrit sous la forme

$$(\vec{a} \wedge \vec{b})_i = \epsilon_{ijk} a^j b^k \quad \text{avec} \quad \epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } ijk \text{ permutation paire de } 123 \\ -1 & \text{si } ijk \text{ permutation impaire de } 123 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (2.5.3)$$

Ce qui compte est l'ordre des indices de  $\epsilon_{ijk}$ : le premier indique la composante du vecteur produit, le deuxième et le troisième sont associés respectivement au premier et au deuxième vecteur; ainsi en particulier:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \wedge \vec{b})_i &= \epsilon_{ijk} a^j b^k = -\epsilon_{ikj} a^j b^k = \\ &= -\epsilon_{ikj} (b^k a^j + [a^j, b^k]) = -(\vec{b} \wedge \vec{a})_i + \epsilon_{ijk} [a^j, b^k]. \end{aligned}$$

On peut inverser la relation (2.5.3):

$$C_i = \epsilon_{ijk} a^j b^k \Leftrightarrow a^i b^j - a^j b^i = \epsilon^{ijk} C_k \quad (2.5.4)$$

En vertu de la propriété du tenseur métrique  $g^l m g_{m,n} = \delta_n^l$ , on a (p.ex.)

$$\epsilon_{ijk} a^j b^k = \epsilon_{ij}{}^k a^j b_k$$

ce qui permet de définir le produit extérieur entre deux vecteurs de variance quelconque.

Notons pour finir que si  $\vec{b} = \vec{a}$ , alors  $(\vec{a} \wedge \vec{a})_i = [a^j, a^k]$ , avec  $ijk$  permutation paire de 123.

## Exercice 2.6

### Calcul

On reprend exactement le calcul de la relation (2) dans l'exercice 2.5: la définition (2.54) de  $\vec{\Sigma}$  peut s'écrire en composantes  $\Sigma_i = \frac{1}{2i} \epsilon_{ikl} \alpha^k \alpha^l$ ; on utilise ensuite la relation opératorielle  $[A, BC] = \{A, B\}C - B\{A, C\}$ , avec  $\{\alpha^j, \alpha^k\} = 2\delta^{jk}\mathbf{1}$ . Attention au jonglage avec les permutations d'indices!

$$\begin{aligned} [\alpha^j, \omega^i \Sigma_i] &= \omega^i [\alpha^j, \Sigma_i] = \omega^i \frac{1}{2i} \epsilon_{ikl} (\{\alpha^j, \alpha^k\} \alpha^l - \alpha^k \{\alpha^j, \alpha^l\}) = \\ &= \omega^i \frac{1}{i} (\epsilon_{ijl} \alpha^l - \epsilon_{ikj} \alpha^k) = i \omega^i (\epsilon^j{}_{il} \alpha^l + \epsilon^j{}_{ik} \alpha^k) = 2i(\vec{\omega} \wedge \vec{\alpha})^j. \end{aligned}$$

On a donc obtenu:

$$[\vec{\alpha}, \vec{\omega} \cdot \vec{\Sigma}] = 2i\vec{\omega} \wedge \vec{\alpha} \quad (2.6.1)$$

### Commentaire

Ainsi, sous l'action des rotations,  $\vec{\alpha}$  se transforme selon<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} U(\vec{\omega}) \vec{\alpha} U^{-1}(\vec{\omega}) &= e^{-\frac{i}{2}\vec{\omega} \cdot \vec{\Sigma}} \vec{\alpha} e^{\frac{i}{2}\vec{\omega} \cdot \vec{\Sigma}} \\ &= \left( \mathbf{1} - i\frac{\vec{\omega}}{2} \cdot \vec{\Sigma} + O(\vec{\omega}^2) \right) \vec{\alpha} \left( \mathbf{1} + i\frac{\vec{\omega}}{2} \cdot \vec{\Sigma} + O(\vec{\omega}^2) \right) \\ &= \vec{\alpha} + \frac{i}{2} [\vec{\alpha}, \vec{\omega} \cdot \vec{\Sigma}] + O(\vec{\omega}^2) \stackrel{(2.6.1)}{=} \vec{\alpha} - \vec{\omega} \wedge \vec{\alpha} + O(\vec{\omega}^2). \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

Donc  $\vec{\alpha}$  se transforme comme un vecteur sous l'action des rotations. S'il n'en avait pas été ainsi, l'hamiltonien libre de Dirac (2.29) n'aurait pas été invariant par rotation, puisqu'il contient le terme  $\vec{\alpha} \cdot \vec{p}$ . Donc notre petit calcul est une vérification de consistance de la construction de la théorie de Dirac.

<sup>3</sup>Il s'agit ici d'un cas particulier de l'identité opératorielle:

$$e^{\lambda A} B e^{-\lambda A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \Omega_n(A, B) = B + \lambda [A, B] + O(\lambda^2)$$

avec  $\Omega_n(A, B) = [A, [A, \dots [A, B] \dots]]$  les  $n$  commutateurs emboîtés.

## Exercice 2.8

### Rappel de Schrödinger

On rappelle que pour l'atome d'hydrogène avec l'équation de Schrödinger on arrive à l'équation

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} + \frac{2}{\rho} + \frac{E}{E_I} \right] u(\rho) = 0 \quad (2.8.1)$$

et de celle-ci on tire le spectre<sup>4</sup>

$$\frac{E_N}{E_I} = -\frac{1}{n^2}, \quad n = l + n', \quad n' \in \mathbb{N}^*. \quad (2.8.2)$$

### Introduction, points 1 et 2

L'équation de Klein-Gordon (2.10) pour l'atome d'hydrogène est

$$\left[ \hbar^2 \Delta + \frac{1}{c^2} (i\hbar \partial_t - e\Phi(x))^2 - m^2 c^2 \right] \psi(x) = 0, \quad \text{avec} \quad \Phi(x) = \frac{-e}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x}|}. \quad (2.8.3)$$

Si l'on considère une solution stationnaire  $\psi(x) = \phi(\vec{x})e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$ , on remplace  $i\hbar \partial_t$  par  $E$  dans (2.8.3). On cherche une solution de la forme  $\phi(\vec{x}) = R(r)Y_l^m(\theta, \phi)$ ; avec

$$\hbar^2 \Delta = \hbar^2 \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r - \frac{\vec{L}^2}{r^2}$$

et  $\vec{L}^2 Y_l^m(\theta, \phi) = \hbar^2 l(l+1) Y_l^m(\theta, \phi)$ , le point 1 est immédiat. Le point 2 est une simple réécriture. En posant  $u(\rho) = \rho R(\rho)$  on aboutit à

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{l(l+1) - \alpha^2}{\rho^2} + \frac{2\alpha\epsilon}{\rho} + (\epsilon^2 - 1) \right] u(\rho) = 0 \quad (2.8.4)$$

### Point 3

A partir de (2.8.4), le changement de variable  $\xi = \alpha\epsilon\rho$  donne

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\gamma(\gamma+1)}{\xi^2} + \frac{2}{\xi} + \frac{\epsilon^2 - 1}{\alpha^2 \epsilon^2} \right] u(\xi) = 0 \quad (2.8.5)$$

où nous avons posé  $\gamma(\gamma+1) = l(l+1) - \alpha^2$  i.e.

$$\gamma = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - \alpha^2}. \quad (2.8.6)$$

<sup>4</sup>Rappelons que  $E_I = \frac{1}{2} m c^2 \alpha^2 = 13.6 \text{ eV}$ , avec  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \sim \frac{1}{137}$ .

Cette équation est tout-à-fait identique à (2.8.1), donc vue (2.8.2) on a  $\frac{\epsilon^2 - 1}{\alpha^2 \epsilon^2} = -\frac{1}{\Gamma^2}$ , avec  $\Gamma = \gamma + n'$  c'est-à-dire

$$E_{\gamma+n'} = m c^2 \left[ 1 + \left( \frac{\alpha}{\gamma+n'} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad n' \in \mathbb{N}^*. \quad (2.8.7)$$

Pour le développement en puissances de  $\alpha^2$ , posons  $\alpha^2 = x$ . On a  $\gamma = \gamma(x)$  et donc

$$n' + \gamma = \underbrace{n' + l}_n - \frac{x}{2l+1} + O(x^2).$$

On utilise alors  $(1 + \xi)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\xi + \frac{3}{8}\xi^2 + O(\xi^3)$  avec

$$\xi(x) = \frac{x}{\left(n - \frac{x}{2l+1} + O(x^2)\right)} = \frac{x}{n^2} + \frac{x^2}{n^4} \frac{n}{l+1/2} + O(x^3)$$

et finalement

$$E_n = m c^2 \left[ 1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} - \frac{\alpha^4}{2n^4} \left( \frac{n}{l+1/2} - \frac{3}{4} \right) \right] + O(\alpha^6). \quad (2.8.8)$$

Dans ce résultat on distingue clairement l'énergie de masse, l'énergie obtenue dans le calcul non-relativiste (2.8.2) et la première correction due aux effets relativistes. Rappelons que  $\alpha = \frac{1}{137}$ , donc la correction relativiste est environ quatre ordres de grandeur plus petite que le terme non-relativiste. La dégénérescence accidentelle sur  $l$  est levée.

Terminons par la comparaison avec l'atome d'hydrogène dans le théorie de Dirac, qui est un modèle plus réaliste puisque l'électron est une particule de spin  $\frac{1}{2}$ . On trouve, formule (2.102) du cours, la même expression approchée (2.8.8), quitte à remplacer  $l+1/2$  par  $j+1/2$  dans le terme en  $\alpha^4$ , avec  $j$  la valeur du moment magnétique total.

## Exercice 2.9

Notations: pour éviter des confusions et des lourdeurs, dans tout le corrigé nous notons

$$\xi \doteq \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

(noté habituellement  $\gamma$ ). En outre, nous allons écrire simplement  $\Lambda$  au lieu de  $\Lambda(v)$  et de même  $S$  au lieu de  $S(\Lambda)$ . Il suffit de se souvenir du fait que  $\xi$ ,  $\Lambda$  et  $S$  dépendent de la vitesse  $v$ . La notation  $\dot{S}$  indique la dérivation par rapport à  $v$ , et non pas par rapport au temps.

On considère la transformation de Lorentz pure de vitesse  $\vec{v}$  donnée par

$$\left. \begin{array}{l} \vec{x} \\ t \end{array} \right\} \xrightarrow{\Lambda} \left\{ \begin{array}{l} \vec{x}' = \vec{x}_\perp + \xi(\vec{x}_\parallel - \vec{v}t) \\ t' = \xi(t - \frac{\vec{x} \cdot \vec{v}}{c^2}) \end{array} \right. \quad (2.9.1)$$

La matrice  $S(\Lambda)$  définissant la transformation de la fonction d'onde de Dirac doit satisfaire la relation :

$$S^{-1} \gamma^\mu S = \Lambda_\nu^\mu \gamma^\nu \quad (2.9.2)$$

### 1e étape

En écrivant  $\vec{v} = \vec{n}v$  avec  $\vec{n}$  fixé et dérivant par rapport à  $v$  l'équation (2.9.2), on obtient:

$$(S^{-1}) \gamma^\mu \dot{S} + S^{-1} \gamma^\mu \dot{S} = \dot{\Lambda}_\nu^\mu \gamma^\nu \quad (2.9.3)$$

Or, en dérivant l'égalité  $SS^{-1} = \mathbf{1}$  on obtient  $(S^{-1}) \dot{S} = -S^{-1} \dot{S} S^{-1}$  et par conséquent l'équation (2.9.3) devient:

$$-S^{-1} \dot{S} \underbrace{S^{-1} \gamma^\mu S}_{= \Lambda_\rho^\mu \gamma^\rho} + S^{-1} \gamma^\mu \dot{S} = \dot{\Lambda}_\nu^\mu \gamma^\nu$$

En insérant l'expression  $SS^{-1} = \mathbf{1}$  dans le deuxième membre de gauche de cette équation, on obtient en utilisant de nouveau (2.9.2):

$$[\Lambda_\rho^\mu \gamma^\rho, S^{-1} \dot{S}] = \dot{\Lambda}_\nu^\mu \gamma^\nu$$

autrement dit

$$\boxed{[\gamma^\alpha, S^{-1} \dot{S}] = (\Lambda^{-1})_\mu^\alpha \dot{\Lambda}_\nu^\mu \gamma^\nu.} \quad (2.9.4)$$

### 2e étape

Étudions d'abord le produit des matrices  $\Lambda^{-1} \dot{\Lambda}$ . Or,  $\Lambda^{-1}$ , resp.  $\dot{\Lambda}$ , s'obtient immédiatement à partir de (2.9.1) en remplaçant  $\vec{v}$  par  $-\vec{v}$ , resp. en dérivant par rapport à la vitesse:

$$\left[ \begin{array}{l} \vec{x} \\ t \end{array} \right] \xrightarrow{\Lambda^{-1}} \left[ \begin{array}{l} \vec{x}' = \vec{x}_\perp + \xi(\vec{x}_\parallel + \vec{v}t) \\ t' = \xi(t + \frac{\vec{x} \cdot \vec{v}}{c^2}) \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{l} \vec{x} \\ t \end{array} \right] \xrightarrow{\dot{\Lambda}} \left[ \begin{array}{l} \vec{x}' = \dot{\xi}(\vec{x}_\parallel - \vec{v}t) - \xi \vec{n}t \\ t' = \dot{\xi}(t - \frac{\vec{x} \cdot \vec{v}}{c^2}) - \xi \frac{\vec{n} \cdot \vec{x}}{c^2} \end{array} \right]$$

Par conséquent, si l'on définit  $x'' = \Lambda^{-1} \dot{\Lambda} x$ , on obtient après calcul:

$$\begin{aligned} x'' &= -\xi^2 \vec{n}t \\ t'' &= -\xi^2 \frac{\vec{n} \cdot \vec{x}}{c^2} \end{aligned}$$

où l'on utilise  $\dot{\xi} = \frac{v}{c^2} \xi^3$  et  $(\vec{v} \cdot \vec{x})\vec{v} = v^2 \vec{x}_\parallel$ . Donc en conclusion

$$\Lambda^{-1} \dot{\Lambda} = -\xi^2 \begin{bmatrix} 0 & \vec{n} \\ \vec{n}^T/c^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.9.5)$$

i.e. plus explicitement

$$(\Lambda^{-1})_\mu^i \dot{\Lambda}_\nu^\mu = \begin{cases} 0, & \nu = 1, 2, 3 \\ -\xi^2 n^i, & \nu = 4 \end{cases} \quad (2.9.6)$$

$$(\Lambda^{-1})_\mu^4 \dot{\Lambda}_\nu^\mu = \begin{cases} -\xi^2 \frac{n^i}{c^2}, & \nu = i = 1, 2, 3 \\ 0, & \nu = 4 \end{cases} \quad (2.9.7)$$

### 3e étape

On peut alors reprendre l'équation (2.9.4) et obtenir:

$$\begin{aligned} [\gamma^i, S^{-1} \dot{S}] &= (\Lambda^{-1})_\mu^i \dot{\Lambda}_\nu^\mu \gamma^\nu \stackrel{(2.9.6)}{=} -\xi^2 n^i \gamma^4 \stackrel{*}{=} \frac{\xi^2}{2} [\gamma^i, \gamma^4 \vec{n} \cdot \vec{\gamma}] \\ [\gamma^4, S^{-1} \dot{S}] &= (\Lambda^{-1})_\mu^4 \dot{\Lambda}_\nu^\mu \gamma^\nu \stackrel{(2.9.7)}{=} -\xi^2 \frac{\vec{n} \cdot \vec{\gamma}}{c^2} \stackrel{*}{=} \frac{\xi^2}{2} [\gamma^4, \gamma^4 \vec{n} \cdot \vec{\gamma}] \end{aligned} \quad (2.9.8)$$

où la dernière égalité de chaque ligne reste à vérifier. Cela se fait en utilisant  $[A, BC] = \{A, B\}C - B\{A, C\}$ :

$$\begin{aligned} [\gamma^i, \gamma^4 \vec{n} \cdot \vec{\gamma}] &= -\gamma^4 n_j \{\gamma^i, \gamma^j\} = -2\gamma^4 n_i \\ [\gamma^4, \gamma^4 \vec{n} \cdot \vec{\gamma}] &= 2g^{44} \vec{n} \cdot \vec{\gamma} = -\frac{2}{c^2} \vec{n} \cdot \vec{\gamma} \end{aligned}$$

En conclusion, (2.9.8) donne

$$[\gamma^\mu, S^{-1}\dot{S}] = \left[ \gamma^\mu, \frac{\xi^2}{2} \gamma^4 \vec{n} \cdot \vec{\gamma} \right], \quad \forall \mu = 1, \dots, 4 \quad (2.9.9)$$

ce qui peut se récrire en utilisant  $\alpha^k = c\gamma^k\gamma^4$ :

$$\left[ \gamma^\mu, S^{-1}\dot{S} + \frac{\xi^2}{2c} \vec{n} \cdot \vec{\alpha} \right] = 0 \quad \forall \mu. \quad (2.9.10)$$

En vertu du lemme de Schur, seule l'identité peut commuter avec les quatre matrices  $\gamma^\mu$  à la fois; par conséquent:

$$S^{-1}(v)\dot{S}(v) = -\frac{\xi^2(v)}{2c} \vec{n} \cdot \vec{\alpha} + \lambda \mathbb{1}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (2.9.11)$$

#### 4e étape

La transformation de Lorentz pure de vitesse nulle étant l'identité, on a la condition initiale  $S(v=0) \equiv \mathbb{1}$ . La solution de l'équation différentielle (2.9.11) pour  $S(v)$  s'écrit:

$$S(v) = \exp \left[ -\int_0^v ds \frac{\xi^2(s)}{2c} \vec{n} \cdot \vec{\alpha} + \lambda v \mathbb{1} \right]. \quad (2.9.12)$$

Or,

$$\int_0^v ds \xi^2(s) = c \int_0^{v/c} dx \frac{1}{1-x^2} = c \operatorname{argth}(v/c)$$

d'où, en choisissant  $\lambda = 0$ :

$$S(v) = \exp \left[ -\frac{1}{2} \vec{\zeta}(v) \cdot \vec{\alpha} \right], \quad \vec{\zeta}(v) = \vec{n} \operatorname{argth}(v/c). \quad (2.9.13)$$

Notons que cette matrice est hermitique: en effet  $S(v)^\dagger = \exp \left[ -\frac{1}{2} \vec{\zeta} \cdot \vec{\alpha}^\dagger \right] = S(v)$  car les  $\alpha^i$  sont autoadjointes. Par ailleurs, pour tout vecteur  $\vec{v}$  on a  $(\vec{v} \cdot \vec{\alpha})^2 = |\vec{v}|^2 \mathbb{1}$ , et donc

$$S(v) = \cosh \left( \frac{\zeta(v)}{2} \right) \mathbb{1} - \sinh \left( \frac{\zeta(v)}{2} \right) \vec{n} \cdot \vec{\alpha}, \quad \zeta(v) = \operatorname{argth}(v/c) \quad (2.9.14)$$

où en vertu de la définition de  $\zeta(v)$ ,  $\cosh \left( \frac{\zeta}{2} \right) = \sqrt{\frac{\xi+1}{2}}$  et  $\sinh \left( \frac{\zeta}{2} \right) = \sqrt{\frac{\xi-1}{2}}$ .

#### Appendice

Discutons brièvement la structure de sous-groupe à un paramètre qui est cachée dans notre approche. Le groupe que l'on considère est bien entendu le groupe de Lorentz orthochrone, c'est-à-dire un ensemble de

changements de référentiel. Nous nous restreignons aux transformations dites "Lorentz pures" (i.e., pas de rotations) et nous fixons  $\vec{n}$ , la direction de la vitesse. Nous restons donc avec un sous-groupe caractérisé par un seul paramètre (un seul degré de liberté), associé au module de la vitesse.

On sait que les vitesses ne s'additionnent pas lorsque l'on combine deux transformations de Lorentz pures; mais on peut montrer que pour  $\vec{n}$  fixé il existe un paramètre  $\zeta = \zeta(v)$  tel que

$$\Lambda(\zeta_1)\Lambda(\zeta_2) = \Lambda(\zeta_1 + \zeta_2). \quad (2.9.15)$$

Ce paramètre (appelé *rapidité*) est

$$\zeta(v) = \operatorname{argth} \frac{v}{c}.$$

La loi de composition (2.9.15) entraîne

$$S(\zeta_1 + \zeta_2) = S(\zeta_1)S(\zeta_2). \quad (2.9.16)$$

Prenons alors  $\zeta_1 = \zeta$ ,  $\zeta_2 = d\zeta$ :

$$\begin{aligned} S(\zeta + d\zeta) &= S(\zeta) + \frac{dS}{d\zeta}(\zeta)d\zeta + O(d\zeta^2) = \\ &\stackrel{(2.9.16)}{=} S(\zeta)S(d\zeta) = S(\zeta)[\mathbb{1} + Ad\zeta + O(d\zeta^2)] \end{aligned}$$

avec  $A = \frac{dS}{d\zeta}(\zeta=0)$  le générateur de la représentation du sous-groupe (translations de vitesse dans la direction  $\vec{n}$ ). Ceci donne une équation différentielle dont la solution est immédiate:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS}{d\zeta} &= AS \\ S(0) &= \mathbb{1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow S(\zeta) = \exp(AS). \quad (2.9.17)$$

Il reste à calculer  $A$ , ce que l'on ne fait pas ici. Nous avons obtenu dans l'exercice  $A = -\frac{1}{2}\vec{n} \cdot \vec{\alpha}$ .



## Exercice 2.11

Posons  $D_\mu = \partial_\mu - i\frac{e}{\hbar}A_\mu(x)$ . Soit l'équation de Dirac avec champ électromagnétique extérieur

$$(2.95) \quad \left[ \gamma^\nu D_\nu + \frac{mc}{\hbar} \mathbb{1} \right] \Psi(x) = 0. \quad (2.11.1)$$

En multipliant à gauche par  $(\gamma^\mu D_\mu - \frac{mc}{\hbar} \mathbb{1})$ , on a:

$$\left[ \gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu D_\nu - \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \mathbb{1} \right] \Psi(x) = 0$$

ce que l'on va récrire en utilisant  $\gamma^\mu \gamma^\nu = \frac{1}{2}([\gamma^\mu, \gamma^\nu] + \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\})$ :

$$\left\{ g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu - \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \mathbb{1} \right\} \Psi(x) = -\frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] D_\mu D_\nu \Psi(x). \quad (2.11.2)$$

Pour travailler le terme de droite, on explicite le produit  $D_\mu D_\nu$ . Puisque<sup>5</sup> la multiplication contractée d'un tenseur antisymétrique (ici,  $[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ ) avec la partie symétrique d'un autre tenseur donne 0, on a

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \partial_\mu \partial_\nu = [\gamma^\mu, \gamma^\nu] A_\mu(x) A_\nu(x) = 0$$

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu] (\partial_\mu A_\nu + A_\mu \partial_\nu) = [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu + A_\mu \partial_\nu - \partial_\nu A_\mu - A_\nu \partial_\mu)$$

Le deuxième membre de l'équation (2.11.2) s'écrit alors:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] D_\mu D_\nu \Psi(x) &= i\frac{e}{4\hbar} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \left\{ \underbrace{\partial_\mu (A_\nu(x) \Psi(x)) - A_\nu(x) \partial_\mu \Psi(x)}_{=(\partial_\mu A_\nu(x)) \Psi(x)} + \right. \\ &\quad \left. + A_\mu(x) \partial_\nu \Psi(x) - \partial_\nu (A_\mu(x) \Psi(x)) \right\} = \\ &= i\frac{e}{4\hbar} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \{ \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \} \Psi(x) = \\ &\equiv i\frac{e}{4\hbar} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}(x) \Psi(x) \end{aligned} \quad (2.11.3)$$

Autrement dit les solutions de l'équation de Dirac avec champ extérieur (2.11.1) sont solutions de l'équation de Klein-Gordon suivante

$$\boxed{\left\{ g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu - \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \mathbb{1} \right\} \Psi(x) = i\frac{e}{4\hbar} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}(x) \Psi(x).} \quad (2.11.4)$$

<sup>5</sup>En effet trivialement:  $a^{[\mu\nu]}b_{(\mu\nu)} = a^{[\mu\nu]}b_{(\nu\mu)} = -a^{[\nu\mu]}b_{(\nu\mu)}$ .

Exprimons le second membre de cette équation en termes du champ électrique et du champ d'induction magnétique (avec  $i, j, k$  permutation paire de 1, 2, 3):

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}(x) = 2 \underbrace{[\gamma^i, \gamma^j]}_{=-\frac{2}{c}\alpha^i} E_i(x) + \underbrace{[\gamma^i, \gamma^j]}_{=-2i\Sigma_k} \overbrace{F_{ij}(x)}^{=B^k(x)}.$$

Ainsi le deuxième terme de l'équation (2.11.4) est donné par

$$i\frac{e}{4\hbar} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}(x) = -i\frac{e}{\hbar c} \vec{\alpha} \cdot \vec{E}(x) + \frac{e}{\hbar} \vec{\Sigma} \cdot \vec{B}(x). \quad (2.11.5)$$

Il s'agit d'un terme de type couplage de Pauli, covariant et invariant de jauge.

## Exercice 2.12

### Introduction au paradoxe de Klein

Le paradoxe de Klein n'a jamais été testé par l'expérience, de par la difficulté de trouver un système physique en présence d'une marche de potentiel excédant le double de l'énergie de masse.

Ce paradoxe est en fait l'un des nombreux problèmes liés à l'interprétation ondulatoire de l'électron de Dirac en présence de champs forts (rappelons le problème des valeurs propres de l'atome d'hydrogène, dans ce même registre).

### Point 1: position du problème, constante du mouvement

On considère l'équation de Dirac avec champ extérieur (2.91) pour une particule astreinte à un mouvement unidimensionnel  $\vec{p} = p_z \hat{e}_z$ , dans le potentiel extérieur

$$\Phi(z) = \begin{cases} 0 & , z < 0 \\ \Phi_0 & , z > 0 \end{cases}.$$

L'hamiltonien de Dirac devient

$$H = c\alpha^z p_z + mc^2 \beta + e\Phi(z) \mathbb{1}_4 = \begin{pmatrix} (e\Phi(z) + mc^2) \mathbb{1}_2 & cp_z \sigma^z \\ cp_z \sigma^z & (e\Phi(z) - mc^2) \mathbb{1}_2 \end{pmatrix}. \quad (2.12.1)$$

Il est alors manifeste, étant donné que  $\Sigma_z = \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix}$ , que  $[H, \Sigma_z] = 0$ .

### Point 2: choix du spin

Le fait d'être fonction propre de l'hélicité se traduit dans notre cas par

$$W \Psi(z) \equiv \Sigma_z p_z \Psi(z) = \Sigma p \Psi(z) \equiv \sigma |p| \Psi(z); \quad (2.12.2)$$

où  $p$  est la valeur propre de  $p_z$ ,  $\Sigma$  celle de  $\Sigma_z$ , et  $\sigma$  est l'hélicité. Pour l'électron incident  $p > 0$ , donc  $\sigma = +1$  signifie  $\Sigma = +1$ ; mais  $\Sigma_z$  est une constante du mouvement, donc en conclusion: si on exige que l'électron incident ait une hélicité déterminée  $\sigma = +1$ , alors la fonction d'onde du problème est une fonction propre de  $\Sigma_z$  pour la valeur propre  $+1$ , i.e.

elle est de la forme

$$\Psi(z) = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ 0 \\ \Psi_3 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.12.3)$$

Notons que la conservation du spin entraîne que l'électron réfléchi ( $p < 0$ ) a une hélicité  $\sigma = -1$ .

L'équation aux valeurs propres avec  $H$  devient donc

$$\begin{pmatrix} e\Phi(z) + mc^2 & -i\hbar c d_z \\ -i\hbar c d_z & e\Phi(z) - mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_3 \end{pmatrix}. \quad (2.12.4)$$

et le courant de Dirac  $j(z) = c\Psi^*(z)\alpha^z\Psi(z)$  devient<sup>6</sup>

$$j(z) = c(\Psi_3^* \Psi_1 + \Psi_1^* \Psi_3). \quad (2.12.5)$$

### Point 3a: structure du problème

Avec les variables sans dimension de la donnée, l'équation aux valeurs propres devient

$$\begin{pmatrix} 1 - \delta(x) & -id_x \\ -id_x & -1 - \delta(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_3(x) \end{pmatrix} = 0, \text{ avec } \delta(x) = \begin{cases} \epsilon & , x < 0 \\ \epsilon - \epsilon_0 & , x > 0 \end{cases}.$$

Ce système s'écrit explicitement

$$\begin{cases} d_x \Psi_3 = i(\delta - 1) \Psi_1 \\ d_x \Psi_1 = i(\delta + 1) \Psi_3 \end{cases} \quad (2.12.6)$$

Or, séparément dans les deux régions  $x < 0$  et  $x > 0$ ,  $\delta(x)$  est constant, ce qui donne l'équation

$$d_x^2 \Psi_{1,3} = -(\delta^2 - 1) \Psi_{1,3}, \quad x < 0 \text{ ou } x > 0. \quad (2.12.7)$$

### Point 3b: solution pour $z \neq 0$

<sup>6</sup>Il s'agit de la composante  $j^z$  du courant; il est trivial de vérifier que les composantes  $j^x$  et  $j^y$  s'annulent, conformément à l'intuition.

Dans la région  $x < 0$  on a  $\delta = \epsilon > 1$  (car on veut un électron, et non pas un trou). La solution de (2.12.7) est alors

$$\Psi_{1,3}(x) = c_{1,3}^{in} e^{ikx} + c_{1,3}^{ref} e^{-ikx}, \quad k = \sqrt{\epsilon^2 - 1}.$$

Si on insère cela dans (2.12.6), on trouve<sup>7</sup>

$$\frac{c_3}{c_1} = \pm \sqrt{\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1}}$$

le signe +, resp. -, se référant à l'onde incidente, resp. réfléchie. La solution peut s'écrire, avec  $\rho, A \in \mathbb{C}$ :

$$\begin{aligned} c_1^{in} &= A\sqrt{\epsilon + 1}, & c_1^{ref} &= \rho A\sqrt{\epsilon + 1} \\ c_3^{in} &= A\sqrt{\epsilon - 1}, & c_3^{ref} &= -\rho A\sqrt{\epsilon - 1} \end{aligned}$$

Donc en conclusion

$$\begin{cases} \Psi_1(x) \\ \Psi_3(x) \end{cases} = A \begin{bmatrix} \sqrt{\epsilon + 1} \\ \sqrt{\epsilon - 1} \end{bmatrix} e^{ikx} + \rho A \begin{bmatrix} \sqrt{\epsilon + 1} \\ -\sqrt{\epsilon - 1} \end{bmatrix} e^{-ikx}, \quad x < 0, \quad k = \sqrt{\epsilon^2 - 1}. \quad (2.12.8)$$

Par comparaison avec (2.80), remarquons que l'onde réfléchie est associée à une hélicité  $\sigma = -1$ ; notre démarche est donc consistante. Avec l'expression pour le courant (2.12.5) on trouve

$$j_{in} = 2c|A|^2\sqrt{\epsilon^2 - 1}, \quad j_{ref} = 2c|A|^2|\rho|^2\sqrt{\epsilon^2 - 1}$$

et donc  $R = |\rho|^2$  est le coefficient de réflexion.

#### Point 4: solutions pour $z > 0$

En  $x > 0$  on considère exclusivement des ondes transmises<sup>8</sup>. Maintenant  $\delta = \epsilon - \epsilon_0$ , on doit donc considérer trois cas:

- (i) Si  $E \geq e\Phi_0 + mc^2$ , l'onde en  $z > 0$  correspond à un état "électron". On a  $\delta \geq 1$ : la situation est identique au cas  $x < 0$ , quitte à remplacer  $\epsilon$  par  $\epsilon - \epsilon_0$  et à omettre l'onde

<sup>7</sup>Puisque les équations obtenues doivent être valables pour tout  $x$ , on doit annuler séparément les coefficients qui multiplient  $e^{ikx}$  et  $e^{-ikx}$ .

<sup>8</sup>Pour une onde transmise au sens propre, cela signifie qu'on considère  $p > 0$ , i.e. uniquement l'onde plane  $e^{ikx}$ . Pour une onde évanescence, la condition équivalente est  $Im(p) > 0$ , correspondant à l'onde  $e^{-kx}$ .

réfléchie. On trouve

$$\begin{cases} \Psi_1(x) \\ \Psi_3(x) \end{cases} = B \begin{bmatrix} \sqrt{\epsilon - \epsilon_0 + 1} \\ \sqrt{\epsilon - \epsilon_0 - 1} \end{bmatrix} e^{ik'x}, \quad \begin{aligned} x &> 0 \\ \epsilon - \epsilon_0 &> 1 \\ k' &= \sqrt{(\epsilon - \epsilon_0)^2 - 1} \end{aligned}. \quad (2.12.9)$$

- (ii) Si  $e\Phi_0 + mc^2 < E < e\Phi_0 + mc^2$ , l'onde en  $z > 0$  correspond à un état "interdit". On a  $-1 < \delta < 1$ . L'équation (2.12.7) donne la solution

$$\Psi_{1,3}(x) = c_{1,3} e^{\sqrt{1 - \delta^2} x};$$

l'insertion dans le système (2.12.6) donne la condition

$$\frac{c_3}{c_1} = i\sqrt{\frac{1 - \delta}{1 + \delta}} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = B\sqrt{1 + \delta} \\ c_3 = iB\sqrt{1 - \delta} \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} \Psi_1(x) \\ \Psi_3(x) \end{cases} = B \begin{bmatrix} \sqrt{1 + (\epsilon - \epsilon_0)} \\ i\sqrt{1 - (\epsilon - \epsilon_0)} \end{bmatrix} e^{-\chi'x}, \quad \begin{aligned} x &> 0 \\ |\epsilon - \epsilon_0| &< 1 \\ \chi' &= \sqrt{1 - (\epsilon - \epsilon_0)^2} \end{aligned}. \quad (2.12.10)$$

- (iii) Il reste le cas  $mc^2 \leq E \leq e\Phi_0 - mc^2$ , dans lequel l'onde en  $z > 0$  correspond à un état "trou". On a  $\delta \leq -1$ . L'équation (2.12.7) donne la solution

$$\Psi_{1,3}(x) = c_{1,3} e^{i\sqrt{\delta^2 - 1} x};$$

l'insertion dans le système (2.12.6) contient un piège de signe, que l'on évite en travaillant avec des quantités positives:

$$\sqrt{\delta^2 - 1}c_3 = -(1 - \delta)c_1 \Rightarrow \frac{c_3}{c_1} = -\sqrt{\frac{1 - \delta}{-1 - \delta}}$$

et finalement

$$\begin{cases} \Psi_1(x) \\ \Psi_3(x) \end{cases} = B \begin{bmatrix} \sqrt{\epsilon_0 - \epsilon - 1} \\ -\sqrt{\epsilon_0 - \epsilon + 1} \end{bmatrix} e^{ik'x}, \quad \begin{aligned} x &> 0 \\ \epsilon - \epsilon_0 &< -1 \\ k' &= \sqrt{(\epsilon - \epsilon_0)^2 - 1} \end{aligned}. \quad (2.12.11)$$

### Point 5: continuité de la fonction d'onde

Imposer la continuité de la fonction d'onde en  $x = 0$  revient à demander

$$A \begin{bmatrix} \sqrt{\epsilon+1} \\ \sqrt{\epsilon-1} \end{bmatrix} + \rho A \begin{bmatrix} \sqrt{\epsilon+1} \\ -\sqrt{\epsilon-1} \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

où  $X$  et  $Y$  varient selon les trois cas considérés. On a donc deux équations pour  $\rho$ ; en éliminant  $\frac{B}{A}$  entre les deux on aboutit à

$$\rho = \frac{1-s}{1+s}, \text{ avec } s = \sqrt{\frac{\epsilon+1}{\epsilon-1}} \frac{Y}{X}. \quad (2.12.12)$$

En remplaçant  $X$  et  $Y$  par leurs valeurs effectives dans les trois cas, on retrouve les définitions de la donnée. Le reste de la discussion ne présente aucune difficulté.

### Commentaire final

Le paradoxe de Klein est un paradoxe de la théorie, car nous avons fait une théorie à un électron et on se retrouve dans une situation qui doit être décrite par une théorie à  $N$  électrons.

Il faut retenir que la théorie à  $N$  électrons prédit une création de paires électron-positron en présence de champs importants.

## Exercice 10.1

Point (i)

A partir de  $\{\gamma^\mu, \gamma^\mu\}^n$  on obtient immédiatement

$$\begin{aligned} (\gamma^\mu)^{2n} &= (g^{\mu\mu})^n \mathbb{1} \\ (\gamma^\mu)^{2n+1} &= (g^{\mu\mu})^n \gamma^\mu \end{aligned} \quad (10.1.1)$$

avec  $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, 1, 1, -1/c^2)$ . Comme dans un produit de matrices de la forme  $\gamma \cdots \gamma$  tous les facteurs *différents* anticommulent, il suit de (10.1.1) que<sup>1</sup>

$$\gamma \cdots \gamma \simeq (\gamma^1)^{n_1} (\gamma^2)^{n_2} (\gamma^3)^{n_3} (\gamma^4)^{n_4}, \quad \text{avec } n_\mu \in \{0, 1\}. \quad (10.1.2)$$

Ainsi, toute matrice appartenant à l'algèbre des matrices  $4 \times 4$  engendrée par les matrices  $\gamma^\mu$  peut s'exprimer par une combinaison des seize matrices  $\gamma^A$  suivantes:

$$\begin{aligned} &\mathbb{1} \\ &\gamma^\mu \quad \mu = 1, \dots, 4 \\ &\gamma^\mu \gamma^\nu \quad \mu < \nu \\ &\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \quad \mu < \nu < \rho \\ &\gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4 \end{aligned} \quad (10.1.3)$$

Soulignons que l'algèbre engendrée par les matrices  $\gamma^\mu$  est a priori une sous-algèbre de  $\mathcal{L}(\mathbb{C}^4)$ , l'algèbre des matrices  $4 \times 4$  complexes; au point (iii) nous allons montrer que les seize matrices  $\gamma^A$  sont indépendantes, et donc qu'en fait cette sous-algèbre coïncide avec  $\mathcal{L}(\mathbb{C}^4)$ .

Point (ii): trace des matrices  $\gamma^A \neq \mathbb{1}$

Pour toutes les matrices  $\gamma^A \neq \mathbb{1}$  il existe au moins une matrice  $\gamma^\lambda$  telle que  $\{\gamma^\lambda, \gamma^A\} = 0$ .

En effet, on vérifie facilement que:  $\{\gamma^\lambda, \gamma^\mu\} = 0$  pour  $\lambda \neq \mu$ ;  $\{\gamma^\lambda, \gamma^\mu \gamma^\nu\} = 0$  pour  $\lambda = \mu$  ou  $\lambda = \nu$ ;  $\{\gamma^\lambda, \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho\} = 0$  pour  $\lambda \neq \mu, \nu, \rho$ ; et finalement  $\{\gamma^\lambda, \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4\} = 0$  pour tout  $\lambda$ .

En utilisant d'une part ce dernier constat, d'autre part la cyclicité de la trace (notée  $c$ ):

$$\text{Tr}(\gamma^\lambda \gamma^A \gamma^\lambda) = \begin{cases} = -\text{Tr}(\gamma^A (\gamma^\lambda)^2) = -g^{\lambda\lambda} \text{Tr}(\gamma^A) \\ \stackrel{c}{=} \text{Tr}(\gamma^A (\gamma^\lambda)^2) = g^{\lambda\lambda} \text{Tr}(\gamma^A) \end{cases}$$

<sup>1</sup>On note  $\simeq$  une égalité à un facteur multiplicatif près.

et par conséquent  $\text{Tr}(\gamma^A) = 0$ .

Point (iii): indépendance linéaire des matrices  $\gamma^A$

Soit  $\{\lambda_A\}_A$  une suite de nombres complexes tels que

$$\sum_A \lambda_A \gamma^A = 0 \quad (10.1.4)$$

Multiplions cette égalité par une matrice  $\gamma^B$ . On aura par construction  $\gamma^A \gamma^B \simeq \gamma^C$ ; d'autre part, il est immédiat en regardant (10.1.2) que  $\gamma^C = \mathbb{1}$  si et seulement si  $A \equiv B$ . En utilisant (ii), on sait alors que  $\text{Tr}(\gamma^A \gamma^B) \simeq \delta^{AB}$ ; ainsi:

$$\text{Tr}\left(\sum_A \lambda_A \gamma^A \gamma^B\right) \stackrel{(10.1.4)}{=} 0 = \sum_A \lambda_A \text{Tr}(\gamma^A \gamma^B) \simeq \lambda_B \text{Tr}((\gamma^B)^2).$$

$\text{Tr}((\gamma^A)^2)$  étant différent de 0, on en déduit que  $\lambda_B = 0$  pour tout  $B$ .

Point (iv)

Soient  $(v_\alpha)_\mu$  les composantes covariantes de  $\alpha = 1, \dots, n$  quadrivecteurs et soit  $\hat{v}_\alpha = (v_\alpha)_\mu \gamma^\mu$ .

(a)  $\text{Tr}(\hat{v}_1 \cdots \hat{v}_n) = 0$  si  $n$  est impair. En effet:

$$\text{Tr}(\hat{v}_1 \cdots \hat{v}_n) = (v_1)_{\mu_1} \cdots (v_n)_{\mu_n} \text{Tr}(\gamma^{\mu_1} \cdots \gamma^{\mu_n});$$

et, vue (10.1.2), un produit d'un nombre impair de matrices  $\gamma$  ne peut pas donner  $\mathbb{1}$ .

Donc en vertu point (ii), la trace est nulle.

(b)  $\text{Tr}(\hat{v}_1 \hat{v}_2) = 4 v_1 \cdot v_2$ , avec  $v_1 \cdot v_2 = g^{\mu\nu} (v_1)_\mu (v_2)_\nu$ . En effet,

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\hat{v}_1 \hat{v}_2) &= \frac{1}{2} \text{Tr}(\hat{v}_1 \hat{v}_2 + \hat{v}_2 \hat{v}_1) = \\ &= \frac{1}{2} (v_1)_\mu (v_2)_\nu \text{Tr}(\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}) = (v_1)_\mu (v_2)_\nu g^{\mu\nu} \text{Tr} \mathbb{1}. \end{aligned}$$

(c)  $\text{Tr}(\hat{v}_1 \hat{v}_2 \hat{v}_3 \hat{v}_4) = 4 \{(v_1 \cdot v_2)(v_3 \cdot v_4) + (v_1 \cdot v_4)(v_2 \cdot v_3) - (v_1 \cdot v_3)(v_2 \cdot v_4)\}$ .

Montrons tout d'abord que:

$$\text{Tr}(\hat{v}_1 \hat{v}_2 \hat{v}_3 \hat{v}_4) = 4 [v_1^\mu v_2^\nu + v_1^\nu v_2^\mu - (v_1 \cdot v_3) g^{\mu\nu}] \quad (10.1.5)$$

En effet  $\text{Tr}(\hat{v}_1 \gamma^\mu \hat{v}_3 \gamma^\nu) = (v_1)_\alpha (v_3)_\beta \text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu)$  et

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu) &= -\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\nu) + 2 \underbrace{g^{\alpha\mu} \text{Tr}(\gamma^\beta \gamma^\nu)}_{=4g^{\beta\nu}} = \\ &= \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\alpha \gamma^\nu) + 8g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} - 8g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} = \\ &= -\underbrace{\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu \gamma^\alpha)}_{=\text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu)} + 8g^{\alpha\nu} g^{\mu\beta} + 8g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} - 8g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \end{aligned}$$

d'où:

$$\text{Tr}(\hat{v}_1 \gamma^\mu \hat{v}_3 \gamma^\nu) = -\text{Tr}(\hat{v}_1 \gamma^\mu \hat{v}_3 \gamma^\nu) + 8v_1^\nu v_3^\mu + 8v_1^\mu v_3^\nu - 8(v_1 \cdot v_3) g^{\mu\nu}$$

Ayant démontré la relation (10.1.5), le résultat suit car

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\hat{v}_1 \hat{v}_2 \hat{v}_3 \hat{v}_4) &= (v_2)_\mu (v_4)_\nu \text{Tr}(\hat{v}_1 \gamma^\mu \hat{v}_3 \gamma^\nu) = \\ &= 4 \left\{ \underbrace{(v_1)^\mu (v_2)_\mu (v_4)_\nu (v_3)^\nu}_{(v_1 \cdot v_2)(v_4 \cdot v_3)} + \underbrace{(v_1)^\nu (v_4)_\nu (v_2)_\mu (v_3)^\mu}_{(v_1 \cdot v_4)(v_2 \cdot v_3)} - v_1 \cdot v_3 (v_2)_\mu (v_4)_\nu g^{\mu\nu} \right\}. \end{aligned}$$

## Exercice 10.2

En partant de la notation (2.43) et de la loi de transformation (2.45), on a:

$$\bar{\psi}(x) = \psi(x)^\dagger S(\Lambda)^\dagger \beta S(\Lambda) = \underbrace{(S(\Lambda) \psi(x))^\dagger}_{\psi'(x')} \beta S(\Lambda) = \bar{\psi}'(x') S(\Lambda). \quad (10.2.1)$$

Soit  $\gamma^5 = c\gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4$ . En utilisant  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \mathbb{1}$ , et le fait que  $\gamma^{i\dagger} = \gamma^i$  pour  $i = 1, 2, 3$  et  $\gamma^{4\dagger} = -\gamma^4$ :

$$\begin{aligned} \{\gamma^5, \gamma^\mu\} &= c[\gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4 \gamma^\mu (1 + (-1)^3)] = 0 \\ (\gamma^5)^2 &= c^2 (-1)^3 (\gamma^1)^2 (-1)^2 (\gamma^2)^2 (-1) (\gamma^3)^2 (\gamma^4)^2 = -\mathbb{1} \\ \gamma^{5\dagger} &= -c\gamma^4 \gamma^3 \gamma^2 \gamma^1 = -c\gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4 = -\gamma^5. \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant calculer:

(i):  $(\bar{\psi}\psi)' \stackrel{(10.2.1)}{=} (\bar{\psi}S^{-1})(S\psi) = \bar{\psi}\psi.$

(ii):  $(i\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)' = i\bar{\psi} \underbrace{S^{-1}\gamma^\mu S}_{\Lambda_\nu^\mu} \psi = \Lambda_\nu^\mu (i\bar{\psi}\gamma^\nu\psi).$

(iii):  $(\frac{i}{2}\bar{\psi}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\psi)' = \frac{i}{2}\bar{\psi}S^{-1}(\gamma^\mu SS^{-1}\gamma^\nu - \gamma^\nu SS^{-1}\gamma^\mu)S\psi = \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu (\frac{i}{2}\bar{\psi}[\gamma^\alpha, \gamma^\beta]\psi).$

(v): Pour aborder ce calcul de manière élégante, on remarque d'abord que

$$\gamma^5 = c\gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4 = c(-1)^{\sigma(ijkl)} \gamma^i \gamma^j \gamma^k \gamma^l = \frac{c}{4!} \sum_s (-1)^{\sigma(ijkl)} \gamma^i \gamma^j \gamma^k \gamma^l \quad (10.2.2)$$

avec  $\sigma(ijkl)$  la signature de la permutation  $s : (i, j, k, l) \rightarrow (1, 2, 3, 4)$ . Alors

$$\begin{aligned} (S^{-1}\gamma^5 S) &\stackrel{(10.2.2)}{=} \frac{c}{4!} \sum_s (-1)^{\sigma(ijkl)} (S^{-1}\gamma^i S)(S^{-1}\gamma^j S)(S^{-1}\gamma^k S)(S^{-1}\gamma^l S) = \\ &= \frac{c}{4!} \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\eta \gamma^\epsilon \left[ \sum_s (-1)^{\sigma(ijkl)} \Lambda_\alpha^i \Lambda_\beta^j \Lambda_\eta^k \Lambda_\epsilon^l \right]. \end{aligned}$$

Le terme entre crochets est nul dès que deux des indices  $\alpha, \beta, \eta, \epsilon$  sont égaux. Soit alors la permutation  $t : (\alpha, \beta, \eta, \epsilon) \rightarrow (1, 2, 3, 4)$ , de signature  $\tau(\alpha, \beta, \eta, \epsilon)$ :

$$(S^{-1}\gamma^5 S) = \frac{c}{4!} \sum_s (-1)^{\sigma(ijkl)} \underbrace{\left[ \sum_t (-1)^{\tau(\alpha,\beta,\eta,\epsilon)} \Lambda_\alpha^i \Lambda_\beta^j \Lambda_\eta^k \Lambda_\epsilon^l \right]}_{=(-1)^{\sigma(ijkl)} \det \Lambda} \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4 = \det \Lambda \gamma^5.$$

(iv):  $(\bar{\psi}\gamma^5\psi)' = \bar{\psi}(S^{-1}\gamma^5 S)(S^{-1}\psi) = (\det \Lambda) \Lambda_\nu^\mu (\bar{\psi}\gamma^\nu\psi).$

### Exercice 10.3

Cet exercice concerne la transformation des fonctions d'onde dans la théorie de Dirac sous l'effet du renversement de l'espace  $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$ . On cherche un opérateur  $P$  agissant dans l'espace de Hilbert tel que  $\psi'(x') = P\psi(x)$ , avec  $x' = (-\vec{x}, t)$ .

#### Point i: transformation des observables

Pour caractériser  $P$ , on demande que les valeurs moyennes des opérateurs impulsion, hamiltonien libre et hélicité se transforment comme les grandeurs classiques correspondantes. Par exemple, on sait que par renversement de l'espace on a  $\vec{p}' = -\vec{p}$ , donc on exige

$$\langle \psi | \vec{p}' | \psi \rangle \equiv \langle \psi | P^{-1} \vec{p} P | \psi \rangle = -\langle \psi | \vec{p} | \psi \rangle$$

pour tout  $\psi$ . L'identité de polarisation entraine l'identité opératorielle  $P^{-1} \vec{p} P = -\vec{p}$ . De même:  $P^{-1} H P = H$ , car l'énergie est invariante par inversion d'espace;  $P^{-1} W P = -W$ , car le spin  $\vec{\sigma}$  est un vecteur axial et reste donc invariant sous la symétrie  $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$ .

#### Point ii: action de $P$ sur les états propres de $H$

Partons avec  $\psi_{\vec{p},\sigma}^\epsilon(x)$ , un état propre de  $H$ ,  $\vec{p}_{op}$  et  $W$ ; l'ensemble de ce états est une base orthonormée<sup>2</sup>. En vertu du point précédent:

$$H P = P H \Rightarrow H(P\psi_{\vec{p},\sigma}^\epsilon) = \epsilon E(\vec{p})(P\psi_{\vec{p},\sigma}^\epsilon) \quad (10.3.1)$$

$$\vec{p}_{op} P = -P \vec{p}_{op} \Rightarrow \vec{p}_{op}(P\psi_{\vec{p},\sigma}^\epsilon) = -\vec{p}(P\psi_{\vec{p},\sigma}^\epsilon) \quad (10.3.2)$$

$$W P = -P W \Rightarrow W(P\psi_{\vec{p},\sigma}^\epsilon) = -\sigma |\vec{p}| (P\psi_{\vec{p},\sigma}^\epsilon) \quad (10.3.3)$$

Par conséquent  $P\psi_{\vec{p},\sigma}^\epsilon(x)$  est un état propre de  $H$  pour la valeur propre  $\epsilon E(\vec{p})$ , de  $\vec{p}_{op}$  pour la valeur propre  $-\vec{p}$ , de  $W$  pour la valeur propre  $-\sigma |\vec{p}|$ ; c'est-à-dire:

$$P\psi_{\vec{p},\sigma}^\epsilon(x) = e^{i\theta} \psi_{-\vec{p},-\sigma}^\epsilon(x) \quad (10.3.4)$$

avec  $\theta \in \mathbb{R}$  arbitraire. Il est par ailleurs facile de vérifier, en prenant (2.80), que

$$\psi_{-\vec{p},-\sigma}^\epsilon(\vec{x}, t) = \beta \psi_{\vec{p},\sigma}^\epsilon(-\vec{x}, t) \quad (10.3.5)$$

<sup>2</sup>Nous notons  $\psi_{\vec{p},\sigma}^\epsilon(x) = \Psi_{\vec{p},\sigma}^\epsilon e^{i\vec{x}\cdot\vec{p}}$ , avec  $\Psi_{\vec{p},\sigma}^\epsilon$  le spineur à quatre composantes défini en (2.80) du cours; nous omettons parfois d'écrire la variable  $x$  pour alléger l'écriture.

car  $u_{-\sigma}(-\vec{p}) = u_\sigma(\vec{p})$ ,  $(-\vec{p}) \cdot (-\vec{x}) = \vec{p} \cdot \vec{x}$ , et la matrice  $\beta$  change le signe des petites composantes, qui sont multipliées par  $\sigma$ . Ceci étant établi sur tous les vecteurs de base on aboutit à

$$(P\psi)(\vec{x}, t) = e^{i\theta} \beta \psi(-\vec{x}, t) \quad \forall \psi. \quad (10.3.6)$$

Choisissons à présent  $e^{i\theta} = 1$  (tout ce qui suit est valable également pour le choix  $e^{i\theta} = -1$ ). Il est immédiat de voir que  $P^2 = \mathbb{1}$  car

$$P(P\psi(x)) = \beta^2 \psi(x) = \psi(x) \quad \forall \psi.$$

Le fait que  $P^2 = \mathbb{1}$  traduit le fait que l'opération de symétrie "double renversement spatial" est naturellement l'identité. Vérifions finalement que  $P$  est autoadjoint, ce qui assure que la parité est une observable. Soient  $\psi = \psi_{\vec{p},\sigma}^\epsilon$ ,  $\phi = \psi_{\vec{p}',\sigma'}^\epsilon$ ; alors

$$\psi^\dagger(P\phi) = e^{i\vec{x}\cdot(\vec{p}'-\vec{p})} \Psi_{\vec{p},\sigma}^{\epsilon\dagger} \beta \Phi_{\vec{p}',\sigma'}^\epsilon = e^{i(\dots)} (\beta \Psi_{\vec{p},\sigma}^{\epsilon\dagger}) \Phi_{\vec{p}',\sigma'}^\epsilon = \dots = (P\psi)^\dagger \phi;$$

d'autre part par définition de l'adjoint  $\psi^\dagger(P\phi) = (P^\dagger \psi)^\dagger \phi$ , et donc  $P^\dagger = P$ . Avec  $P^2 = \mathbb{1}$ , ceci entraîne aussi l'unitarité de  $P$ , comme prévu par le théorème de Wigner.

#### Point iii: encore sur les états

En fait, nous avons déjà obtenu ce résultat, c'est (10.3.4), que l'on réécrit ici:

$$P\psi_{\vec{p},\sigma}^\epsilon(x) = \psi_{-\vec{p},-\sigma}^\epsilon(x). \quad (10.3.7)$$

L'action de  $P$  est donc de faire passer du sous-espace  $\mathcal{H}_{\epsilon,\vec{p},\sigma}$  au sous-espace  $\mathcal{H}_{\epsilon,-\vec{p},-\sigma}$ . Introduisons en vue de la suite l'application  $\pi$  sur l'espace des paramètres définie par

$$\pi(\epsilon, \vec{p}, \sigma) = (\epsilon, -\vec{p}, -\sigma). \quad (10.3.8)$$

Notons que clairement  $\pi = \pi^{-1}$ , qui traduit le fait que  $P^{-1} = P$ .

#### Point iv: transformation du quadrivecteur $j^\mu$ sous l'action de $P$

Nous allons établir la loi de transformation de l'opérateur  $j^\mu$  en calculant les éléments de matrice pris entre deux états quelconque de la base  $\{\psi_{\vec{p},\sigma}^\epsilon\}$ . Notons  $\lambda \equiv (\epsilon, \vec{p}, \sigma)$  pour abréger l'écriture. On note

$$\langle \psi_\lambda | j^\mu(x) | \psi_\lambda \rangle \equiv ic \bar{\psi}_\lambda(x) \gamma^\mu \psi_\lambda(x). \quad (10.3.9)$$

Dans le calcul qui suit on utilise (10.3.7) et le fait que  $P^{-1} = P$ :

$$\begin{aligned}\langle \psi_\lambda | P^{-1} j^\mu P | \psi_{\bar{\lambda}} \rangle &= \sum_{\lambda', \lambda''} \langle \psi_\lambda | P^{-1} | \psi_{\lambda'} \rangle \langle \psi_{\lambda'} | j^\mu | \psi_{\lambda''} \rangle \langle \psi_{\lambda''} | P | \psi_{\bar{\lambda}} \rangle = \\ &= \sum_{\lambda', \lambda''} \delta_{\lambda, \pi(\lambda')} \langle \psi_{\lambda'} | j^\mu | \psi_{\lambda''} \rangle \delta_{\lambda'', \pi(\bar{\lambda})} = \langle \psi_{\pi(\lambda)} | j^\mu | \psi_{\pi(\bar{\lambda})} \rangle.\end{aligned}$$

On réécrit ceci explicitement à l'aide de (10.3.9) et on utilise  $\psi_{\pi(\lambda)}(\vec{x}, t) = \beta \psi_\lambda(-\vec{x}, t)$ :

$$\langle \psi_\lambda | P^{-1} j^\mu P | \psi_{\bar{\lambda}} \rangle = ic \langle \psi_\lambda(-\vec{x}, t) | \underbrace{\beta^\dagger \beta}_{=\mathbb{1}} \gamma^\mu \beta | \psi_{\bar{\lambda}}(-\vec{x}, t) \rangle$$

Or puisque  $\gamma^i \beta = -\beta \gamma^i$  pour  $i = 1, 2, 3$ , et  $\gamma^4 \beta = \beta \gamma^4$ , on aboutit bien à

$$\langle \psi_\lambda | P^{-1} \vec{j}(\vec{x}, t) P | \psi_{\bar{\lambda}} \rangle = \langle \psi_\lambda | -\vec{j}(-\vec{x}, t) | \psi_{\bar{\lambda}} \rangle \quad (10.3.10)$$

$$\langle \psi_\lambda | P^{-1} \rho(\vec{x}, t) P | \psi_{\bar{\lambda}} \rangle = \langle \psi_\lambda | \rho(-\vec{x}, t) | \psi_{\bar{\lambda}} \rangle. \quad (10.3.11)$$

#### Point v: conservation de la parité par l'interaction électron-photon

Il s'agit maintenant de décrire l'inversion spatiale dans l'espace  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{electron} \otimes \mathcal{F}$  qui décrit le système "électron de Dirac et champ électromagnétique". L'opérateur de parité  $\Pi_{\mathcal{F}}$  agissant dans  $\mathcal{F}$  a été décrit à l'exercice 4.17, où l'on avait établi

$$\Pi_{\mathcal{F}}^{-1} \vec{A}(\vec{x}, t) \Pi_{\mathcal{F}} = -\vec{A}(-\vec{x}, t). \quad (10.3.12)$$

Par conséquent l'opérateur de parité dans  $\mathcal{H}$  est

$$\mathcal{P} = P \otimes \Pi_{\mathcal{F}}. \quad (10.3.13)$$

Il est alors totalement trivial de vérifier que  $[\mathcal{P}, H_{int}^{e-\gamma}] = 0$ , i.e. que  $\mathcal{P}^{-1} H_{int}^{e-\gamma} \mathcal{P} = H_{int}^{e-\gamma}$ , avec  $H_{int}^{e-\gamma}$  donné par (10.14).

## Exercice 10.4

Rappelons les conditions (2.41) et (2.45) assurant la covariance de l'équation de Dirac:

$$S^{-1} \gamma^\mu S = \Lambda_\nu^\mu \gamma^\nu \quad (10.4.1)$$

$$S^\dagger \beta S = \beta. \quad (10.4.2)$$

Ces relations définissent univoquement  $S$  à une phase près. Nous allons vérifier que la matrice  $S = CS^*C^{-1}$  satisfait aussi ces deux relations, et elle donc égale à  $S$  à une phase près.

Pour ce faire, il suffit de prendre le complexe conjugué de (10.4.1), en remarquant que  $\Lambda_\nu^\mu$  est réel, et d'utiliser  $C^{-1} \gamma^\mu C = \gamma^{\mu*}$ , formule (10.18); il vient

$$\underbrace{C(S^{-1})^* C^{-1}}_{S^{-1}} \gamma^\nu \underbrace{CS^* C^{-1}}_S = \Lambda_\nu^\mu \gamma^\mu$$

qui est la première équation. De même, on prend le complexe conjugué de (10.4.2) et on utilise  $C^{-1} \beta C = -\beta^*$  et  $C^\dagger = C^{-1}$ , formules (10.27i) et (10.20); cela fournit la deuxième équation. Donc  $S = S$  à une phase près i.e.

$$S^* = C^{-1} S C. \quad (10.4.3)$$

Ecrivons cela sous la forme  $CS^* = SC$ . Il vient  $(\psi')_c \equiv C(S\psi)^* = SC\psi^* = S\psi_c \equiv \psi'_c$ , ce qui montre bien que l'opération de conjugaison de charge est covariante relativiste.



## Exercice 10.5

### Point i: spineurs de Dirac (libre) pour $m = 0$

La forme des spineurs de l'équation de Dirac libre pour des particules de masse nulle s'obtient immédiatement en posant  $m = 0$  ie  $E(\vec{p}) = c|\vec{p}|$  dans (2.80); il vient:

$$\Psi_{\vec{p},\sigma}^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} u_{\sigma}(\vec{p}) \\ \pm \sigma u_{\sigma}(\vec{p}) \end{pmatrix} \quad (10.5.1)$$

avec  $u_{\sigma}(\vec{p})$  défini par (2.78).

### Point ii: projection sur les états CP-conjugués

On va s'intéresser aux sous-espaces engendrés par les états CP-conjugués. On a

$$CP\psi_{\vec{p},\sigma}^{(\pm)} \stackrel{\text{ex.10.3}}{=} C\psi_{-\vec{p},-\sigma}^{(\pm)} \stackrel{10.28}{=} \psi_{\vec{p},-\sigma}^{(\mp)}$$

donc les deux paires de vecteurs CP-conjugués sont

$$\left( \psi_{\vec{p},\sigma}^{(\pm)}, \psi_{\vec{p},-\sigma}^{(\mp)} \right), \quad \sigma = \pm 1.$$

Notons l'interprétation: le sous-espace engendré par une paire décrit des "particules" (énergie positive) avec hélicité  $\sigma$  et des "antiparticules" (énergie négative) avec hélicité  $-\sigma$ . Le projecteur sur ce sous-espace s'écrit

$$P_{\vec{p},\sigma} = \psi_{\vec{p},\sigma}^{(+)}\psi_{\vec{p},\sigma}^{(+)\dagger} + \psi_{\vec{p},-\sigma}^{(-)}\psi_{\vec{p},-\sigma}^{(-)\dagger}, \quad \sigma = \pm 1; \quad (10.5.2)$$

le calcul explicite est immédiat avec (10.5.1) et l'on trouve

$$P_{\vec{p},\sigma} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & \sigma \mathbb{1}_2 \\ \sigma \mathbb{1}_2 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\mathbb{1} - i\sigma\gamma^5) \quad (10.5.3)$$

où  $\mathbb{1}_2$  est la matrice identité  $2 \times 2$ .

### Point iii: passage à la représentation de Wigner

*Remarque:* on passe de la représentation de Dirac à celle dite de Wigner. La première a été adoptée dans le cours car elle permet de discuter facilement la limite non-relativiste de l'équation de Dirac. Nous verrons en

revanche que la représentation de Wigner est la plus naturelle pour l'étude des neutrinos. Mentionnons au passage une autre caractéristique de la représentation de Wigner: toute matrice de changement de référentiel  $S(\Lambda)$  prend dans cette représentation une forme antidiagonale par blocs  $2 \times 2$ .

Tous les calculs du type  $A(\dots)A^{-1}$  ne posent aucune difficulté si l'on remarque que  $A^{-1} = A^\dagger$ . Pour les projecteurs en représentation de Wigner on trouve

$$P'_{\vec{p},\sigma} \equiv AP_{\vec{p},\sigma}A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1+\sigma)\mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & (1-\sigma)\mathbb{1}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \sigma\beta) \quad (10.5.4)$$

c'est-à-dire

$$P'_{\vec{p},+1} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P'_{\vec{p},-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix}. \quad (10.5.5)$$

L'équation de Dirac pour  $m = 0$  est  $\gamma^\mu \partial_\mu \psi = 0$ . Pour passer en représentation de Wigner on multiplie à gauche par  $A$ , et l'on obtient

$$\gamma_s^\mu \partial_\mu \psi_s = 0 \quad (10.5.6)$$

avec les notations  $\gamma_s^\mu = A\gamma^\mu A^{-1}$  et  $\psi_s = A\psi$ . Le calcul donne bien, avec les notations de la donnée

$$\gamma_s^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -i\tilde{\sigma}^\mu \\ i\sigma^\mu & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.5.7)$$

### Point iv: équations de Weyl

Si l'on prend l'équation de Dirac (10.5.6) avec (10.5.7) et la notation

$$\psi_s(x) = \begin{pmatrix} W(x) \\ \tilde{W}(x) \end{pmatrix} \quad (10.5.8)$$

on trouve les deux équations de Weyl pour les neutrinos:

$$\sigma^\mu \partial_\mu W(x) = 0; \quad (10.5.9)$$

$$\tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \tilde{W}(x) = 0. \quad (10.5.10)$$

Par ailleurs, en utilisant les projecteurs (10.5.5) on a

$$P'_{\vec{p},+1}\psi_s(x) = \begin{pmatrix} W(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P'_{\vec{p},-1}\psi_s(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{W}(x) \end{pmatrix} \quad (10.5.11)$$

ce qui montre bien, en reprenant l'interprétation des projecteurs, que la première (resp., deuxième) équation de Weyl décrit l'évolution d'une particule de masse nulle d'hélicité  $+1$  (resp.,  $-1$ ) pour la "particule" et d'hélicité  $-1$  (resp.,  $+1$ ) pour "l'antiparticule".

**Point v: covariance relativiste des équations de Weyl**

RESTE A FAIRE

**Remarques conclusives**

Dans cet exercice, nous avons obtenu la *description* de particules de masse nulle CP-conjuguées: ce sont les neutrinos de Weyl. Théoriquement on peut aussi envisager des particules de masse nulle C-conjuguées, les neutrinos de Majorana. *Seuls des neutrinos de Weyl d'hélicité  $\sigma = -1$  ont été observés!* L'hamiltonien de l'interaction faible (l'analogue du  $H_{int}^{e-\gamma}$ , formule (10.14), de l'électrodynamique quantique) contient le terme  $(\mathbb{1} + i\gamma^5)$ , qui est le projecteur sur les états d'hélicité  $\sigma = -1$ : la violation de la parité est décrite par le fait que les autres états de neutrinos n'interagissent avec rien.

## Exercice 10.6

### Expressions pour les projecteurs

On considère des états propres de la quantité de mouvement<sup>3</sup>; donc dans tout ce qui suit  $\vec{p}$  est un vecteur de nombres, non pas un opérateur. On doit tout d'abord vérifier que

$$P_{\vec{p}}^{\epsilon} = \sum_{\sigma} \Psi_{\vec{p},\sigma}^{\epsilon} \Psi_{\vec{p},\sigma}^{\epsilon \dagger} \quad (10.6.1)$$

est le projecteur sur le sous-espace associé à la valeur propre  $\epsilon E(\vec{p})$  de  $H(\vec{p}) = c\vec{\alpha}\vec{p} + mc^2\beta$ .

Pour cela, il faut et il suffit de vérifier que

$$P_{\vec{p}}^{\epsilon} \Psi_{\vec{p},\sigma}^{\epsilon} = \Psi_{\vec{p},\sigma}^{\epsilon}, \quad P_{\vec{p}}^{\epsilon} \Psi_{\vec{p},\sigma}^{-\epsilon} = 0 \quad (10.6.2)$$

ce qui suit de l'orthonormalisation des  $\Psi_{\vec{p},\sigma}^{\epsilon}$ , c'est-à-dire de  $\Psi_{\vec{p},\sigma}^{\epsilon \dagger} \Psi_{\vec{p},\sigma'}^{\epsilon} = \delta_{\epsilon,\epsilon'} \delta_{\sigma,\sigma'}$ .

Ces projecteurs partagent l'espace de Hilbert en deux sous-espaces orthogonaux  $\mathcal{H}_{\epsilon}$ , avec  $\epsilon = \pm 1$ ; on a<sup>4</sup>

$$\sum_{\epsilon=\pm 1} P_{\vec{p}}^{\epsilon} = \mathbb{1}, \quad \sum_{\epsilon=\pm 1} \epsilon E(\vec{p}) P_{\vec{p}}^{\epsilon} = H(\vec{p});$$

en combinant ces relations on obtient

$$P_{\vec{p}}^{\epsilon} = \frac{1}{2} \left[ \mathbb{1} + \frac{H(\vec{p})}{\epsilon E(\vec{p})} \right] \quad (10.6.3)$$

### Formalisme manifestement covariant

Dans la suite de l'exercice, nous construisons, à partir des projecteurs  $P_{\vec{p}}^{\epsilon}$ , des objets qui ne sont pas des projecteurs mais qui possèdent l'avantage d'être covariants relativistes. Remarquons pour commencer que

$$H(\vec{p}) = c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + mc^2\beta = (-ic\vec{\gamma} \cdot \vec{p} + mc^2\mathbb{1})\beta.$$

<sup>3</sup>A proprement parler, on ne peut pas définir  $\mathcal{H}_{\vec{p}}$ , un sous-espace de l'espace de Hilbert décrivant ces états, car le spectre de l'opérateur  $\vec{p}$  est continu.

<sup>4</sup>La première égalité traduit le fait que  $\mathcal{H} = \bigoplus_{\epsilon} \mathcal{H}_{\epsilon}$ ; la deuxième est le théorème spectral.

Alors pour  $\epsilon, \eta = \pm 1$ :

$$\begin{aligned} E(\vec{p}) \sum_{\sigma} \Psi_{\vec{p},\sigma}^{\epsilon} \bar{\Psi}_{\vec{p},\sigma}^{\eta} &= E(\vec{p}) P_{\vec{p}}^{\epsilon} \beta \stackrel{(10.6.3)}{=} \frac{1}{2} \left[ E(\vec{p})\mathbb{1} + \epsilon(-ic\vec{\eta}\vec{\gamma} \cdot \vec{p} + mc^2\mathbb{1})\beta \right] \beta = \\ &= \frac{c}{2} \left[ iE(\vec{p})\vec{\gamma}^4 + \epsilon(-i\vec{\eta}\vec{\gamma} \cdot \vec{p} + mc\mathbb{1}) \right]. \end{aligned}$$

En remarquant que  $\hat{p}_+ = \vec{\gamma} \cdot \vec{p} - E(\vec{p})\vec{\gamma}^4$  on arrive au résultat:

$$\eta = \epsilon = +1: \quad \frac{E(\vec{p})}{mc^2} \sum_{\sigma} \Psi_{\vec{p},\sigma}^{(+)} \bar{\Psi}_{\vec{p},\sigma}^{(+)} \equiv \sum_{\sigma} u_{\sigma}(\vec{p}) \bar{u}_{\sigma}(\vec{p}) = \frac{1}{2mc} (mc\mathbb{1} - i\hat{p}_+). \quad (10.6.4)$$

$$\eta = \epsilon = -1: \quad \frac{E(\vec{p})}{mc^2} \sum_{\sigma} \Psi_{\vec{p},\sigma}^{(-)} \bar{\Psi}_{\vec{p},\sigma}^{(-)} \equiv \sum_{\sigma} v_{\sigma}(\vec{p}) \bar{v}_{\sigma}(\vec{p}) = \frac{1}{2mc} (-mc\mathbb{1} - i\hat{p}_+). \quad (10.6.5)$$

Il nous reste à établir

$$\bar{u}_{\sigma}(\vec{p}) u_{\sigma'}(\vec{p}) = -\bar{v}_{\sigma}(\vec{p}) v_{\sigma'}(\vec{p}) = \delta_{\sigma,\sigma'} \quad (10.6.6)$$

$$\bar{u}_{\sigma}(\vec{p}) v_{\sigma'}(\vec{p}) = \bar{v}_{\sigma}(\vec{p}) u_{\sigma'}(\vec{p}) = 0 \quad (10.6.7)$$

Cela peut se faire immédiatement à partir des définitions de  $u_{\sigma}(\vec{p})$  et  $v_{\sigma}(\vec{p})$ . Une autre méthode consiste à travailler à partir de l'équation de Dirac (2.34). Cette équation s'écrit dans notre cas:

$$(ip_{\mu}\gamma^{\mu} + mc\mathbb{1})\Psi_{\vec{p},\sigma}^{(+)} = 0 \quad (10.6.8)$$

$$(-ip_{\mu}\gamma^{\mu} + mc\mathbb{1})\Psi_{\vec{p},\sigma}^{(-)} = 0 \quad (10.6.9)$$

De la première équation il vient

$$\frac{1}{2mc} (-i\hat{p}_+ - mc\mathbb{1})\Psi_{\vec{p},\sigma}^{(+)} = 0 \stackrel{(10.6.5)}{\Rightarrow} \left[ \sum_{\sigma} v_{\sigma}(\vec{p}) \bar{v}_{\sigma}(\vec{p}) \right] u_{\sigma'}(\vec{p}) = 0.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (mc\mathbb{1} - i\hat{p}_+)\Psi_{\vec{p},\sigma}^{(+)} = mc\Psi_{\vec{p},\sigma}^{(+)} &\Rightarrow \frac{1}{2mc} (mc\mathbb{1} - i\hat{p}_+)u_{\sigma}(\vec{p}) = u_{\sigma}(\vec{p}) \\ &\stackrel{(10.6.4)}{\Rightarrow} \left[ \sum_{\sigma} u_{\sigma}(\vec{p}) \bar{u}_{\sigma}(\vec{p}) \right] u_{\sigma'}(\vec{p}) = u_{\sigma'}(\vec{p}). \end{aligned}$$

Pour les deux autres relations, on travaille de manière analogue à partir de la seconde équation.

## Exercice 10.7

### Points 1 et 2: section efficace différentielle

L'expression de la section efficace différentielle a déjà été obtenue dans l'exercice 2.13, formule (2.13.7). Nous prenons ce résultat comme point de départ, en remplaçant les spineurs  $\Psi$  par les spineurs  $u$  définis en (10.67):

$$\frac{d\sigma(in \rightarrow fin)}{d\Omega(\vec{p}')} = 4Z^2 r_0^2 m^4 c^6 \left[ \frac{|\bar{u}_{\sigma'}(\vec{p}') \gamma^4 u_{\sigma}(\vec{p})|^2}{(\vec{p}' - \vec{p})^4} \right]_{\vec{p}'=\vec{p}} \quad (10.7.1)$$

Le but de l'exercice consiste à retrouver la section efficace sans polarisation de spin en utilisant les outils mathématiques introduits au chapitre 10, afin de se familiariser avec ceux-ci en traitant un cas simple.

### Point 3: calcul intermédiaire

Par un calcul explicite, dans lequel on utilise  $\beta^\dagger = \beta$ ,  $(\gamma^4)^\dagger = -\gamma^4$ ,  $[\gamma^4, \beta] = 0$  et les égalités établies dans l'exercice 10.6, on trouve (on omet les arguments  $\vec{p}$  et  $\vec{p}'$ ):

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma, \sigma'} |\bar{u}_{\sigma'} \gamma^4 u_{\sigma}|^2 &= \sum_{\sigma} u_{\sigma}^\dagger (\gamma^4)^\dagger \beta^\dagger \left( \sum_{\sigma'} u_{\sigma'} \bar{u}_{\sigma'} \right) \gamma^4 u_{\sigma} = \\ &= \sum_{\sigma} \bar{u}_{\sigma} \left\{ -\gamma^4 \frac{1}{2mc} (i\hat{p}' - mc\mathbb{1}) \gamma^4 \right\} u_{\sigma} \stackrel{*}{=} \text{Tr} \left[ \sum_{\sigma} u_{\sigma} \bar{u}_{\sigma} \{ \dots \} \right] = \\ &= -\frac{1}{4m^2 c^2} \text{Tr} \left[ (i\hat{p}' - mc\mathbb{1}) \gamma^4 (i\hat{p} - mc\mathbb{1}) \gamma^4 \right]. \end{aligned} \quad (10.7.2)$$

Pour la dernière égalité on a utilisé la cyclicité de la trace. L'égalité indiquée par \* est l'application à chaque terme de la somme de l'identité algébrique  $v^i M_{ij} w^j = \text{Tr}(w^j v^i M_{ik})$ .

En reprenant l'exercice 10.1, on voit que seuls deux termes ne sont pas à trace nulle:

$$\begin{aligned} \text{Tr} [m^2 c^2 (\gamma^4)^2] &= -4m^2 \\ \text{Tr} [\hat{p}' \gamma^4 \hat{p} \gamma^4] &= 4 \left\{ 2 \frac{E(\vec{p}) E(\vec{p}')}{c^4} + p \cdot p' \frac{1}{c^2} \right\} = \frac{4}{c^2} \left[ \frac{2E(\vec{p})^2}{c^2} - (|\vec{p}|^2 - \vec{p} \cdot \vec{p}') \right] - 4m^2 \end{aligned}$$

où on a utilisé l'égalité (cf. exercice 10.1)  $\text{Tr}(\hat{v}_1 \gamma^\mu \hat{v}_3 \gamma^\nu) = 4 \{v_1^\nu v_3^\mu + v_1^\mu v_3^\nu - (v_1 \cdot v_3) g^{\mu\nu}\}$ ; on rappelle que  $p^4 = -\frac{1}{2c^2} p_4 = \frac{E}{c^2}$  et que  $p \cdot p' = g^{\mu\nu} p_\mu p'_\nu$ . En insérant  $\text{Tr}[\dots] = \text{Tr}[m^2 c^2 (\gamma^4)^2] - \text{Tr}[\hat{p}' \gamma^4 \hat{p} \gamma^4]$  dans (10.7.2) on obtient

$$\sum_{\sigma, \sigma'} |\bar{u}_{\sigma'}(\vec{p}') \gamma^4 u_{\sigma}(\vec{p})|^2 = \frac{1}{m^2 c^6} [2E(\vec{p})^2 - c^2(\vec{p}^2 - \vec{p}' \cdot \vec{p})]. \quad (10.7.3)$$

### Point 4: expres finale

La section efficace différentielle sans polarisation étant obtenue de l'expression (10.7.1) en sommant sur les états de spin finaux et en moyennant sur les états de spin initiaux avec une probabilité d'occurrence 1/2, on obtient, en utilisant (10.7.3):

$$\frac{d\sigma(\vec{p} \rightarrow \vec{p}')}{d\Omega(\vec{p}')} = 2Z^2 r_0^2 m^2 \frac{2E(\vec{p})^2 - c^2(\vec{p}^2 - \vec{p}' \cdot \vec{p})}{|\vec{p}' - \vec{p}|^4}$$

et, comme

$$\begin{aligned} |\vec{p}' - \vec{p}|^2 &= 2(1 - \cos(\theta)) |\vec{p}|^2 = 4 \sin^2(\theta/2) |\vec{p}|^2, \\ \vec{p}^2 - \vec{p}' \cdot \vec{p} &= 2|\vec{p}|^2 \sin^2(\theta/2), \end{aligned}$$

où  $\theta$  est l'angle de diffusion, on retrouve

$$\boxed{\frac{d\sigma(in \rightarrow fin)}{d\Omega(\vec{p}')} = \frac{Z^2 r_0^2}{4} (1 - \beta^2) \frac{1 - \beta^2 \sin^2(\theta/2)}{\beta^4 \sin^4(\theta/2)}} \quad (10.7.4)$$

qui est le résultat obtenu dans l'exercice 2.13.

Remarquons que la section efficace différentielle (10.7.4) sans polarisation despin diverge pour  $\theta \rightarrow 0$  pour toute valeur de  $\beta$  ( $0 < \beta < 1$ ). Cette divergence est due au fait que le potentiel coulombien  $\Phi(x)$  est un potentiel à longue portée puisque  $\tilde{\Phi}(q) \rightarrow \infty$  si  $q \rightarrow 0$ .

## Exercice 10.8

On rappelle que  $(p_\mu) = (\vec{p}, -E)$ , et que la métrique de Minkowsky est donnée par  $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, 1, 1, -1/c^2)$ . On note  $v \circ w = g^{\mu\nu} v_\mu w_\nu$ , alors que  $\vec{v} \cdot \vec{w}$  représente le produit scalaire dans  $\mathbb{R}^3$ .

On considère une collision élastique:  $p'_1 + p'_2 = p_1 + p_2$ ; la condition de masse est

$$p_i^2 = \vec{p}_i^2 - \frac{E_i^2}{c^2} = -m_i^2 c^2, \quad i = 1, 2.$$

**Point (i): invariant “énergie dans le centre de masse”**

Par définition du centre de masse, on a:

$$\vec{p}_{cm,1} + \vec{p}_{cm,2} = \vec{p}'_{cm,1} + \vec{p}'_{cm,2} = 0. \quad (10.8.1)$$

$W$  étant la norme d'un quadrivecteur, donc un invariant, on a:

$$W \stackrel{\text{def}}{=} c \left( -(p_1 + p_2)^2 \right)^{1/2} \stackrel{\text{inv.}}{=} c \left( -(p_{cm,1} + p_{cm,2})^2 \right)^{1/2} \stackrel{(10.8.1)}{=} E_{cm,1} + E_{cm,2}. \quad (10.8.2)$$

**Point (ii): énergies et impulsions dans le centre de masse**

En vertu de (10.8.1) on a  $|\vec{p}_{cm,1}| = |\vec{p}_{cm,2}| \equiv P$  et  $|\vec{p}'_{cm,1}| = |\vec{p}'_{cm,2}| \equiv P'$ . Alors

$$\begin{aligned} W &\stackrel{(10.8.2)}{=} E_{cm,1} + E_{cm,2} = c\sqrt{P^2 + m_1^2 c^2} + c\sqrt{P^2 + m_2^2 c^2} \\ \stackrel{\text{diff. elast.}}{=} E'_{cm,1} + E'_{cm,2} &= c\sqrt{P'^2 + m_1^2 c^2} + c\sqrt{P'^2 + m_2^2 c^2}. \end{aligned}$$

L'extraction de  $P$  et  $P'$  de ces équations relève de manipulations habituelles, et l'on obtient

$$P = P' = \frac{1}{2Wc} \sqrt{(W^2 - m_1^2 c^4 - m_2^2 c^4)^2 - 4m_1^2 m_2^2 c^8}. \quad (10.8.3)$$

En utilisant  $W^2 - m_1^2 c^4 - m_2^2 c^4 = -2c^2 p_1 \circ p_2$ , on obtient l'expression équivalente:

$$P = P' = \sqrt{\frac{(p_1 \circ p_2)^2 - m_1^2 m_2^2 c^4}{m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 - 2p_1 \circ p_2}}. \quad (10.8.4)$$

Finalement, pour calculer les énergies on insère (10.8.3) dans la condition de masse; pour la particule 1:

$$E_{cm,1}^2 = c^2 P^2 + m_1^2 c^4 \stackrel{P=P'}{=} E'^2_{cm,1}$$

c'est-à-dire explic

$$E_{cm,1} = E'_{cm,1} = \frac{W^2 + m_1^2 c^4 - m_2^2 c^4}{2W}. \quad (10.8.5)$$

L'expression pour la particule 2 s'obtient en échangeant les indices 1 et 2.

**Point (iii): invariant “transfert d'impulsion dans le centre de masse”**

Notons qu'il n'est pas immédiat que  $\Delta^2 = (\vec{p}'_{cm,1} - \vec{p}_{cm,1})^2$  soit un invariant, car il s'agit de la norme d'un vecteur de  $\mathbb{R}^3$ . Cependant, ayant montré au point (ii) que, dans le centre de masse, les énergies de la particule 1 avant et après diffusion élastique sont identiques, on obtient le résultat:

$$(\vec{p}'_{cm,1} - \vec{p}_{cm,1})^2 \stackrel{(ii)}{=} (p'_{cm,1} - p_{cm,1})^2 = (p'_1 - p_1)^2. \quad (10.8.6)$$

**Point (iv): invariant “angle de diffusion dans le centre de masse”**

Par définition l'angle de diffusion  $\theta_{cm}$  est donné par

$$\cos(\theta_{cm}) = \frac{\vec{p}'_{cm,1} \cdot \vec{p}_{cm,1}}{|\vec{p}'_{cm,1}| |\vec{p}_{cm,1}|}. \quad (10.8.7)$$

Calculons alors

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= (p'_{cm,1} - p_{cm,1})^2 = (p'_{cm,1})^2 + (p_{cm,1})^2 - 2p'_{cm,1} \circ p_{cm,1} = \\ &= -2m_1^2 c^2 - 2|\vec{p}_{cm,1}|^2 (1 - 2\sin^2(\theta_{cm}/2)) + 2/c^2 E_{cm,1}^2 = \\ &= 4|\vec{p}_{cm,1}|^2 \sin^2(\theta_{cm}/2) \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\sin(\theta_{cm}/2) = \frac{\Delta}{2|\vec{p}_{cm,1}|} \stackrel{(10.8.3)}{=} \frac{\Delta W c}{[(W^2 - m_1^2 c^4 - m_2^2 c^4)^2 - 4m_1^2 m_2^2 c^8]^{1/2}} \quad (10.8.8)$$

et  $\theta_{cm}$  est un invariant relativiste puisque  $\Delta$  et  $W$  le sont.

## Exercice 10.9

Les affirmations suivantes, discutées en détail dans le cours, sont le point de départ :

1. Dans le calcul de l'effet Compton, seuls jouent un rôle les termes  $A_{+-}$  et  $A_{-+}$  de l'amplitude de diffusion<sup>5</sup>. Plus précisément, l'effet Compton est décrit par les situations (10.53) et (10.58), aboutissant respectivement à (10.56) et (10.61).
2. La discussion qui suit (10.56) explique comment il faut interpréter (10.56) et (10.61) dans le cas de positrons.

L'écriture de  $A = A_{+-} + A_{-+}$  pour le positron avec les notations proposées dans l'énoncé revient alors à prendre (10.65) et remplacer (+) par (-),  $\vec{p}$  par  $-\vec{p}'$ ,  $\vec{p}'$  par  $-\vec{p}$ , et finalement intervertir  $\sigma$  et  $\sigma'$ . Il vient, en négligeant les facteurs constants ou dépendant exclusivement des états photoniques :

$$A(\text{Compton } e_+) = \delta_{\substack{-\vec{p}+\hbar\vec{k}' \\ -\vec{p}+\hbar\vec{k}}} \psi_{-\vec{p},\sigma}^{(-)\dagger} \beta \left[ \hat{e}_{\mathcal{N}}(\vec{k}')^\dagger S(0, -p' + \hbar k) \hat{e}_\lambda(\vec{k}) + \hat{e}_\lambda(\vec{k}) S(0, -p' - \hbar k') \hat{e}_{\mathcal{N}}(\vec{k}')^\dagger \right] \psi_{-\vec{p},\sigma'}^{(-)}. \quad (10.9.1)$$

Notons tout d'abord que le symbole de Kronecker est le même que celui qui apparaît en (10.65), ou, en d'autres termes, que les conditions suivantes sont identiques :

$$\vec{p} - \hbar\vec{k}' = \vec{p}' - \hbar\vec{k} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{p} + \hbar\vec{k} = \vec{p}' + \hbar\vec{k}'. \quad (10.9.2)$$

Les relations

$$C^{-1} \hat{e}_\lambda(\vec{k})^* C = \hat{e}_\lambda(\vec{k})^\dagger \quad (10.9.3)$$

$$C^{-1} S(0, p)^* C = S(0, -p) \quad (10.9.4)$$

s'établissent en utilisant les formules (10.18), (10.33), (10.34) et (10.43) du cours. Le reste du calcul se fait en utilisant (10.28) et en insérant des produits  $CC^{-1}$  entre chaque terme de (10.9.1) :

$$\psi_{-\vec{p},\sigma}^{(-)\dagger} \beta \left( \hat{e}_{\mathcal{N}}(\vec{k}')^\dagger S(0, -p' + \hbar k) \hat{e}_\lambda(\vec{k}) + \dots \right) \psi_{-\vec{p},\sigma'}^{(-)} \stackrel{(10.20), (10.28)}{=} \dots$$

$$\begin{aligned} &= (\psi_{\vec{p},\sigma}^{(+)\dagger})^* \underbrace{C^{-1} \beta C}_{-\beta^*} \left( \underbrace{C^{-1} \hat{e}_{\mathcal{N}}(\vec{k}')^\dagger C}_{\hat{e}_{\mathcal{N}}(\vec{k}')^*} \underbrace{C^{-1} S(0, -p' + \hbar k) C}_{S(0, p' - \hbar k)^*} \underbrace{C^{-1} \hat{e}_\lambda(\vec{k}) C}_{(\hat{e}_\lambda(\vec{k}))^\dagger} + \dots \right) C^{-1} C \psi_{\vec{p},\sigma'}^{(+)*} = \\ &= - \left[ \psi_{\vec{p},\sigma}^{(+)\dagger} \left( \hat{e}_{\mathcal{N}}(\vec{k}') S(0, p' - \hbar k) \hat{e}_\lambda(\vec{k})^\dagger + \dots \right) \psi_{\vec{p},\sigma'}^{(+)} \right]^* . \end{aligned}$$

On vérifie aisément, en utilisant les conditions (10.9.2) imposées par le symbole de Kronecker, que le terme entre crochets est le conjugué hermitien de (10.65), l'amplitude de diffusion Compton pour l'électron. Or puisque les amplitudes de diffusion sont des nombres,  $(A^\dagger)^* = A$ . Cela donne bien le résultat annoncé :

$$A(e_+ + \gamma \longrightarrow e_+ + \gamma) = -A(e_- + \gamma \longrightarrow e_- + \gamma). \quad (10.9.5)$$

## Exercice 10.10

Comme dans l'exercice 10.9, pour obtenir l'expression pour le processus avec un positron on prend (10.116) et on effectue (+)  $\rightarrow$  (-),  $\vec{p} \leftrightarrow -\vec{p}'$  et  $\sigma \leftrightarrow \sigma'$ . On trouve

$$A(e_+) = \tilde{\Phi} \left( \frac{-\vec{p}+\hbar\vec{k}'\vec{p}'}{\hbar} \right) \psi_{-\vec{p},\sigma}^{(-)\dagger} \beta \left[ \hat{e}_{\mathcal{N}}(\vec{k}')^\dagger S(0, -p' + \hbar k') \gamma^4 + \gamma^4 S(0, -p' - \hbar k') \hat{e}_{\mathcal{N}}(\vec{k}')^\dagger \right] \psi_{-\vec{p},\sigma'}^{(-)}. \quad (10.10.1)$$

La structure du calcul est absolument identique à celle de l'exercice 10.9; seulement, à la place de  $\hat{e}_\lambda(\vec{k})$  on a  $\gamma^4$  qui se transforme selon

$$C^{-1} \gamma^4 C = (\gamma^4)^* = (\gamma^4)^\dagger = -\gamma^4. \quad (10.10.2)$$

On utilisera donc  $C^{-1} \gamma^4 C = -(\gamma^4)^\dagger$  pour obtenir  $A(e_+) = A(e_-)$ .

Pour ce processus, l'égalité est fortuite, liée au deuxième ordre de perturbation. En effet, l'interaction  $\Phi$  avec le champ du noyau est extérieure et n'est pas influencée par la conjugaison de charge, donc les deux situations ne sont pas identiques.

<sup>5</sup>Dans tout l'exercice nous posons  $\eta = 0$ : ce paramètre n'intervient que lorsque l'on fait une sommation sur des états intermédiaires, dans quel cas il sert à définir correctement le chemin d'intégration autour des poles; or ici on n'a pas de sommation.