



ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE  
INSTITUT DE PHYSIQUE THÉORIQUE

**CORRÉLATIONS DANS LES  
PLASMAS INHOMOGÈNES  
ET  
FORCES ENTRE  
CORPS MACROSCOPIQUES**

Travail de Diplôme

François Coppex

Sous la supervision du Professeur  
Philippe A. Martin

CH-1015 Lausanne EPFL, Suisse  
Octobre 2000 - Février 2001



INSTITUT DE PHYSIQUE THÉORIQUE  
PROFESSEUR PH.-A. MARTIN

DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE THÉORIQUE - 1015 LAUSANNE  
TÉLÉPHONE: 021 - 693 34 15 TELEFAX: 021 - 693 54 19

## TRAVAIL DE DIPLÔME

**Candidat: COPPEX François**

*Titre : Corrélations dans les plasmas inhomogènes et forces entre corps macroscopiques*

On sait d'une part que les corrélations coulombiennes de charges classiques présentent une décroissance lente au voisinage d'une paroi, et d'autre part, que leurs corrélations quantiques ont également des décroissances lentes dans la partie volumique du système. Ces corrélations à longue portée sont sources des forces qui s'exercent entre deux corps macroscopiques rapprochés.

Dans ce travail, on désire étudier ces forces sur la base microscopique fournie par la mécanique statistique de l'équilibre. Pour ceci, on considère deux plasmas semi-infinis limités par des parois planes à distance  $d$ . La force moyenne par unité de surface s'exprime en termes de la fonction de corrélation de charge entre les deux plasmas. On considère d'abord l'effet des fluctuations dipolaires de surface par un système de charges classiques, puis les modifications apportées par la nature quantique des charges.

D'une manière plus générale, on pourra étudier les propriétés des corrélations quantiques dans divers autres types de plasmas inhomogènes.

Prof. P.-A. Martin

# Résumé

Ce travail consiste en une étude purement microscopique de la force par unité de surface entre deux demi-espaces plans remplis d'un conducteur idéal, et séparés par du vide grâce à des parois isolantes. Nous étendons au niveau microscopique pour des parois isolantes, et sans radiation, un résultat de E.M. Lifshitz publié en 1956.

Le système  $\Sigma$  étudié consiste en deux demi-espaces plans  $\Lambda_a = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | x_1 \leq 0\}$  et  $\Lambda_b = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | x_1 \geq d\}$ , séparés par une distance  $d > 0$ . Chaque système est modélisé par un plasma (conducteur parfait), macroscopiquement électriquement neutre, à plusieurs composantes interagissant par le potentiel de Coulomb. On s'intéresse à décrire la décroissance de la force résultante entre les deux volumes dans le régime asymptotique  $d \rightarrow \infty$  (équivalent à un régime à haute température).

Les systèmes sont décrits par la mécanique statistique de l'équilibre. L'observable force étant une observable à deux corps, on exprime la force par unité de surface  $f(d)$  en terme de la fonction de corrélation de charge à deux points, pour l'un d'eux issu du premier volume, et pour l'autre du deuxième. La fonction de corrélation est alors développée en perturbations du potentiel d'interaction  $U$  entre les deux volumes. Ceci permet d'exprimer la fonction de corrélation du système total  $\Sigma$  en termes de fonctions de corrélation tronquées du système de référence  $\Lambda_a$ . On obtient ainsi une expression analytique pour le terme dominant de la force par unité de surface  $f(d)$  dans le régime  $d \rightarrow \infty$ .

Dans une première partie, le système  $\Sigma$  est classique. Nous montrons que la force par unité de surface entre les deux corps décroît selon le résultat exact  $f(d) = \frac{1}{8} \frac{1}{\pi\beta} \frac{1}{d^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{d^4}\right)$ , avec  $\beta = (k_B T)^{-1}$ . L'expression est inférieure d'un facteur  $\zeta(3) = 1.202\dots$  à celle obtenue dans la littérature pour la force entre parois aux propriétés métalliques (conditions de bord de Dirichlet) ou de diélectriques idéaux.

La seconde partie étudie le système  $\Sigma$  semi-classique. Les particules sont traitées de façon quantique sans caractère fermionique ou bosonique. La force obtenue est  $f(d) = \frac{2\pi\beta}{d^3} \mathcal{P}^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{d^4}\right)$ , avec  $\mathcal{P}$  le premier moment de la fonction de corrélation tronquée de charge du système  $\Lambda_a$  sans influence, c'est-à-dire lorsque  $U = 0$ . Dans la limite classique  $\hbar \rightarrow 0$ , on retrouve l'expression classique de la force  $f(d)$ .

*Mots clefs:* force entre plasmas coulombiens, parois isolantes, mécanique statistique.

# Remerciements

Mes remerciements vont au Professeur Philippe A. Martin pour m'avoir offert un sujet aussi passionnant, et abordable par un étudiant durant le court laps de temps que constitue un travail de diplôme à l'EPFL. Sa grande disponibilité, sa patience, et la qualité pédagogique exceptionnelle de ses indications m'ont efficacement et agréablement guidé tout au long de ce travail. Cela a chaque fois été impressionnant de le voir, grâce à son sens physique aiguisé, subordonner les mathématiques, soit des pages remplies par mes longs calculs, à une prédiction finale sans qu'il lui soit nécessaire d'écrire la moindre équation, et cela simplement parce que "la physique doit être ainsi". Mes longs calculs, aussi abstraits soient-ils, ont toujours convergé plus ou moins rapidement vers ses prédictions... Je le remercie d'avoir fait de ce travail de diplôme une expérience très motivante et intéressante.

Mes remerciements vont aussi à Thierry Schuepbach pour ses coups de mains informatiques, Patrick Mayor pour ses idées et les corrections pertinentes qu'il a apportées au présent document, ainsi que Christian Ferrari et Vincent Ballenegger pour leur aide.

Finalement, je tiens à saluer l'excellente ambiance générale qui règne à l'institut de physique théorique, et à en remercier tous les membres.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
1.1	Description non technique . . . . .	5
1.2	Phénomènes physiques . . . . .	7
1.3	Publications sur le sujet . . . . .	7
1.3.1	Aspects historiques . . . . .	8
1.3.2	Travaux théoriques similaires . . . . .	8
1.4	Enjeux . . . . .	9
1.5	Choix didactique . . . . .	9
1.6	Démarche générale . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Modélisation indépendante des statistiques</b>	<b>11</b>
2.1	Hypothèses et nomenclature . . . . .	11
2.2	Description du système . . . . .	14
2.3	Observable force . . . . .	15
2.4	Valeur moyenne de l'observable force: fonctions de corrélation . . . . .	16
2.5	Passage aux corrélations tronquées . . . . .	18
2.6	Exploitation des symétries du système infini . . . . .	18
2.7	Force par unité de surface . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Traitement classique</b>	<b>22</b>
3.1	Formalisme classique . . . . .	22
3.2	Force à l'ordre linéaire dans le potentiel d'interaction . . . . .	23
3.2.1	Expression des fonctions de corrélation . . . . .	24
3.2.2	Expression de la force par unité de surface $f(d)$ . . . . .	25
3.2.3	Développement asymptotique $d \rightarrow \infty$ . . . . .	28
3.2.4	Calcul de la force par unité de surface en puissances de $d^{-1}$ . . . . .	29
3.2.5	Discussion . . . . .	30
3.3	Force à l'ordre quadratique dans le potentiel d'interaction . . . . .	36
3.3.1	Expression des fonctions de corrélation . . . . .	36
3.3.2	Expression de la force par unité de surface $f(d)$ . . . . .	37
3.3.3	Développement asymptotique $d \rightarrow \infty$ . . . . .	38
3.3.4	Calcul de la force par unité de surface en puissances de $d^{-1}$ . . . . .	39
3.3.5	Discussion . . . . .	40
3.4	Force à l'ordre $k \geq 0$ dans le potentiel d'interaction . . . . .	41
3.4.1	Expression des fonctions de corrélation . . . . .	41
3.4.2	Expression de la force par unité de surface $f(d)$ . . . . .	41
3.4.3	Développement asymptotique $d \rightarrow \infty$ . . . . .	43
3.4.4	Calcul de la force par unité de surface en puissances de $d^{-1}$ . . . . .	44
3.4.5	Discussion . . . . .	45
<b>4</b>	<b>Traitement semi-classique</b>	<b>46</b>
4.1	Formalisme des filaments . . . . .	46
4.1.1	Formalisme des filaments pour notre système . . . . .	47

4.2	Force à l'ordre linéaire dans le potentiel d'interaction . . . . .	50
4.2.1	Expression des fonctions de corrélation . . . . .	51
4.2.2	Expression de la force par unité de surface $f(d)$ . . . . .	52
4.2.3	Développement asymptotique $d \rightarrow \infty$ . . . . .	55
4.2.4	Calcul de la force par unité de surface en puissances de $d^{-1}$ . . . . .	57
4.2.5	Discussion . . . . .	60
<b>5</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>62</b>
5.1	Résultats obtenus . . . . .	62
5.2	Perspectives . . . . .	62
<b>A</b>	<b>Appendices</b> . . . . .	<b>64</b>
A.1	Aspects de l'écran dans les systèmes semi-infinis . . . . .	64
A.2	Densités de charge $C(\mathbf{q}_a)C(\mathbf{q}_b)$ à l'ordre quadratique . . . . .	65
A.3	Fonction de corrélation $C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b)$ à l'ordre quadratique . . . . .	67
A.4	Fonction de corrélation tronquée $C_T(\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b)$ à l'ordre quadratique . . . . .	68
A.5	Fonction de corrélation tronquée $C_T(\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b)$ à un ordre quelconque . . . . .	69
A.6	Fonction de corrélation $C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b)$ à un ordre quelconque . . . . .	71
A.6.1	Équivalence des notations des sections A.6 et A.3 . . . . .	73
A.7	Méthode de dérivation fonctionnelle pour le traitement asymptotique des corrélations de charge . . . . .	74
A.8	Lemme de nullité de la force $f(d)$ . . . . .	78
A.9	Développement asymptotique $d \rightarrow \infty$ à l'ordre linéaire en $U(r_a, r_b)$ . . . . .	79
A.10	Interprétation de la relation d'électroneutralité . . . . .	80
A.11	Arguments pour la nullité des seconds moments de la fonction de corrélation tronquée . . . . .	82
A.12	Preuve de la règle de somme . . . . .	83
A.13	Formalisme des filaments . . . . .	86
A.13.1	Système à une particule: la représentation de Feynman-Kac . . . . .	86
A.13.2	Système à $N$ particules: système de filaments . . . . .	89
A.14	Fonction de corrélation semi-classique $C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b)$ à un ordre quelconque . . . . .	91
A.15	Lemme d'égalité des forces classique et semi-classique dans la limite $\hbar \rightarrow 0$ . . . . .	93
A.16	Règle d'électroneutralité des filaments . . . . .	95
	<b>Bibliographie</b> . . . . .	<b>98</b>
	<b>Index</b> . . . . .	<b>100</b>
	<b>Liste des Figures</b> . . . . .	<b>102</b>

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Description non technique

Une particularité du problème faisant l'objet de ce travail, est de pouvoir être décrit très simplement. Ainsi, n'importe qui peut facilement en comprendre la problématique de base et le but visé. Quoiqu'il en soit, commençons par décrire le système. Imaginez deux corps macroscopiques neutres, des métaux de préférence, par exemple deux boules de pétanque. Puis, vous rapprochez ces deux métaux jusqu'à ce qu'ils ne soient séparés que d'une très faible distance  $d$ .

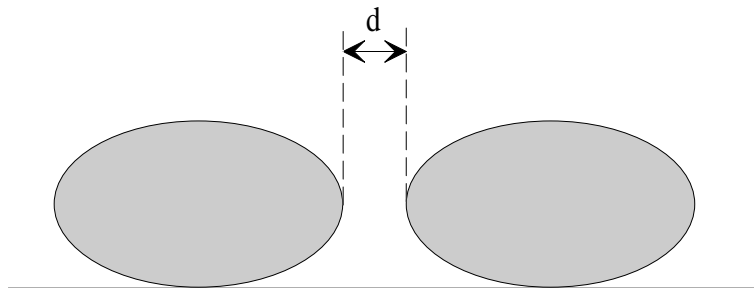


FIG. 1.1 – Description élémentaire du système

La question qui se pose est alors la suivante: quelle est la force de Coulomb résultante entre ces deux corps pour de faibles distances  $d$ ? Par exemple, des joueurs de pétanque très méticuleux pourraient se poser cette question pour améliorer la qualité de leur jeu... Non, en réalité cet effet est extrêmement faible, et totalement négligeable en ce qui concerne cet exemple humoristique. Quelqu'un pourrait alors s'exclamer:

"La force doit décroître en  $d^{-6}$ , c'est ce qu'on appelle l'attraction de Van der Waals."

C'est une bonne remarque, mais trop simplificatrice. En effet, l'utilisation des forces de Van der Waals correspond à une approche phénoménologique. C'est une sorte de forme d'essai lorsqu'on ne sait pas grand chose sur les corps en question, lorsqu'on ne peut pas, ou ne désire pas, trouver un meilleur modèle. De plus, l'attraction de Van der Waals est utilisée pour la description de la force entre molécules, et il n'est a priori pas évident qu'on ait le droit de l'utiliser pour décrire des corps macroscopiques. Dans notre cas, c'est légèrement différent car on décide de modéliser les deux corps macroscopiques par des plasmas, en appliquant la physique statistique. Plusieurs travaux ont déjà été réalisés sur ce problème, par exemple [JŠ], [JT], [JR], [FJT], [Li], [Me], [SDM] et [SS], qui utilisent tous une approche différente, mais aucun ne traite les deux corps par une méthode purement microscopique sans imposer des conditions de bords particulières. Cette modélisation du plasma est similaire à un modèle de *gaz d'électrons libres*, souvent utilisé en première approximation en phy-

sique du solide, à la différence que notre modèle est un plasma à plusieurs composantes. Les subtilités de notre modèle proviennent de l'effet des parois, car leur présence engendre des phénomènes complexes: écran partiel, formation de multipôles. De plus, on sait qu'en général l'existence de multipôles implique une décroissance plus lente des corrélations au sein du plasma, plus lente que pour le modèle de Debye (écran exponentiel). Voici donc la différence avec le modèle de Van der Waals. Il est possible de réaliser une étude plus précise que le simple modèle phénoménologique de Van der Waals, en décrivant par perturbation ces phénomènes plasmatiques complexes. Quelqu'un d'autre pourrait alors affirmer:

"La force décroît proportionnellement à  $d^{-2}$  car le potentiel de Coulomb décroît selon  $d^{-1}$ "

En fait, cette affirmation serait partiellement correcte si les deux solides macroscopiques étaient considérés comme des particules ponctuelles. Par contre, il s'agit d'une hypothèse beaucoup trop forte, menant à une réponse extrêmement simple: étant donné que nous imposons la neutralité macroscopique des corps, la force résultante est nulle. Ainsi, l'intervenant pourra corriger son tir et poser la question:

"Mais alors, qu'en est-il du *développement multipolaire*?"

C'est une bonne idée. Néanmoins, nous désirons être plus ambitieux, et utiliser nos outils mathématiques et physiques, pour être en mesure de tirer plus d'informations sur le système qu'une simple modélisation par un développement multipolaire.<sup>1</sup> Nous allons donc procéder selon une approche *microscopique*, dans le but de caractériser un objet macroscopique. Ainsi, nous nous plaçons dans le contexte de la *physique statistique*. L'hypothèse principale consiste à modéliser chaque corps par un *plasma*, ce qui signifie un gaz de particules chargées. Cette approche est bien plus complexe. L'ensemble du plasma transporte une charge totale nulle, même si chaque particule individuelle est de charge non nulle, ce qui signifie que la somme de toutes les charges est nulle, et ceci pour chacun des deux corps macroscopiques. Chaque particule du plasma interagit avec une et une seule autre particule à la fois, par le biais d'un *potentiel à deux corps*. De plus, chaque particule interagit non seulement avec chaque particule du corps macroscopique auquel elle appartient, mais aussi avec les particules localisées dans l'autre corps macroscopique. À ce stade, on peut être un peu déçu et s'exclamer:

"Ce modèle n'est absolument pas réaliste! En effet, il néglige toutes les interactions avec le réseau, ce qui est absolument central pour les solides. Ainsi, ce modèle est incapable de décrire des solides, mais uniquement des gaz."

Oui, c'est vrai, mais seulement partiellement. Avant tout, il faut être conscient que les calculs sont déjà suffisamment complexes, même avec ces fortes hypothèses. Néanmoins, l'hypothèse de base des électrons libres est couramment utilisée dans plusieurs domaines de la physique dont la physique du solide, et permet d'obtenir à titre de première approximation de relativement bons résultats. Étant donné que l'étude purement microscopique du problème n'a actuellement pas été réalisée, il est nécessaire de commencer avec le modèle le plus simple. Ainsi, si une solution correspondant à cette première modélisation est trouvée, il est possible de rendre les hypothèses de départ moins restrictives et d'essayer de résoudre ce nouveau problème. Ceci est une démarche systématique et standard. Si les particules sont considérées comme des objets classiques, c'est-à-dire dans le contexte de la mécanique statistique classique, il est vrai que notre modèle peut comporter certaines lacunes graves. Néanmoins, la bonne surprise provient de l'étape suivante: le plasma quantique. En effet, en utilisant la description quantique de l'état *grand-canonique*, il est bien connu que ce modèle est potentiellement capable de décrire la formation de matière.

"Qu'est-ce que cela signifie?"

Cela veut dire qu'en partant du plasma, un gaz de particules chargées, et en appliquant une approche de physique statistique quantique, il est possible de montrer que sous certaines conditions, notamment à basse densité, il y a formation de molécules, de matière (voir [Ma3]). Par exemple, il a été prouvé que sous certaines conditions, un tel plasma donne naissance à des atomes d'hydrogène

1. Remarquons que le développement multipolaire réalisé selon une approche macroscopique ne correspond pas au but fondamental que l'on se fixe, car il dépend de la forme des objets, et donc n'étudie pas l'essence physique du phénomène, les mécanismes microscopiques. Par contre, le développement multipolaire de la physique microscopique va permettre d'interpréter et d'expliquer le résultat principal de ce travail.



H, ainsi qu'à des molécules d'hydrogène  $H_2$ .

"Bien, et puis?"

En fait, cela montre que le modèle du plasma n'est pas irréaliste du tout s'il est traité selon une approche de mécanique statistique quantique. De plus, c'est un *très* bon modèle, qui potentiellement est capable de décrire toute matière. D'un autre point de vue, le plasma purement quantique est extrêmement difficile à manipuler, et nécessite des trésors de génie pour obtenir des résultats. Ceci permet de rappeler le dicton qui prévaut toujours: il n'est pas possible d'avoir le beurre et l'argent du beurre...

## 1.2 Phénomènes physiques

Comment peut-il exister une force entre deux corps neutres séparés par du vide? La réponse relève de l'électrodynamique quantique. Lorsque les corps macroscopiques sont très rapprochés (distances inférieures à  $100 \text{ \AA}$ , voir [ER]), un photon virtuel (c'est-à-dire qui viole la conservation de l'énergie ou de la quantité de mouvement) émis par un atome de l'un des corps peut atteindre pendant sa durée de vie un atome de l'autre corps. Les oscillations corrélées des moments dipolaires dus aux photons virtuels, instantanément induits entre ces atomes, sont à l'origine de la force dite de Van der Waals non retardée. Ceci ne constitue pas un effet Casimir au sens strict, car les fluctuations du vide n'interviennent pas dans ce processus, pour de faibles distances. Par contre, la force de Casimir apparaît lorsque la distance entre les deux corps macroscopiques est suffisamment grande (c'est-à-dire supérieure à  $100 \text{ \AA}$ , voir [ER]), de sorte que le photon virtuel émis par un atome de l'un des corps ne peut pas atteindre le second corps pendant sa durée de vie. Dans ce cas, il y a annihilation du photon et création d'une paire virtuelle électron-positron, et donc formation de moments dipolaires. Ainsi, les corrélations du champ électromagnétique dans l'état du vide sont non nulles. La conséquence est la création de moments dipolaires atomiques, qui engendrent une force, dite de Casimir, ou de Van der Waals retardée.

Notre étude de la force ne tient pas compte des effets purement dynamiques, c'est-à-dire de la radiation. Pour être capable d'interpréter correctement la littérature, remarquons que la décomposition du champ électromagnétique en une somme de modes propres relève déjà de l'étude du problème dynamique. En effet, réaliser une telle décomposition stipule l'existence de photons d'une certaine fréquence. Notre démarche élimine tout processus dynamique du modèle. Ceci revient à considérer un potentiel vecteur identiquement nul, et à affirmer que la force n'est due qu'au potentiel électrostatique.

Le résultat clairement établi dans la littérature (voir la section 1.3.1), est une décroissance de la force par unité de surface en  $d^{-3}$  (une telle décroissance en puissances de  $d^{-1}$  est dite algébrique). On peut expliquer l'origine de cette décroissance plus lente qu'exponentielle. Les parois du système impliquent un écran non sphérique de la charge des particules, ce qui mène à la formation de *multipôles*. D'autre part, il est bien connu, par l'étude du plasma quantique, que les fluctuations créent des multipôles, qui détruisent l'écran exponentiel (voir [MB]). Ainsi, l'existence des multipôles engendrés par les parois du système mène à une force qui décroît plus lentement qu'exponentiellement. Dans le cas semi-classique,<sup>2</sup> grâce aux fluctuations quantiques, il est encore plus probable que la force résultante décroisse de façon algébrique.

## 1.3 Publications sur le sujet

Cette section a pour but d'insérer notre travail de recherche dans le contexte des publications sur le sujet.

---

2. Un système classique consiste en des particules traitées classiquement (ce qui signifie sans mécanique quantique), alors que dans le système semi-classique les particules sont considérées comme particules quantiques sans statistique quantique particulière (ce qui signifie la statistique de Maxwell-Boltzmann). Finalement, le gaz quantique est constitué de particules quantiques assujetties à leurs contraintes statistiques (distributions de Bose-Einstein ou de Fermi-Dirac).

### 1.3.1 Aspects historiques

L'article qui constitue le réel point de départ de l'étude de la force  $f(d)$  entre deux corps macroscopiques séparés d'une distance  $d$  par du vide, est publié par H.B.G. Casimir en 1948 (voir [Ca]). Il y donne notamment l'expression de la force à température nulle, soit  $f(d) = \frac{\pi^2}{240} \hbar c \frac{1}{d^3}$ . Ce résultat remarquable a valu à son auteur d'associer son nom à l'effet qui engendre cette force, soit l'effet Casimir. En 1954, E.M. Lifshitz apporte une contribution majeure en généralisant l'étude à deux diélectriques quelconques, de température non nulle (voir [Li]). Sa théorie sert de référence encore actuellement (voir [DY] ou [BGKM] par exemple). Dans le régime des hautes températures, à très faible distance  $d$  plus grande que la longueur de corrélation, et dans la limite du conducteur parfait de constante diélectrique  $\varepsilon \rightarrow \infty$ , il établit

$$f(d) = \frac{\zeta(3)}{8} \frac{1}{\pi\beta} \frac{1}{d^3}, \quad (1.1)$$

avec  $\zeta(3) = 1.202\dots$  la valeur de la fonction zeta de Riemann, et  $\beta = (k_B T)^{-1}$ . Par la suite, des corrections en température à (1.1) ainsi qu'au résultat original de Casimir ont été établies (voir [Me], [SDM], [BGKM]), et l'étude réalisée pour d'autres géométries que deux plaques planes, grâce au théorème de proximité de la force (voir [BRST]). Du point de vue expérimental, la transition entre forces de Van der Waals non retardées et retardées (voir la section 1.2) a été observée en 1968 (voir [TW]). Par contre, la première vérification directe du résultat original de H.B.G. Casimir à moins de 1% d'erreur pour des solides ne date que de 1996 (voir [La]), suivie par plusieurs autres confirmations (voir [MR], [La2]). À notre connaissance, (1.1) n'a pas encore pu être vérifiée.

### 1.3.2 Travaux théoriques similaires

Formulons exactement le problème qui fait l'objet de ce travail de diplôme. Il s'agit de l'étude selon une approche microscopique de la force par unité de surface entre deux demi-espaces plans remplis d'un conducteur parfait, séparés par des parois isolantes et du vide, à très faible distance de séparation  $d$ , sans rayonnement, et à température non nulle. Ainsi, le résultat fourni par la littérature qui s'approche le plus de notre modèle est donné par (1.1). Nous survolons donc différentes publications établissant cette dernière relation. Il est intéressant de constater la multitude des approches et des systèmes étudiés, qui tous redonnent (1.1).

Commençons par décrire brièvement les articles qui utilisent la même géométrie que celle que nous étudions, c'est-à-dire deux demi-espaces plans. [Li] exploite les fluctuations du champ électromagnétique ainsi que les équations de Maxwell du champ aléatoire, en imposant la condition de bord de transversalité et de continuité des composantes tangentielles des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$ . [BH] utilise la formule de Kubo ainsi que le théorème de fluctuation-dissipation. [SDM] opte pour une théorie variationnelle de champs, ainsi que pour les équations de Maxwell.

Les articles qui utilisent une géométrie différente et établissent tout de même (1.1) sont les suivants. [SS] étudie deux parallélépipèdes  $a\hat{e}_1 + l_1\hat{e}_2 + l_2\hat{e}_3$  grâce au formalisme semi-classique de Matsubara (voir [Ka]), et obtient (1.1) pour  $a \rightarrow \infty$ . [JT] établit la relation (1.1) en dimension  $D$  entre deux parois à distance  $d$  contenant un système de Coulomb, selon deux approches. La première se base sur la théorie des champs gaussiens et de l'intégration fonctionnelle, tandis que la seconde exploite la propriété d'écran parfait des dipôles près de la paroi d'un conducteur parfait, ainsi que la théorie de la réponse linéaire. Toutes deux utilisent des conditions de bord de Dirichlet. [FJT] établit le même résultat pour le même système, mais en faisant usage du tenseur de Maxwell, tandis que [JŠ] réalise le calcul pour des parois faites d'un diélectrique idéal. [JR] étudie deux miroirs plans situés en  $\{x_1, x_2\} = \{0, d\}$ , avec un champ électromagnétique de chaque côté de ces derniers, en utilisant la matrice  $S$ . [DY] part de la théorie de E.M. Lifshitz (voir [Li]), pour l'appliquer au système formé d'une plaque plane d'épaisseur  $a$  et d'un demi-espace, à haute température. Finalement, [Me] choisit une boîte  $L^3 = \{x_i \in \{0, L\} \forall i = 1, \dots, 3\}$ , avec un plan en  $x_1 \in ]0, L[$ , dans laquelle existe une certaine quantité d'énergie sous forme d'un champ électromagnétique stationnaire à l'équilibre thermique. Ce champ est décomposé en une somme de modes propres, pour appliquer ensuite la mécanique statistique quantique.

Les articles [Me] et [JT] sont particulièrement intéressantes. Tout d'abord, l'article [Me] exploite des idées très simples pour obtenir un résultat qui contient aussi bien la relation de l'article original de H.B.G. Casimir que (1.1), ainsi que leurs corrections respectives en température. Dans le cas de la publication [JT], la dérivation faisant usage de la théorie de la réponse linéaire est très simple, et de plus fait apparaître une *dépendance explicite de la force dans le choix des conditions de bord*. La propriété d'écran parfait des dipôles utilisée est une conséquence directe de la rapide décroissance des corrélations consécutive au choix de parois parfaitement conductrices (conditions de bord de Dirichlet). Cette propriété n'est plus vraie dans le cas de parois isolantes. Aucune publication, à notre connaissance, exploite une démarche purement microscopique avec des *parois isolantes*, aussi fondamentale que celle que nous réalisons, qui ne recourt pas à des conditions de bord de Dirichlet (parois métalliques, conducteur parfait), ou qui modélise les parois par des diélectriques idéaux. Comme le mentionne [JŠ], l'égalité de la force (1.1) pour ces deux derniers systèmes est un résultat remarquable, qui est loin d'être trivial. Par conséquent, la relation (1.1) est l'expression de la force pour un *système différent* du nôtre (parois ayant la propriété d'un conducteur parfait de rapport de constantes diélectriques  $\varepsilon = \infty$ , ou d'un diélectrique idéal<sup>3</sup>  $\varepsilon = 0$ ), et *a priori il n'y a aucune raison que nous trouvions le même résultat*.

## 1.4 Enjeux

On peut se demander s'il est réellement nécessaire d'investir plusieurs mois pour essayer de répondre à des questions théoriques comme celles que l'on se pose, sans qu'il n'existe d'applications à première vue. En fait, je vais vous exposer quelques arguments, qui justifient pleinement cette étude.

Premièrement, l'être humain a toujours montré une certaine dose de curiosité. Ainsi, cela fait partie de la psychologie humaine d'identifier et de trouver des solutions à de nouvelles questions. Néanmoins, cet argument peut sembler un peu léger pour certaines personnes, et ne pas justifier le travail nécessaire.

Le second argument est que, malgré un certain regain d'intérêt ces dernières années depuis les premières vérifications expérimentales (voir [La] ou [MR]), le sujet n'est pas étudié par une excessivement vaste communauté scientifique. En effet, l'étude de la force entre plaques planes est un vieux problème (voir [Ca] ou [Li]), qui n'est plus réellement remis en cause, et qui ne bénéficie pas des mêmes aspects spectaculaires que la condensation de Bose-Einstein ou la recherche du Boson de Higgs par exemple. Ainsi, il est plus facile d'obtenir des résultats théoriques intéressants relativement rapidement sur une telle recherche si on dispose d'une nouvelle approche, ce qui est notre cas.

Finalement, la réponse à notre problème peut servir dans le domaine plus ésotérique de la théorie des supercordes. En effet, les chercheurs en théorie des supercordes ont besoin de connaître la décroissance exacte de la force due au potentiel de Coulomb, pour être capables de la soustraire de la force totale à courte distance, et ainsi d'en extraire les contributions dues à la force de gravitation uniquement. Néanmoins, cette discussion va réellement au-delà du cadre de ce rapport de diplôme...

## 1.5 Choix didactique

Il existe plusieurs manières différentes d'exposer un sujet. Bien entendu, le contexte de la publication exige souvent un choix didactique particulier. Par exemple, un article dans une revue doit être spécialement concis, formel, et avec le minimum de calculs intermédiaires non strictement nécessaires. Dans le cadre d'un travail de diplôme, il existe une certaine liberté en ce qui concerne ce

3. Soient deux systèmes séparés par une paroi plane, le système de gauche étant caractérisé par une constante diélectrique  $\varepsilon_1$ , et celui de droite contenant le plasma par  $\varepsilon_2$ . On modélise différents systèmes par le choix de  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ , ce qui nécessite de résoudre l'équation de Poisson pour le potentiel de Coulomb, avec les conditions de bord appropriées, donnant l'interaction entre les particules du volume de droite. Soit  $\varepsilon = \varepsilon_1/\varepsilon_2$ , alors le conducteur parfait est tel que  $\varepsilon_2 \gg \varepsilon_1$ , donc  $\varepsilon \sim 0$ , tandis que pour le diélectrique idéal  $\varepsilon_2 \sim \varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_1 \gg \varepsilon_2$ , donc  $\varepsilon \sim \infty$ . Dans notre cas,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_0$ , ce qui permet de s'affranchir de conditions de bord pour le potentiel de Coulomb. On utilise alors le terme "paroi isolante", pour dire que les parois n'ont pas de propriété particulière.

choix. Un exposé composé d'une suite de théorèmes et preuves, méthode souvent utilisée en physique mathématique, aura le mérite d'être clair et rigoureux. Par contre, le contenu risque d'être un peu austère et difficile à assimiler. C'est pourquoi nous choisissons une voie un peu moins formelle, qui consiste à intercaler un maximum d'interprétations physiques et d'illustrations, quitte à rendre le document plus long. De plus, nous tâchons d'offrir au lecteur les détails ainsi que les "astuces" de calcul suffisants pour lui permettre d'être en mesure de refaire les passages intermédiaires rapidement, sans acte divinatoire. Néanmoins, pour alléger la partie principale du présent document, la plupart de ces explications sont reproduites en annexe, de même que certains résultats qui ne contribuent pas directement à la réalisation des buts du travail de diplôme.

## 1.6 Démarche générale

Afin d'éviter que le lecteur ne perde de vue le contexte et les buts des calculs, on désire présenter la démarche générale suivie dans ce travail. Le but est donc de fournir au lecteur une vision globale et synthétique des calculs à effectuer.

Soient deux corps modélisés par des demi-espaces plans  $\Lambda_a \subset \mathbb{R}^3$  et  $\Lambda_b \subset \mathbb{R}^3$ , soit  $d$  la distance de séparation de ces deux corps,  $C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b)$  la fonction de corrélation de charge à deux points issus de volumes différents en interaction. Alors, étant donné que la force  $\mathbf{F}$  est une observable à deux corps, on peut se ramener à l'expression suivante de la force  $f(d)$  entre  $\Lambda_a$  et  $\Lambda_b$ , avec  $Q$  la fonction de partition.

$$f(d) = \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{q}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{q}_b C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b) \mathbf{F}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b) \quad (1.2)$$

$$C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b) = \frac{1}{Q} \int d\omega e^{-\beta(U(r_a) + U(r_b))} \hat{C}(\mathbf{q}_a) \hat{C}(\mathbf{q}_b) \underbrace{e^{-\beta U(r_a, r_b)}}_{=1 - \beta U + \frac{\beta^2}{2} U^2 + \mathcal{O}(U^3)} \quad (1.3)$$

L'expression (1.2) est fonction des deux grandeurs  $\mathbf{F}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b)$  et  $U(r_a, r_b)$  (par l'intermédiaire de (1.3)) qui dépendent de  $d$ , et qui deviennent petites lorsque  $d \rightarrow \infty$ . L'idée est alors de réaliser un développement asymptotique de  $\mathbf{F}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b)$  et  $C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b)$  pour  $d \rightarrow \infty$ . Dans le cas de la fonction de corrélation  $C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b)$ , le petit paramètre du problème est le potentiel d'interaction  $U(r_a, r_b)$  entre les deux volumes. En effet, si les systèmes sont très éloignés, alors l'interaction  $U(r_a, r_b)$  entre ces systèmes devient très faible. Ainsi, on peut développer l'expression (1.3) en puissances du potentiel d'interaction. Cette démarche permet d'exprimer la fonction de corrélation du système en interaction  $C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b)$  en termes des fonctions de corrélation des systèmes  $\Lambda_a$  et  $\Lambda_b$  sans influence mutuelle, c'est-à-dire lorsque  $U(r_a, r_b) = 0$ , sur lesquelles on connaît des résultats (électronneutralité et règle de somme, voir [Ma2]).

L'étape suivante consiste à insérer le développement (1.3) dans l'expression (1.2), pour réaliser un développement asymptotique de la force  $\mathbf{F}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b)$  à grande distance de séparation, et collecter les coefficients des puissances de  $d^{-1}$  donnant la force  $f(d)$ . On s'intéresse en particulier au premier coefficient non nul, donnant la contribution dominante.

## Chapitre 2

# Modélisation indépendante des statistiques

En plus de la présentation des hypothèses et du système, ce chapitre a pour but de démontrer la proposition suivante.

**Proposition 2.1** Soit  $\mathbf{F}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b) = \frac{q_{a1} - q_{b1}}{|\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b|^3} \hat{\mathbf{e}}_1$ ,  $\Lambda_a = \{\mathbf{q}_a \in \mathbb{R}^3 | q_{a1} \leq 0\}$ ,  $\Lambda_b = \{\mathbf{q}_b \in \mathbb{R}^3 | q_{b1} \geq d\}$ ,  $C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b)$  la fonction de corrélation de charge de deux points, alors la force par unité de surface  $f(d)$  entre  $\Lambda_a$  et  $\Lambda_b$  est donnée par l'expression suivante.

$$f(d) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{q}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{q}_b \mathbf{F}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b) C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b) \quad (2.1)$$

### 2.1 Hypothèses et nomenclature

Notons

- $\mathcal{S}$  le nombre total d'espèces de particules.
- $e_{\alpha i}$  la charge de la particule  $i$  qui est de l'espèce  $\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, \mathcal{S}$ .
- $\mathbf{q}_{ai} \in \Lambda_a \subset \mathbb{R}^3 \forall i = 1, \dots, N$  les positions des particules de  $\Lambda_a$ .
- $\mathbf{q}_{bj} \in \Lambda_b \subset \mathbb{R}^3 \forall j = 1, \dots, N$  les positions des particules de  $\Lambda_b$ .
- $\bar{\mathbf{q}}$  les variables transverses dans les directions  $\hat{\mathbf{e}}_2$  et  $\hat{\mathbf{e}}_3$ , i.e.  $\bar{\mathbf{q}} = (q_2, q_3)$ ,  $\mathbf{q}_a = (q_{a1}, \bar{\mathbf{q}}_a)$ .
- $\hat{A}$  une observable ou un opérateur sur l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ , ou de phase  $\Gamma$ .

Expliquons la notation utilisée pour décrire les arguments de la fonction de corrélation tronquée de charge. Pour mettre en évidence les variables de troncation, nous séparons le groupement de variables tronquées par ";". Par exemple  $C_T(\mathbf{q}, \mathbf{y}; \mathbf{z})$  est la fonction de corrélation tronquée du couple de variables  $\{\mathbf{q}, \mathbf{y}\}$  par rapport à la variable  $\mathbf{z}$ . Parfois, il sera nécessaire d'explicitement les symétries de la fonction de corrélation tronquée. Pour ce faire, on séparera d'abord par ";" les variables de troncation, pour ensuite indiquer par ":" le début d'un autre groupement de variables dont la fonction de corrélation dépend. Par exemple, la fonction de corrélation tronquée à deux points  $C_T(\mathbf{q}; \mathbf{y})$  dans un système invariant par translation dans les direction  $\hat{\mathbf{e}}_2$  et  $\hat{\mathbf{e}}_3$  sera notée  $C_T(q_1; y_1 : |q_2 - y_2|, |q_3 - y_3|)$ .

Le système étudié consiste en deux demi-espaces

$$\begin{aligned} \Lambda_a &= \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 \leq 0\} \\ \Lambda_b &= \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 \geq d\} \end{aligned}$$

séparés par une distance  $d > 0$ , interagissant par un potentiel de Coulomb  $V$ .  $\Lambda_a$  et  $\Lambda_b$  sont dits semi-infinis. Le bord de chaque système est constitué d'une plaque plane  $L \times L$ , avec  $L = \infty$ , comme l'illustre la figure 2.1.

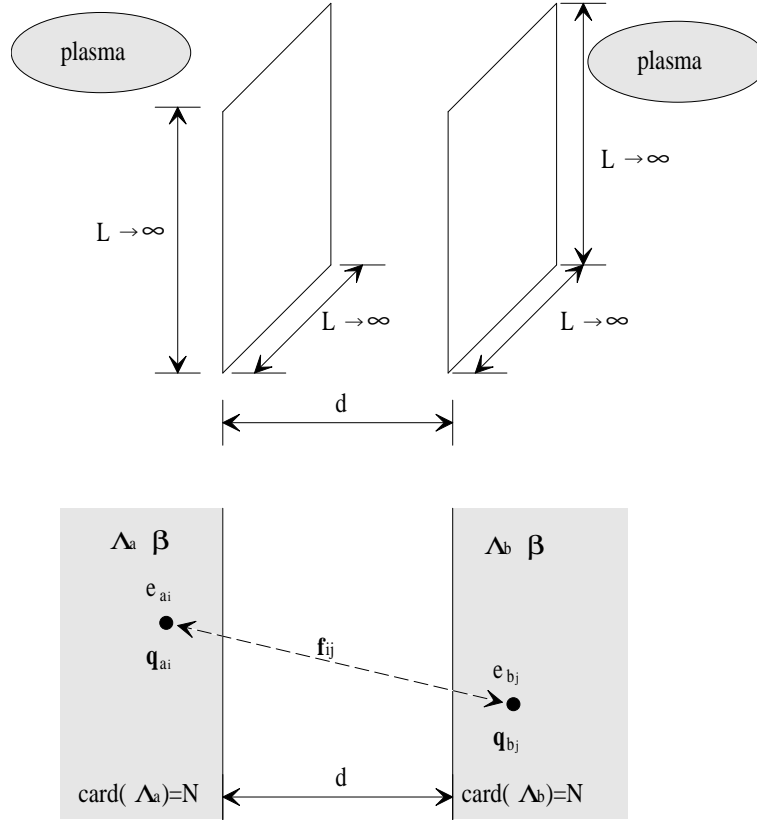


FIG. 2.1 – Description du système

Les particules sont soumises aux contraintes  $\mathbf{q}_{a_i} \in \Lambda_a \forall i = 1, \dots, N$  et  $\mathbf{q}_{b_j} \in \Lambda_b \forall j = 1, \dots, N$ .  $\mathbf{f}_{ij}$  représente la force de Coulomb s'exerçant entre les particules  $\mathbf{q}_{a_i} \in \Lambda_a$  et  $\mathbf{q}_{b_j} \in \Lambda_b$ .

**Hypothèse 1** Chaque corps délimité par les volumes  $\Lambda_a$  et  $\Lambda_b$  est un plasma formé de particules de masses  $m_{\alpha_i}$  et de charges  $e_{\alpha_i}$  quelconques, avec en général  $m_{\alpha_i} \neq m_{\alpha_j}$  et  $e_{\alpha_i} \neq e_{\alpha_j}$  pour  $i \neq j$ .

**Hypothèse 2** Les particules issues de chaque volume sont confinées dans leur volume respectif, et donc ne peuvent ni passer de  $\Lambda_a$  à  $\Lambda_b$  ou vice-versa, ni être dans la région  $\mathbb{R}^3 \setminus \{\Lambda_a \cup \Lambda_b\}$ .

On décide d'inclure cette condition de confinement dans la définition des observables, plutôt que de prendre un potentiel extérieur confinant  $V_{ext}(x)$  (voir la figure 2.2).

**Hypothèse 3** Chaque volume  $\Lambda_a$  et  $\Lambda_b$  satisfait à la condition de neutralité macroscopique.

Soient  $C(\mathbf{q}_a)$  et  $C(\mathbf{q}_b)$  les densités de charge des volumes  $\Lambda_a$  et  $\Lambda_b$  respectivement, alors l'hypothèse 3 implique que  $\int_{\Lambda_a} d^3\mathbf{q}_a C(\mathbf{q}_a) = \int_{\Lambda_b} d^3\mathbf{q}_b C(\mathbf{q}_b) = 0$ . Nous exigeons la neutralité macroscopique car l'effet physique faisant l'objet de ce travail n'est pas l'étude de la force d'interaction entre corps chargés, mais plutôt de la force résultant des fluctuations de charges conséquentes à l'interaction mutuelle des particules constituant les corps neutres. On note encore que les plasmas étudiés sont inhomogènes, ce qui constitue la difficulté du problème.<sup>1</sup>

**Hypothèse 4** Chaque système  $\Lambda_a$  et  $\Lambda_b$  est à l'équilibre thermique, caractérisé par une température unique et uniforme  $\beta = (k_B T)^{-1} < \infty$ .

1. La force entre deux corps macroscopiques modélisés par des plasmas homogènes peut être trouvée facilement par le modèle de Debye.

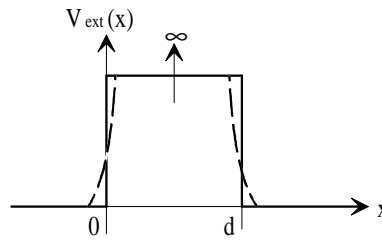


FIG. 2.2 – Confinement des particules par un potentiel doux

Il aurait été possible de confiner les particules dans  $\Lambda_a$  et  $\Lambda_b$  par un potentiel doux extérieur  $V_{ext}(x)$ , ici en traitillé.

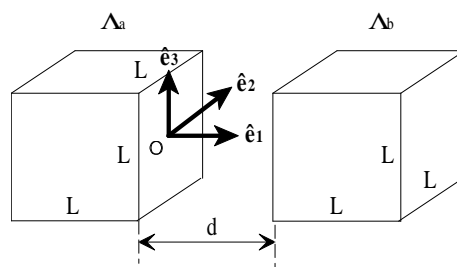
L'hypothèse 4 combinée à l'hypothèse 1 du plasma assurent la propriété d'écran parfait, c'est-à-dire que la charge totale du nuage d'écran autour d'une particule donnée est exactement opposée à la charge de cette dernière particule (voir [BM] pour la preuve). De plus, on constate que *notre modélisation ne tient pas compte des effets dus à la radiation*.

**Hypothèse 5** *La mécanique statistique de l'équilibre s'applique, l'ensemble statistique est l'ensemble canonique.*

Chaque volume  $\Lambda_a$ ,  $\Lambda_b$  contient donc exactement  $N$  particules. Cette hypothèse satisfait a priori notre intuition physique dans le sens où on modélise deux solides à très grand nombre fini de particules, et sans contact avec un réservoir de particules. De plus, l'hypothèse 6 lève l'éventuelle problématique de l'équivalence des ensembles avant de procéder à la limite thermodynamique.

**Hypothèse 6** *Les volumes  $\Lambda_a$  et  $\Lambda_b$  sont des demi-espaces délimités par une paroi plane, et donc sont de mesure infinie dans chacune des directions  $\hat{e}_i$ ,  $i = 1, \dots, 3$ .*

Cette dernière hypothèse mène à une discussion subtile qu'il est impératif de bien comprendre. En effet, faut-il procéder au développement asymptotique  $d \rightarrow \infty$  de grandeurs dans un volume infini, ou plutôt dans un volume fini, pour seulement ensuite prendre la limite thermodynamique. Supposons que les volumes  $\Lambda_a$  et  $\Lambda_b$  soient des boîtes de côté  $L$  (voir la figure 2.3), alors la discussion précédente revient à choisir de traiter les limites dans l'ordre  $\lim_{d \rightarrow \infty} \lim_{L \rightarrow \infty}$  ou bien  $\lim_{L \rightarrow \infty} \lim_{d \rightarrow \infty}$ .


 FIG. 2.3 – Système fini  $L^3$ 

Étant donné que le volume infini est une idéalisation de la réalité, il semblerait correct de travailler en volume fini et de choisir l'ordre des limites  $\lim_{L \rightarrow \infty} \lim_{d \rightarrow \infty}$ . Néanmoins, le traitement en volume fini est beaucoup plus complexe car la présence de parois brise la *symétrie de translation*. En effet, les densités de charges  $C(\mathbf{q}_a)$  et  $C(\mathbf{q}_b)$  dépendent explicitement des variables transverses décrivant le système dans les directions  $\hat{e}_2$  et  $\hat{e}_3$ , car une densité de charge s'accumule près des parois. Par contre, dans la limite  $L \rightarrow \infty$ , les parois allant à l'infini, le système devient *invariant par translation* dans le plan engendré par  $\hat{e}_2$  et  $\hat{e}_3$ , ainsi les densités de charges ne dépendent plus que de la composante dans la direction  $\hat{e}_1$ . Cette invariance par translation s'avère absolument nécessaire par la suite. De plus,

considérer le système fini implique dans les calculs ultérieurs l'existence de bornes d'intégration finies, ce qui pose des problèmes a priori insurmontables lors de certains changements de variables, car la dépendance en la distance de séparation  $d$  va rester dans ces bornes d'intégration, rendant difficile le traitement asymptotique  $d \rightarrow \infty$ . Un autre problème inhérent au choix  $\lim_{L \rightarrow \infty} \lim_{d \rightarrow \infty}$  est la non équivalence des ensembles statistiques avant de prendre la limite thermodynamique  $L \rightarrow \infty$ . Finalement, on ne connaît pas de règles de somme (voir l'annexe A.12) autres que l'électroneutralité pour les fonctions de corrélation dans un système fini, ce qui empêcherait l'obtention d'un résultat analytique, et donc la comparaison avec la littérature. Ces considérations poussent au choix du traitement asymptotique du système infini, soit  $\lim_{d \rightarrow \infty} \lim_{L \rightarrow \infty}$ . Par contre, il est possible d'étudier le développement asymptotique  $d \rightarrow \infty$  du système d'épaisseur  $a < \infty$  selon  $\hat{e}_1$ , soit un système de deux plaques. Néanmoins, nous choisissons  $a = \infty$  car le résultat final pour  $a < \infty$  se déduit plus facilement des calculs avec  $a = \infty$  que le contraire (voir la section 3.2.5).

**Hypothèse 7** La force de Coulomb résultante  $f(d)$  entre  $\Lambda_a$  et  $\Lambda_a$  admet un développement asymptotique en puissances de  $d^{-1}$  pour  $d \rightarrow \infty$ .

A priori, cette hypothèse peut très bien s'avérer erronée. Néanmoins, les calculs exhiberont un tel développement convergent, confirmant ainsi l'hypothèse 7.

**Hypothèse 8** Soit  $\hat{\mathbf{F}}$  l'observable force entre  $\Lambda_a$  et  $\Lambda_b$ , soit  $\langle \hat{\mathbf{F}} \rangle$  et  $\langle \hat{\mathbf{F}} \rangle_L$  la valeur moyenne de l'observable force dans le système infini et fini respectivement, alors

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \langle \hat{\mathbf{F}} \rangle_L = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \lim_{L \rightarrow \infty} \langle \hat{\mathbf{F}} \rangle_L = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \langle \hat{\mathbf{F}} \rangle.$$

Cette dernière hypothèse nécessite quelques précisions. D'après l'hypothèse 6, les densités de charge et fonctions de corrélation utilisées pour le calcul de  $\langle \hat{\mathbf{F}} \rangle$  sont celles du système infini. Or, le calcul rigoureux de la force par unité de surface nécessite l'expression en volume fini  $\langle \hat{\mathbf{F}} \rangle_L$ , ce qui est impossible avec notre approche. C'est pourquoi nous devons ajouter cette nouvelle hypothèse. De plus, aussitôt que la divergence d'ordre  $L^2$  de  $\langle \hat{\mathbf{F}} \rangle$  se manifeste explicitement, on se permet de l'éliminer grâce au facteur  $L^{-2}$  de la limite thermodynamique. Nous supposons néanmoins que cette hypothèse n'a pas d'incidence sur le résultat final.

## 2.2 Description du système

Soit  $\Gamma$  l'espace de phase du système,  $H$  l'hamiltonien décrivant la dynamique du système,  $\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^3 \forall i = 1, \dots, 2N$ ,  $\mathcal{X}_\Omega(\mathbf{x})$  la fonction indicatrice de  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ .

$$\Gamma = \mathbb{R}^{2 \cdot 3 \cdot 2N} \quad (2.2)$$

$$H = U(\underbrace{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N}_{\doteq r_a}) + U(\underbrace{\mathbf{q}_{N+1}, \dots, \mathbf{q}_{2N}}_{\doteq r_b}) + U(\underbrace{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N}_{\doteq r_a}, \underbrace{\mathbf{q}_{N+1}, \dots, \mathbf{q}_{2N}}_{\doteq r_b}) \quad (2.3)$$

$$q = (\underbrace{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N}_{\in \Lambda_a}, \underbrace{\mathbf{q}_{N+1}, \dots, \mathbf{q}_{2N}}_{\in \Lambda_b}) = (r_a, r_b) \quad (2.4)$$

$$U(r_a) = \sum_{1 \leq i < j \leq 2N} \frac{e_{\alpha_i} e_{\alpha_j}}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|} \mathcal{X}_{\Lambda_a}(\mathbf{q}_i) \mathcal{X}_{\Lambda_a}(\mathbf{q}_j) \quad (2.5)$$

$$U(r_b) = \sum_{1 \leq i < j \leq 2N} \frac{e_{\alpha_i} e_{\alpha_j}}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|} \mathcal{X}_{\Lambda_b}(\mathbf{q}_i) \mathcal{X}_{\Lambda_b}(\mathbf{q}_j) \quad (2.6)$$

$$U(r_a, r_b) = \sum_{1 \leq i < j \leq 2N} \frac{e_{\alpha_i} e_{\alpha_j}}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|} \mathcal{X}_{\Lambda_a}(\mathbf{q}_i) \mathcal{X}_{\Lambda_b}(\mathbf{q}_j) \quad (2.7)$$

$$\Sigma = \Lambda_a \cup \Lambda_b \quad ; \quad \Lambda_a \cap \Lambda_b = \emptyset \quad (2.8)$$

$$|\Sigma| = 2N \quad ; \quad |\Lambda_a| = N \quad ; \quad |\Lambda_b| = N \quad (2.9)$$

$$\langle \hat{A} \rangle = \int d\omega \hat{A} \quad (2.10)$$



Les grandeurs (2.5) et (2.6) ne sont pas définies en  $\mathbf{q}_i = \mathbf{q}_j$ , et il y a effondrement de la matière si on ne tient pas compte des statistiques quantiques. Une régularisation du potentiel de Coulomb à l'origine serait alors nécessaire (voir [MB]). Néanmoins, nous pourrions contourner ces divergences par la suite, par conséquent la régularisation explicite n'est pas requise. La signification de l'intégration sur l'espace de phase  $\int d\omega$  reste à préciser dans les chapitres 3 et 4, car elle dépend explicitement du choix de la théorie, classique ou quantique. Néanmoins, nous avons déjà besoin de donner une forme plus explicite de l'espace de phase. Heureusement, il est actuellement possible d'utiliser la définition de l'espace de phase classique sans restriction de généralité, car les cas semi-classique et quantique ne font qu'ajouter des degrés de liberté supplémentaires à l'espace de phase classique. Par l'hypothèse 3 de neutralité électrique, la charge totale de chaque système  $\Lambda_a$  et  $\Lambda_b$  doit être nulle, c'est-à-dire  $\sum_{i=1}^N e_{\alpha_i} = \sum_{i=1}^N e_{\alpha_{i+N}} = 0$ , contrainte à inclure dans l'intégration sur l'espace de phase.

$$\int d\omega = \delta_{\sum_{i=1}^N e_{\alpha_i}, 0} \delta_{\sum_{i=1}^N e_{\alpha_{i+N}}, 0} \sum_{\alpha_1=1}^S \cdots \sum_{\alpha_{2N}=1}^S \int_{\Sigma^{2N}} d^3\mathbf{q}_1 \cdots d^3\mathbf{q}_{2N} \quad (2.11)$$

On simplifié l'intégration sur la partie cinétique de l'espace de phase avec la fonction de partition, étant donné que l'on ne considère par la suite que des observables indépendantes des moments conjugués  $\mathbf{p}_i$  (donc de l'impulsion, car on considère des particules ponctuelles). De plus, pour alléger la notation, on omet par la suite l'écriture de la contrainte de neutralité de charge dans l'expression de  $\int d\omega$ .

### 2.3 Observable force

L'observable force  $\hat{\mathbf{F}}$  exercée par  $\Lambda_a$  sur  $\Lambda_b$  est formée de la somme sur chaque couple de particules  $\{i, j\}$  de la force de Coulomb  $\hat{\mathbf{f}}_{\alpha_i \alpha_j}$  exercée par la particule  $i$  dans  $\Lambda_a$  sur la particule  $j$  de  $\Lambda_b$ . Étant donné qu'il n'existe pas de champ extérieur inhomogène, alors  $\hat{\mathbf{f}}_{\alpha_i \alpha_j} = \hat{\mathbf{f}}_{\alpha_i \alpha_j}(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j)$ .

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{F}}(q) &= \sum_{1 \leq i < j \leq 2N} \hat{\mathbf{f}}_{\alpha_i \alpha_j}(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j) \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq 2N} \left( -\nabla_{(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j)} \frac{e_{\alpha_i} e_{\alpha_j}}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|} \right) \mathcal{X}_{\Lambda_a}(\mathbf{q}_i) \mathcal{X}_{\Lambda_b}(\mathbf{q}_j) \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq 2N} \underbrace{e_{\alpha_i} e_{\alpha_j} \frac{\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|^3}}_{\doteq \hat{\mathbf{F}}_{\alpha_i \alpha_j}(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j)} \mathcal{X}_{\Lambda_a}(\mathbf{q}_i) \mathcal{X}_{\Lambda_b}(\mathbf{q}_j) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Le but est de trouver une formulation pour que  $\hat{\mathbf{F}}$  soit une observable à deux points. Ainsi,  $\hat{\mathbf{F}}$  doit s'écrire comme une somme de fonctions symétriques sous l'échange de deux particules, ce qui n'est pas le cas pour les  $\hat{\mathbf{f}}_{\alpha_i \alpha_j}(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j)$  dans (2.12), qui sont antisymétriques à cause du principe d'action-réaction. Par contre, on vérifie que  $\hat{\mathbf{G}}_{\alpha_i \alpha_j}(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j)$  défini par (2.13) satisfait la symétrie sous l'échange de deux particules, et par conséquent nous avons construit une observable à deux corps dans un espace de phase à  $2N$  particules.<sup>2</sup>

$$\boxed{\hat{\mathbf{F}}(q) = \sum_{1 \leq i < j \leq 2N} \hat{\mathbf{F}}_{\alpha_i \alpha_j}(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j) \left( \mathcal{X}_{\Lambda_a}(\mathbf{q}_i) \mathcal{X}_{\Lambda_b}(\mathbf{q}_j) - \mathcal{X}_{\Lambda_a}(\mathbf{q}_j) \mathcal{X}_{\Lambda_b}(\mathbf{q}_i) \right) \doteq \sum_{1 \leq i < j \leq 2N} \hat{\mathbf{G}}_{\alpha_i \alpha_j}(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j)} \quad (2.13)$$

2. Le lecteur peut vérifier l'exactitude de la relation (2.13) par un cas particulier où  $N = 2$ .

## 2.4 Valeur moyenne de l'observable force: fonctions de corrélation

Commençons par un bref rappel sur les fonctions de corrélation. Soit l'état canonique<sup>3</sup> à nombre de particules  $2N$  fixe, soit  $x_i = y_i \doteq (\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i)$ ,  $Y = (y_1, \dots, y_{2N-k})$ ,  $X = (x_1, \dots, x_{2N})$ , soit  $\hat{A}(X) = \sum_{\substack{\tilde{X} \subset X \\ |\tilde{X}|=k}} \hat{A}^{(k)}(\tilde{X})$  une observable à  $k$  points indépendante des impulsions, c'est-à-dire  $\hat{A} = \hat{A}(q)$ , et telle que  $\hat{A}^{(k)}(\tilde{X})$  soit symétrique dans les  $\tilde{X}$ , soit  $Q$  la fonction de partition, soit

$$\rho = \frac{1}{Q} e^{-\beta H} \quad (2.14)$$

$$\rho^{(k)}(x_1, \dots, x_k) = \int d^{2N-k} \omega(Y) \rho(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_{2N-k}), \quad (2.15)$$

avec  $\rho^{(k)}(x_1, \dots, x_k)$  la fonction de corrélation à  $k$  points dépendante des impulsions. Soit  $d^k \omega(X) = d^k \mu(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_k) \frac{d^3 \mathbf{p}_1 \dots d^3 \mathbf{p}_k}{h^{3k} k!}$ , avec  $d^k \mu(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_k)$  une mesure de Lebesgue à  $k$  points indépendante de l'impulsion. Par exemple, dans notre cas,

$$d^k \mu(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_k) = \sum_{\substack{\alpha_1=1 \\ \vdots \\ \alpha_k=1}}^S d^3 \mathbf{q}_1 \dots d^3 \mathbf{q}_k. \quad (2.16)$$

La valeur moyenne de  $\hat{A}$  est alors donnée par

$$\langle \hat{A} \rangle = \int d^k \omega(X) \rho^k(X) \hat{A}^{(k)}(X) \quad (2.17)$$

$$= \int d^k \mu(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_k) \frac{d^3 \mathbf{p}_1 \dots d^3 \mathbf{p}_k}{h^{3k} k!} \hat{A}^{(k)}(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_k) \rho^{(k)}(x_1, \dots, x_k) \quad (2.18)$$

$$= \frac{1}{k!} \int d^k \mu(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_k) \hat{A}^{(k)}(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_k) \underbrace{\frac{1}{h^{3k}} \int d^3 \mathbf{p}_1 \dots d^3 \mathbf{p}_k \rho^{(k)}(x_1, \dots, x_k)}_{\doteq \rho^{(k)}(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_k)} \quad (2.19)$$

$$\boxed{\langle \hat{A} \rangle = \frac{1}{k!} \int d^k \mu(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_k) \hat{A}^{(k)}(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_k) \rho^{(k)}(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_k)} \quad (2.20)$$

Le cas (2.13) qui nous intéresse est celui d'une observable à deux points  $k = 2$ . Pour  $k = 2$ , la fonction de corrélation à deux points est donnée par la valeur moyenne du produit des densités de particules de l'espèce  $\alpha_i$  et  $\alpha_j$  modulo une distribution de Dirac (voir [Gr]), dont la contribution va par la suite s'avérer nulle dans notre cas.

$$\rho_{\alpha_1 \alpha_2}^{(2)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \langle \hat{\rho}_{\alpha_1}(\mathbf{q}_1) \hat{\rho}_{\alpha_2}(\mathbf{q}_2) \rangle - \delta(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \delta_{\alpha_1, \alpha_2} \rho_{\alpha_1}^{(1)}(\mathbf{q}_1) \quad (2.21)$$

La fonction de corrélation à un point  $\rho_{\alpha_a}^{(1)}(\mathbf{q}_1)$  est égale à la densité de particules  $\rho_{\alpha_1}(\mathbf{q}_1)$  de l'espèce  $\alpha_a$ , et

$$\langle \hat{\rho}_{\alpha_1}(\mathbf{q}_1) \hat{\rho}_{\alpha_2}(\mathbf{q}_2) \rangle = \frac{1}{Q} \int d\omega e^{-\beta H(r_1, r_2)} \hat{\rho}_{\alpha_1}(\mathbf{q}_1) \hat{\rho}_{\alpha_2}(\mathbf{q}_2) \quad (2.22)$$

$$\rho_{\alpha_1}(\mathbf{q}_1) = \langle \hat{\rho}_{\alpha_1}(\mathbf{q}_1) \rangle = \frac{1}{Q} \int d\omega e^{-\beta H(r_1, r_2)} \hat{\rho}_{\alpha_1}(\mathbf{q}_1), \quad (2.23)$$

3. Nous faisons ici effectivement une restriction de généralité en choisissant l'ensemble statistique, avec une moyenne statistique s'exprimant sous la forme d'une intégrale, malgré le fait que ce chapitre est sensé contenir des résultats indépendants de la statistique. Néanmoins, cette restriction de généralité ne porte pas à conséquence, car dans la suite nous considérons toujours l'ensemble canonique. Pour ce qui est de la forme intégrale de la moyenne sur l'espace de phase, il ne s'agit pas d'une restriction de généralité, car il est possible dans les cas semi-classique et quantique (grâce à la relation dite "formule magique", voir [MB] ou [Me2]) de ramener l'opérateur de trace sur l'espace de Hilbert à une intégrale sur un espace de phase étendu.

avec  $r_1 = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ ,  $r_2 = (\mathbf{r}_{N+1}, \dots, \mathbf{r}_{2N})$ .  $\hat{\rho}_{\alpha_1}(\mathbf{q}_1)$  est l'observable densité de particules de l'espèce  $\alpha$  au point  $\mathbf{q}_1$ , définie par

$$\hat{\rho}_{\alpha_1}(\mathbf{q}_1) = \sum_{i=1}^{2N} \delta_{\alpha_1, \alpha_i} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{q}_1). \quad (2.24)$$

L'observable de densité totale de particules se définit naturellement comme la somme sur les espèces des opérateurs de densité d'une espèce donnée

$$\hat{\rho}(\mathbf{q}_1) = \sum_{\alpha_1=1}^S \hat{\rho}_{\alpha_1}(\mathbf{q}_1) = \sum_{i=1}^{2N} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{q}_1). \quad (2.25)$$

Ainsi, (2.13), (2.20) et (2.21) permettent d'établir une nouvelle expression pour la moyenne de l'observable force. Ceci va entre autre permettre de relaxer la contrainte  $\Lambda_a \cap \Lambda_b = \emptyset$  des observables, pour l'inclure dans l'intégration sur l'espace de phase.

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{F}} \rangle &\stackrel{(2.20)}{=} \frac{1}{2!} \sum_{\alpha_1=1}^S \sum_{\alpha_2=1}^S \int_{\Sigma} d^3 \mathbf{q}_1 \int_{\Sigma} d^3 \mathbf{q}_2 \hat{\mathbf{G}}_{\alpha_1 \alpha_2}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \rho_{\alpha_1 \alpha_2}^{(2)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \\ &\stackrel{(2.13)}{=} \frac{1}{2} \sum_{\alpha_1=1}^S \sum_{\alpha_2=1}^S \left( \underbrace{\int_{\Lambda_a \cup \Lambda_b} d^3 \mathbf{q}_1}_{=\Lambda_a} \underbrace{\int_{\Lambda_a \cup \Lambda_b} d^3 \mathbf{q}_2}_{=\Lambda_b} \rho_{\alpha_1 \alpha_2}^{(2)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \hat{\mathbf{F}}_{\alpha_1 \alpha_2}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \mathcal{X}_{\Lambda_a}(\mathbf{q}_1) \mathcal{X}_{\Lambda_b}(\mathbf{q}_2) \right. \\ &\quad \left. - \underbrace{\int_{\Lambda_a \cup \Lambda_b} d^3 \mathbf{q}_1}_{=\Lambda_b} \underbrace{\int_{\Lambda_a \cup \Lambda_b} d^3 \mathbf{q}_2}_{=\Lambda_a} \rho_{\alpha_1 \alpha_2}^{(2)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \hat{\mathbf{F}}_{\alpha_1 \alpha_2}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \mathcal{X}_{\Lambda_a}(\mathbf{q}_2) \mathcal{X}_{\Lambda_b}(\mathbf{q}_1) \right) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Les changements de bornes d'intégration proviennent simplement du fait que lors de l'intégration sur  $\Sigma = \Lambda_a \cup \Lambda_b$ , uniquement  $\Lambda_a$  ou  $\Lambda_b$  donne une contribution non nulle à cause des fonctions caractéristiques. En échangeant le rôle des variables  $\mathbf{q}_1$  et  $\mathbf{q}_2$  dans le deuxième terme de (2.26), puis en utilisant l'antisymétrie de  $\hat{\mathbf{F}}_{\alpha_1 \alpha_2}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)$ , c'est-à-dire  $\hat{\mathbf{F}}_{\alpha_1 \alpha_2}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) = -\hat{\mathbf{F}}_{\alpha_2 \alpha_1}(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1) = -\hat{\mathbf{F}}_{\alpha_1 \alpha_2}(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1)$ , on obtient

$$\langle \hat{\mathbf{F}} \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\alpha_1=1}^S \sum_{\alpha_2=1}^S \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{q}_1 \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{q}_2 \hat{\mathbf{F}}_{\alpha_1 \alpha_2}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \left( \rho_{\alpha_1 \alpha_2}^{(2)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) + \underbrace{\hat{\rho}_{\alpha_2 \alpha_1}^{(2)}(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1)}_{=\hat{\rho}_{\alpha_1 \alpha_2}^{(2)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)} \right). \quad (2.27)$$

L'expression (2.27) montre explicitement que  $\mathbf{q}_1 \in \Lambda_a$  et  $\mathbf{q}_2 \in \Lambda_b$ , ce qui amène au changement de notation  $\mathbf{q}_1 \doteq \mathbf{q}_a$  et  $\mathbf{q}_2 \doteq \mathbf{q}_b$ , notation plus explicite car elle indique clairement à quelles contraintes spatiales sont soumises les particules. Ainsi, étant donné que  $\mathbf{q}_a \in \Lambda_a$  et  $\mathbf{q}_b \in \Lambda_b$ , on aura toujours  $\delta(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b) = 0$ , et donc la fonction de corrélation à deux points (2.21) prend la forme

$$\rho_{\alpha_1 \alpha_2}^{(2)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \langle \hat{\rho}_{\alpha_1}(\mathbf{q}_1) \hat{\rho}_{\alpha_2}(\mathbf{q}_2) \rangle. \quad (2.28)$$

De même, les expressions (2.24) et (2.25) se simplifient dans le sens où les seules distributions de Dirac non nulles seront celles pour lesquelles deux particules appartiennent au même volume  $\Lambda_a$  ou  $\Lambda_b$ . Soient les fonctions de densité de charge et de corrélation de charge définies par

$$C(\mathbf{q}_a) = \sum_{\alpha_a=1}^S e_{\alpha_a} \underbrace{\rho_{\alpha_a}(\mathbf{q}_a)}_{=\rho_{\alpha_a}^{(1)}(\mathbf{q}_a)} \quad (2.29)$$

$$C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b) = \sum_{\alpha_a=1}^S \sum_{\alpha_b=1}^S e_{\alpha_a} e_{\alpha_b} \underbrace{\rho_{\alpha_a \alpha_b}(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b)}_{\stackrel{(2.28)}{=} \rho_{\alpha_a \alpha_b}^{(2)}(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b)}. \quad (2.30)$$

Grâce à (2.28) et (2.12), la relation (2.27) prend finalement la forme

$$\boxed{\langle \hat{\mathbf{F}} \rangle = \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{q}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{q}_b C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b) \frac{\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b}{|\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b|^3}} \quad (2.31)$$

À la lumière des changements de variables effectués, nous noterons par la suite  $(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N) \doteq (\mathbf{q}_{a1}, \dots, \mathbf{q}_{aN}) \doteq r_a$  et  $(\mathbf{q}_{N+1}, \dots, \mathbf{q}_{2N}) \doteq (\mathbf{q}_{b1}, \dots, \mathbf{q}_{bN}) \doteq r_b$  pour signifier plus clairement quelle est la localisation spatiale des variables.

## 2.5 Passage aux corrélations tronquées

Nous reformulons ici le problème d'une manière légèrement différente, qui aura l'avantage par la suite d'être plus pédagogique lors du traitement linéaire dans le potentiel d'interaction  $U(r_a, r_b)$ . Néanmoins, cette reformulation n'est pas nécessaire, et doit être abandonnée dès que l'on désire étudier des ordres quadratiques ou supérieurs en  $U(r_a, r_b)$ .

Soit la fonction de corrélation tronquée de charge  $C_T(\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b)$  définie par

$$C_T(\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b) = C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b) - C(\mathbf{q}_a)C(\mathbf{q}_b), \quad (2.32)$$

alors l'expression (2.31) devient

$$\langle \hat{\mathbf{F}} \rangle = \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{q}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{q}_b \left( C_T(\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b) + C(\mathbf{q}_a)C(\mathbf{q}_b) \right) \frac{\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b}{|\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b|^3}. \quad (2.33)$$

Contrairement à (2.31), cette nouvelle écriture met clairement en évidence le caractère intégrable de l'intégrand. En effet, le terme de force  $\frac{\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b}{|\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b|^3}$  pris tout seul n'est pas intégrable. Par contre, l'intégrabilité est assurée par la décroissance rapide, dans la partie volumique du système, des corrélations tronquées, ainsi que des densités de charge, car les corrélations ont une décroissance exponentielle dans la partie volumique (système de Debye). Notons tout de même que dans (2.31), les corrélations  $C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b)$  assurent aussi l'intégrabilité dans le sens où la limite

$$\lim_{q_{a1} \rightarrow -\infty} C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b) = C(\mathbf{q}_b) \underbrace{\lim_{q_{a1} \rightarrow -\infty} C(\mathbf{q}_a)}_{=0} = 0 \quad (2.34)$$

est nulle et décroît rapidement, avec  $\mathbf{q}_a = (q_{a1}, \bar{\mathbf{q}}_a)$  (voir le lemme A.1 en annexe A.4 pour la preuve de (2.34)).

## 2.6 Exploitation des symétries du système infini

Comme discuté dans le commentaire de l'hypothèse 6, un des avantages d'étudier le système infini selon  $\hat{\mathbf{e}}_2$  et  $\hat{\mathbf{e}}_3$ , pour seulement ensuite mettre en évidence le comportement asymptotique  $d \rightarrow \infty$ , est de bénéficier de la symétrie de translation dans le plan engendré par  $\hat{\mathbf{e}}_2$  et  $\hat{\mathbf{e}}_3$ .

Notons  $\mathbf{q}_a = (q_{a1}, \bar{\mathbf{q}}_a)$ ,  $\bar{\mathbf{q}}_a = (q_{a2}, q_{a3})$ , de même pour  $\mathbf{q}_b$ . Ainsi,  $\bar{\mathbf{q}}_a$  sont les composantes perpendiculaires à  $\hat{\mathbf{e}}_1$ , dites variables transverses (voir la figure 2.4). Nous nous intéressons à la force s'exerçant par unité de surface, c'est-à-dire, grâce à l'hypothèse 8, à

$$f(d) \doteq \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \langle \hat{\mathbf{F}} \rangle. \quad (2.35)$$

**Lemme 2.1** *Sous les hypothèses du chapitre 2.1, la force résultante par unité de surface  $f(d)$  est orientée dans la direction  $\hat{\mathbf{e}}_1$ , les autres composantes de la force étant nulles.*

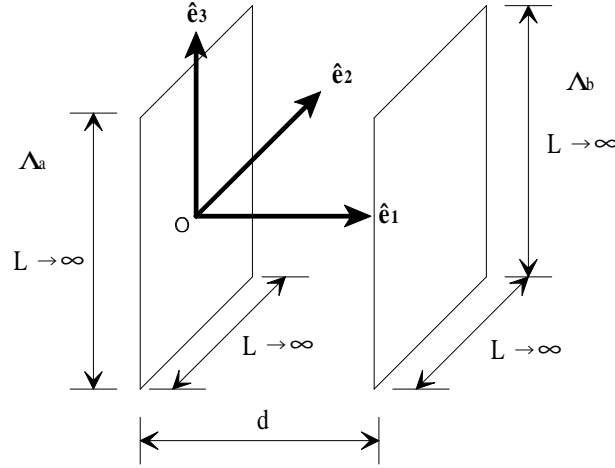


FIG. 2.4 – Choix du repère

**Preuve.** Les équations (2.33) et (2.35) donnent

$$\begin{aligned}
 f(d) = & \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{-\infty}^0 dq_{a_1} \int_d^\infty dq_{b_1} \int_{\mathbb{R}^2} d\bar{\mathbf{q}}_a \int_{\mathbb{R}^2} d\bar{\mathbf{q}}_b \frac{C_T(\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b)}{|\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b|^3} \begin{pmatrix} q_{a_1} - q_{b_1} \\ q_{a_2} - q_{b_2} \\ q_{a_3} - q_{b_3} \end{pmatrix} \\
 & + \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{-\infty}^0 dq_{a_1} \int_d^\infty dq_{b_1} \int_{\mathbb{R}^2} d\bar{\mathbf{q}}_a \int_{\mathbb{R}^2} d\bar{\mathbf{q}}_b \frac{C(\mathbf{q}_a)C(\mathbf{q}_b)}{|\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b|^3} \begin{pmatrix} q_{a_1} - q_{b_1} \\ q_{a_2} - q_{b_2} \\ q_{a_3} - q_{b_3} \end{pmatrix}. \quad (2.36)
 \end{aligned}$$

Grâce aux symétries de translation, nous avons  $C(\mathbf{q}_a)C(\mathbf{q}_b) = C(q_{a_1})C(q_{b_1})$  et  $C_T(\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b) = C_T(q_{a_1}; q_{b_1} : |\bar{\mathbf{q}}_a - \bar{\mathbf{q}}_b|)$ . La notation utilisée pour la fonction de corrélation tronquée est expliquée au début de la section 2.1. Soit les changements de variables  $z_2 = q_{a_2} - q_{b_2}$ ,  $z_3 = q_{a_3} - q_{b_3}$ , alors

$$\begin{aligned}
 f(d) = & \int_{-\infty}^0 dq_{a_1} \int_d^\infty dq_{b_1} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} dz_2 \int_{\mathbb{R}} dz_3}_{\text{domaine symétrique}} \underbrace{\frac{C_T(q_{a_1}; q_{b_1} : |z_2|, |z_3|)}{((q_{a_1} - q_{b_1})^2 + z_2^2 + z_3^2)^{3/2}}}_{\text{fonction paire en } z_2, z_3} \underbrace{\begin{pmatrix} q_{a_1} - q_{b_1} \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}}_{\text{impair en } z_2, z_3} \\
 & \int_{-\infty}^0 dq_{a_1} \int_d^\infty dq_{b_1} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} dz_2 \int_{\mathbb{R}} dz_3}_{\text{domaine symétrique}} \underbrace{\frac{C(q_{a_1})C(q_{b_1})}{((q_{a_1} - q_{b_1})^2 + z_2^2 + z_3^2)^{3/2}}}_{\text{fonction paire en } z_2, z_3} \underbrace{\begin{pmatrix} q_{a_1} - q_{b_1} \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}}_{\text{impair en } z_2, z_3}. \quad (2.37)
 \end{aligned}$$

Pour de simples raisons de symétrie, l'intégration du produit d'une fonction paire et d'une fonction impaire sur un domaine symétrique donne un résultat nul. Ainsi, les composantes de  $f(d)$  de (2.37) dans les directions  $\hat{e}_2$  et  $\hat{e}_3$  sont nulles. Par conséquent, l'expression de la force est

$$f(d) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{q}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{q}_b \left( C_T(\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b) + C(\mathbf{q}_a)C(\mathbf{q}_b) \right) \underbrace{\frac{q_{a_1} - q_{b_1}}{|\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b|^3}}_{\doteq \mathbf{F}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b)} \hat{e}_1. \quad (2.38)$$

■

Le lemme suivant permet, grâce à l'invariance par translation du problème dans le plan engendré par  $\hat{e}_2$  et  $\hat{e}_3$ , d'exploiter pleinement le passage aux corrélations tronquées. De plus, il sert de base à

une discussion de certains aspects subtils dans les systèmes infinis. Notons

$$f(d) = f_T(d) + f_{cc}(d) \quad (2.39)$$

$$f_T(d) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{q}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{q}_b C_T(\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b) \mathbf{F}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b) \quad (2.40)$$

$$f_{cc}(d) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{q}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{q}_b C(\mathbf{q}_a) C(\mathbf{q}_b) \mathbf{F}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b). \quad (2.41)$$

**Lemme 2.2** Soit un système invariant par translation dans le plan engendré par  $\hat{e}_2$  et  $\hat{e}_3$ , alors la force entre  $\Lambda_a$  et  $\Lambda_b$  issue du produit des densités de charge  $C(\mathbf{q}_a)C(\mathbf{q}_b)$  est donnée par

$$f_{cc}(d) = 2\pi \int_{-\infty}^0 dq_{a_1} C(q_{a_1}) \int_d^\infty dq_{b_1} C(q_{b_1}) \hat{e}_1 = 0. \quad (2.42)$$

**Preuve.** Grâce à l'invariance par translation dans les directions  $\hat{e}_2$  et  $\hat{e}_3$ , les densités de charge vérifient  $C(\mathbf{q}_a)C(\mathbf{q}_b) = C(q_{a_1})C(q_{b_1})$ . Soit le changement de variables  $z_2 = q_{a_2} - q_{b_2}$ ,  $z_3 = q_{a_3} - q_{b_3}$  appliqué sur (2.41), alors une divergence d'ordre  $L^2$  apparaît, qui peut être simplifiée avec  $\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2}$ , et on en déduit que

$$f_{cc}(d) = \int_{-\infty}^0 dq_{a_1} C(q_{a_1}) \int_d^\infty dq_{b_1} C(q_{b_1}) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} dz_2 \int_{\mathbb{R}} dz_3 \frac{q_{a_1} - q_{b_1}}{((q_{a_1} - q_{b_1})^2 + z_2^2 + z_3^2)^{3/2}}}_{\doteq I(q_{a_1} - q_{b_1})} \hat{e}_1. \quad (2.43)$$

Le calcul de  $I(q_{a_1} - q_{b_1})$  ne présente pas de difficultés, en utilisant  $\text{sign}(q_{a_1} - q_{b_1}) = -1$ .

$$\begin{aligned} I(q_{a_1} - q_{b_1}) &= (q_{a_1} - q_{b_1}) \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty dr \frac{r}{((q_{a_1} - q_{b_1})^2 + r^2)^{3/2}} \\ &= 2\pi \frac{1}{|q_{a_1} - q_{b_1}|} \underbrace{(q_{a_1} - q_{b_1}) \text{sign}(q_{a_1} - q_{b_1})}_{=|q_{a_1} - q_{b_1}|} \\ &= 2\pi \end{aligned} \quad (2.44)$$

Étant donné que l'électroneutralité  $\int_{-\infty}^0 dq_{a_1} C(q_{a_1}) = \int_d^\infty dq_{b_1} C(q_{b_1}) = 0$  reste vraie pour le système perturbé, alors l'insertion de (2.44) dans (2.43) achève la preuve. ■

Nous conseillons au lecteur de prendre connaissance de l'annexe A.1, qui expose certains aspects subtils de l'écran dans les systèmes infinis, et permet de lever des ambiguïtés potentielles.

## 2.7 Force par unité de surface

En guise de résumé de la section 2.6 particulièrement, nous avons trouvé l'expression suivante pour la force de Coulomb résultante entre les deux volumes  $\Lambda_a$  et  $\Lambda_b$ .

$$\begin{aligned} f(d) &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{q}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{q}_b \mathbf{F}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b) C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b) \\ &= \underbrace{\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{q}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{q}_b \mathbf{F}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b) C(\mathbf{q}_a) C(\mathbf{q}_b)}_{\doteq f_{cc}(d) = 2\pi \int_{-\infty}^0 dq_{a_1} C(q_{a_1}) \int_d^\infty dq_{b_1} C(q_{b_1}) \hat{e}_1 = 0} \\ &\quad + \underbrace{\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{q}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{q}_b \mathbf{F}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b) C_T(\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b)}_{\doteq f_T(d)} \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b) = \frac{q_{a_1} - q_{b_1}}{|\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b|^3} \hat{e}_1 \quad (2.46)$$

$$\Lambda_a = \{\mathbf{q}_a \in \mathbb{R}^3 | q_{a_1} \leq 0\} \quad (2.47)$$

$$\Lambda_b = \{\mathbf{q}_b \in \mathbb{R}^3 | q_{b_1} \geq d\} \quad (2.48)$$

## Chapitre 3

# Traitement classique

Le chapitre 3 consiste, en plus des interprétations physiques, à démontrer le théorème suivant.

**Théorème 3.1** *Le terme dominant du développement asymptotique  $d \rightarrow \infty$  de la force  $f(d)$  par unité de surface entre deux demi-espaces plans classiques séparés d'une distance  $d$  est*

$$f(d) = \frac{1}{8} \frac{1}{\pi\beta} \frac{1}{d^3} \hat{\mathbf{e}}_1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{d^4}\right). \quad (3.1)$$

### 3.1 Formalisme classique

Le cas classique utilise le même espace de phase que celui présenté au chapitre 2, contrairement au cas semi-classique du chapitre 4 qui utilise un degré de liberté supplémentaire. Il est utile de reformuler les densités de charge ainsi que l'intégration sur l'espace de phase en fonction des notations explicites  $\mathbf{q}_a$  et  $\mathbf{q}_b$ , qui indiquent que  $\mathbf{q}_a \in \Lambda_a$  et  $\mathbf{q}_b \in \Lambda_b$ . Soit

$$\mathbf{r}_a = (\mathbf{r}_{a1}, \dots, \mathbf{r}_{aN}) \quad \mathbf{r}_{ai} \in \Lambda_a \subset \mathbb{R}^3 \forall i \quad (3.2)$$

$$\mathbf{r}_b = (\mathbf{r}_{b1}, \dots, \mathbf{r}_{bN}) \quad \mathbf{r}_{bi} \in \Lambda_b \subset \mathbb{R}^3 \forall i \quad (3.3)$$

alors

$$\hat{\rho}_{\alpha_a}(\mathbf{q}_a) = \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{q}_a - \mathbf{r}_{ai}) \delta_{\alpha_a, \alpha_i} \quad (3.4)$$

$$\hat{\rho}_{\alpha_b}(\mathbf{q}_b) = \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{q}_b - \mathbf{r}_{b(i+N)}) \delta_{\alpha_b, \alpha_{(i+N)}} \quad (3.5)$$

$$\rho_{\alpha_a}(\mathbf{q}_a) = \langle \hat{\rho}_{\alpha_a}(\mathbf{q}_a) \rangle = \frac{1}{Q} \int d\omega e^{-\beta H(r_a, r_b)} \hat{\rho}_{\alpha_a}(\mathbf{q}_a) \quad (3.6)$$

$$C(\mathbf{q}_a) = \sum_{\alpha_a=1}^S e_{\alpha_a} \rho_{\alpha_a}(\mathbf{q}_a) = \frac{1}{Q} \int d\omega e^{-\beta H(r_a, r_b)} \underbrace{\sum_{i=1}^N e_{\alpha_i} \delta(\mathbf{q}_a - \mathbf{r}_i)}_{=\hat{C}(\mathbf{q}_a)} = \langle \hat{C}(\mathbf{q}_a) \rangle \quad (3.7)$$

$$\int d\omega = \sum_{\alpha_{a1}=1}^S \sum_{\alpha_{b1}=1}^S \int_{\Lambda_a^N} d^3 \mathbf{r}_{a1} \cdots d^3 \mathbf{r}_{aN} \int_{\Lambda_b^N} d^3 \mathbf{r}_{b1} \cdots d^3 \mathbf{r}_{bN} \quad (3.8)$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$\alpha_{aN}=1 \quad \alpha_{bN}=1$$



On a bien entendu  $H(r_a, r_b) = U(r_a) + U(r_b) + U(r_a, r_b)$ , tandis que les configurations étudiées sont celles qui assurent la neutralité de charge de chaque volume.

Le point central des développements qui vont suivre est la factorisation de  $\int d\omega e^{-\beta H(r_a, r_b)}$  de la façon suivante. Ceci permet d'exprimer les fonctions de corrélation du système  $\Sigma$  en termes des fonctions de corrélation des systèmes  $\Lambda_a$  et  $\Lambda_b$  sans influence. Soit  $\hat{A}(r_a, r_b)$  une observable telle que  $\hat{A}(r_a, r_b) = \hat{f}(r_a)\hat{g}(r_b)$ , soit  $\langle \hat{A}(r_a, r_b) \rangle_{\text{s.i.}}$  la valeur moyenne de  $\hat{A}(r_a, r_b)$  dans le système  $\Sigma$  sans interaction entre  $\Lambda_a$  et  $\Lambda_b$ , c'est-à-dire lorsque  $U(r_a, r_b) = 0$ , soit

$$\int d\omega = \int d\omega_a \int d\omega_b \quad (3.9)$$

$$\int d\omega_a = \sum_{\alpha_{a1}=1}^S \int_{\Lambda_a^N} d^3\mathbf{r}_{a1} \cdots d^3\mathbf{r}_{aN} \quad (3.10)$$

$$\vdots$$

$$\alpha_{aN}=1$$

$$\int d\omega_b = \sum_{\alpha_{b1}=1}^S \int_{\Lambda_b^N} d^3\mathbf{r}_{b1} \cdots d^3\mathbf{r}_{bN}, \quad (3.11)$$

$$\vdots$$

$$\alpha_{bN}=1$$

alors les densités de particules et de charge sont définies par

$$\begin{aligned} \langle \hat{A}(r_a, r_b) \rangle_{\text{s.i.}} &= \frac{\int d\omega e^{-\beta(U(r_a)+U(r_b))} \hat{A}(r_a, r_b)}{\int d\omega e^{-\beta(U(r_a)+U(r_b))}} \\ &= \left( \frac{\int d\omega_a \int d\omega_b e^{-\beta U(r_a)} \hat{f}(r_a)}{Q_{\Lambda_a} Q_{\Lambda_b}} \right) \left( \frac{\int d\omega_a \int d\omega_b e^{-\beta U(r_b)} \hat{g}(r_b)}{Q_{\Lambda_a} Q_{\Lambda_b}} \right) \\ &= f_{\Lambda_a} g_{\Lambda_b}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

avec  $Q_{\Lambda_a} = \int d\omega_a e^{-\beta U(r_a)}$ ,  $Q_{\Lambda_b} = \int d\omega_b e^{-\beta U(r_b)}$ , et  $f_{\Lambda_a}$ ,  $g_{\Lambda_b}$  les valeurs moyennes des observables  $\hat{f}$ ,  $\hat{g}$  dans les volumes sans interaction  $\Lambda_a$ ,  $\Lambda_b$  respectivement.

Soit  $V(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^{-1}$  le potentiel de Coulomb, alors on utilisera parfois les notations condensées

$$(\mathbf{q}_a) = C_{\Lambda_a}(\mathbf{q}_a) \quad (3.13)$$

$$(\mathbf{q}_a, \mathbf{y}_a)(\mathbf{q}_b, \mathbf{y}_b) = \int_{\Lambda_a} d^3\mathbf{y}_a \int_{\Lambda_b} d^3\mathbf{y}_b V(\mathbf{y}_a - \mathbf{y}_b) C_{\Lambda_a}(\mathbf{q}_a, \mathbf{y}_a) C_{\Lambda_b}(\mathbf{q}_b, \mathbf{y}_b). \quad (3.14)$$

Avec cette notation, chaque fois qu'apparaissent des variables différentes de  $\mathbf{q}_a$  ou  $\mathbf{q}_b$ , par exemple  $\mathbf{y}_a$ ,  $\mathbf{y}_b$ ,  $\mathbf{z}_a$ ,  $\mathbf{z}_b$ , il y a intégration sur ces mêmes variables avec poids  $V(\mathbf{y}_a - \mathbf{y}_b)V(\mathbf{z}_a - \mathbf{z}_b)$ . Rappelons que pour mettre en évidence les variables de troncation, nous séparons les groupements de variables tronquées par ";". Par exemple,  $C_T^{\Lambda_a}(\mathbf{q}_a, \mathbf{y}_a; \mathbf{z}_a)$  est la fonction de corrélation tronquée dans  $\Lambda_a$  du couple de variables  $\{\mathbf{q}_a, \mathbf{y}_a\}$  par rapport à la variable  $\mathbf{z}_a$ . Ainsi, dans la notation condensée de (3.14), nous noterons les corrélations tronquées comme dans l'exemple suivant:  $(\mathbf{q}_a, \mathbf{y}_a; \mathbf{z}_a)_T(\mathbf{q}_b; \mathbf{y}_b)_T(\mathbf{z}_b)$ .

## 3.2 Force à l'ordre linéaire dans le potentiel d'interaction

Cette section démontre la proposition suivante.

**Proposition 3.1** *Le terme dominant du développement asymptotique  $d \rightarrow \infty$  de la force classique  $f(d)$  à l'ordre linéaire dans le potentiel d'interaction  $U(r_a, r_b)$  est  $f(d)_{\mathcal{O}(\beta)} = \frac{1}{8} \frac{1}{\pi\beta} \frac{1}{d^3} \hat{\mathbf{e}}_1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{d^4}\right)$ .*

### 3.2.1 Expression des fonctions de corrélation

L'idée est d'effectuer un développement asymptotique pour  $d \rightarrow \infty$ . Le petit paramètre du problème est alors le potentiel d'interaction  $U(r_a, r_b)$ , car  $\lim_{d \rightarrow \infty} U(r_a, r_b) = 0$ . En effet, les particules décrites par  $r_a$  sont confinées dans  $\Lambda_a$  qui est indépendant de  $d$ , alors que les particules décrites par  $r_b$  sont confinées dans  $\Lambda_b$  qui dépend de  $d$ , et donc  $\lim_{d \rightarrow \infty} |\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b| = \infty$ , ce qui entraîne la nullité du potentiel d'interaction dans cette même limite. Il apparaît alors naturel de développer  $e^{-\beta U(r_a, r_b)} = 1 - \beta U(r_a, r_b) + \frac{\beta^2}{2} U(r_a, r_b)^2 + \mathcal{O}(U(r_a, r_b)^2)$ , et d'exprimer les fonctions de corrélation du système en interaction en termes des fonctions de corrélation des systèmes  $\Lambda_a$  et  $\Lambda_b$  sans interaction, sur lesquelles on connaît des règles de somme.<sup>1</sup>

Dans les annexes A.2, A.3 et A.4 nous établissons les expressions suivantes des fonctions de corrélation.  $C_{\Lambda_a}(\dots)$ ,  $C_T^{\Lambda_a}(\dots)$ , est la fonction de corrélation, tronquée, du système  $\Lambda_a$  sans influence, c'est-à-dire lorsque  $U(r_a, r_b) = 0$ , respectivement.

$$\begin{aligned}
 C(\mathbf{q}_a)C(\mathbf{q}_b) = & C_{\Lambda_a}(\mathbf{q}_a)C_{\Lambda_b}(\mathbf{q}_b) \\
 & + 2\beta C_{\Lambda_a}(\mathbf{q}_a)C_{\Lambda_b}(\mathbf{q}_b) \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{y}_a C_{\Lambda_a}(\mathbf{y}_a) \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{y}_b C_{\Lambda_b}(\mathbf{y}_b) V(\mathbf{y}_a - \mathbf{y}_b) \\
 & - \beta C_{\Lambda_a}(\mathbf{q}_a) \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{y}_a C_{\Lambda_a}(\mathbf{y}_a) \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{y}_b C_{\Lambda_b}(\mathbf{q}_b, \mathbf{y}_b) V(\mathbf{y}_a - \mathbf{y}_b) \\
 & - \beta C_{\Lambda_b}(\mathbf{q}_b) \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{y}_a C_{\Lambda_a}(\mathbf{q}_a, \mathbf{y}_a) \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{y}_b C_{\Lambda_b}(\mathbf{y}_b) V(\mathbf{y}_a - \mathbf{y}_b) \\
 & + \mathcal{O}(\beta^2)
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$C_T(\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b) = -\beta \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{y}_a C_T^{\Lambda_a}(\mathbf{q}_a; \mathbf{y}_a) \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{y}_b C_T^{\Lambda_b}(\mathbf{q}_b; \mathbf{y}_b) V(\mathbf{y}_a - \mathbf{y}_b) + \mathcal{O}(\beta^2) \tag{3.16}$$

La fonction de corrélation tronquée entre particules issues de  $\Lambda_a$  et  $\Lambda_b$  résulte, au premier ordre en  $U(r_a, r_b)$ , des nuages d'écran qui forment des dipôles interagissant par le biais du potentiel de Coulomb (voir la figure 3.1).

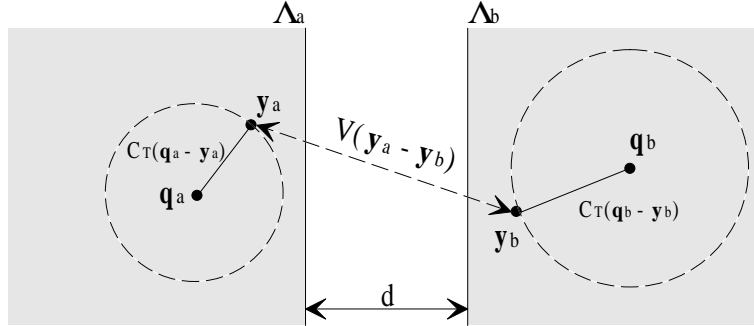


FIG. 3.1 – Corrélation tronquée au premier ordre et dipôles

Ces dipôles sont créés par la perte de symétrie sphérique des nuages d'écran près des parois du volume. En effet, si  $q_{a_1} \rightarrow -\infty$  ou  $q_{b_1} \rightarrow \infty$ , alors la densité de charge tend vers zéro et devient homogène. Par contre, près des parois, cette densité de charge n'est pas homogène dans la direction  $\hat{e}_1$ , et donc les nuages d'écran perdent leur symétrie sphérique. Il s'ensuit la formation de multipôles, et à l'ordre le plus bas, de dipôles.

1. On remarque qu'un développement en ordres de  $U(r_a, r_b)$  est équivalent à réaliser un développement en puissances de  $\beta = \frac{1}{k_B T}$  à haute température. On utilisera plutôt, par la suite, le développement en ordres de  $\beta$ .

### 3.2.2 Expression de la force par unité de surface $f(d)$

La démarche consiste à introduire (3.15) et (3.16) dans (2.45), et opérer des changements de variables judicieux.

**Lemme 3.1** À l'ordre linéaire en  $U(r_a, r_b)$ , la contribution de  $f_{cc}(d)_{\mathcal{O}(\beta^1)}$  est nulle.

**Preuve.** Ce lemme est une conséquence directe du lemme 2.2 à la page 20. Néanmoins, nous désirons le vérifier avec la forme explicite du produit des densités de charges donné par (3.15). En insérant (3.15) dans  $f_{cc}(d)$  donné par (2.45), on obtient

$$\begin{aligned}
 f_{cc}(d)_{\mathcal{O}(\beta^1)} &\stackrel{(2.45)}{=} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{q}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{q}_b \mathbf{F}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b) C(\mathbf{q}_a) C(\mathbf{q}_b) \\
 &\stackrel{(3.15)}{=} \underbrace{\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{q}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{q}_b \mathbf{F}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b) C_{\Lambda_a}(q_{a_1}) C_{\Lambda_b}(q_{b_1})}_{\doteq(1)} \\
 &\quad + 2\beta \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{q}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{q}_b \mathbf{F}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b) C_{\Lambda_a}(q_{a_1}) \underbrace{\int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{y}_a C_{\Lambda_a}(\mathbf{y}_a) \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{y}_b C_{\Lambda_b}(\mathbf{q}_b, \mathbf{y}_b) V(\mathbf{y}_a - \mathbf{y}_b)}_{\doteq(2)} \\
 &\quad - \beta \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{q}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{q}_b \mathbf{F}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b) C_{\Lambda_a}(q_{a_1}) \underbrace{\int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{y}_a C_{\Lambda_a}(\mathbf{y}_a) \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{y}_b C_{\Lambda_b}(\mathbf{q}_b, \mathbf{y}_b) V(\mathbf{y}_a - \mathbf{y}_b)}_{\doteq(3)} \\
 &\quad - \beta \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{q}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{q}_b \mathbf{F}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b) C_{\Lambda_b}(q_{b_1}) \underbrace{\int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{y}_a C_{\Lambda_a}(\mathbf{q}_a, \mathbf{y}_a) \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{y}_b C_{\Lambda_b}(\mathbf{y}_b) V(\mathbf{y}_a - \mathbf{y}_b)}_{\doteq(4)} \\
 &\quad + \mathcal{O}(\beta^2). \tag{3.17}
 \end{aligned}$$

En utilisant (2.45) où on a établi que  $f_{cc}(d) = 2\pi \int_{-\infty}^0 dq_{a_1} C(q_{a_1}) \int_d^\infty dq_{b_1} C(q_{b_1}) \hat{\mathbf{e}}_1$ , on obtient grâce à l'électroneutralité

$$\begin{aligned}
 (1) &\stackrel{(2.45)}{=} 2\pi \int_{-\infty}^0 dq_{a_1} \int_d^\infty dq_{b_1} C_{\Lambda_a}(q_{a_1}) C_{\Lambda_b}(q_{b_1}) \hat{\mathbf{e}}_1 \\
 &= 2\pi \underbrace{\left( \int_{-\infty}^0 dq_{a_1} C_{\Lambda_a}(q_{a_1}) \right)}_{=0: \text{électroneutralité}} \underbrace{\left( \int_d^\infty dq_{b_1} C_{\Lambda_b}(q_{b_1}) \right)}_{=0: \text{électroneutralité}} \hat{\mathbf{e}}_1 \\
 &= 0. \tag{3.18}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) &= 2\pi \int_{-\infty}^0 dq_{a_1} \int_d^\infty dq_{b_1} C_{\Lambda_a}(q_{a_1}) C_{\Lambda_b}(q_{b_1}) \underbrace{\int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{y}_a C_{\Lambda_a}(\mathbf{y}_a) \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{y}_b C_{\Lambda_b}(\mathbf{y}_b) V(\mathbf{y}_a - \mathbf{y}_b)}_{\doteq J: \text{constante par rapport à } \mathbf{q}_a \text{ et } \mathbf{q}_b} \hat{\mathbf{e}}_1 \\
 &= J 2\pi \underbrace{\left( \int_{-\infty}^0 dq_{a_1} C_{\Lambda_a}(q_{a_1}) \right)}_{=0} \underbrace{\left( \int_d^\infty dq_{b_1} C_{\Lambda_b}(q_{b_1}) \right)}_{=0} \hat{\mathbf{e}}_1 \\
 &= 0. \tag{3.19}
 \end{aligned}$$

Les termes (3) et (4) sont un peu plus compliqués à traiter, et nécessitent la mise en évidence explicite des symétries de translation des fonctions de corrélation de charge dans le plan engendré par  $\hat{e}_2$  et  $\hat{e}_3$ .

$$\begin{aligned}
 (3) &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{q}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{q}_b \mathbf{F}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b) C_{\Lambda_a}(q_{a1}) \\
 &\quad \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{y}_a C_{\Lambda_a}(y_{a1}) \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{y}_b C_{\Lambda_b}(q_{b1}, y_{b1} : |\bar{\mathbf{y}}_b - \bar{\mathbf{q}}_b|) V(|y_{a1} - y_{b1}|, |\bar{\mathbf{y}}_a - \bar{\mathbf{y}}_b|) \\
 \bar{\mathbf{y}}_b &\doteq \bar{\mathbf{y}}_b + \bar{\mathbf{q}}_b \\
 &\quad \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{q}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{q}_b \mathbf{F}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b) C_{\Lambda_a}(q_{a1}) \\
 &\quad \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{y}_a C_{\Lambda_a}(y_{a1}) \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{y}_b C_{\Lambda_b}(q_{b1}, y_{b1} : |\bar{\mathbf{y}}_b|) V(|y_{a1} - y_{b1}|, |\bar{\mathbf{y}}_a - \bar{\mathbf{y}}_b + \bar{\mathbf{q}}_b|) \\
 \bar{\mathbf{y}}_a &\doteq \bar{\mathbf{y}}_a + \bar{\mathbf{q}}_b \\
 &\quad \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{q}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{q}_b \mathbf{F}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b) C_{\Lambda_a}(q_{a1}) \\
 &\quad \underbrace{\int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{y}_a C_{\Lambda_a}(y_{a1}) \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{y}_b C_{\Lambda_b}(q_{b1}, y_{b1} : |\bar{\mathbf{y}}_b|) V(|y_{a1} - y_{b1}|, |\bar{\mathbf{y}}_a - \bar{\mathbf{y}}_b|)}_{\doteq I(q_{b1})} \\
 &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{q}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{q}_b \mathbf{F}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b) C_{\Lambda_a}(q_{a1}) I(q_{b1}) \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

Pour le terme (4), les mêmes changements de variables mènent à

$$(4) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{q}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{q}_b \mathbf{F}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b) C_{\Lambda_a}(q_{b1}) I(q_{a1}). \quad (3.21)$$

Pour obtenir la nullité des termes (3) et (4) à partir de (3.20) et (3.21), on utilise le lemme démontré en annexe A.8, à savoir

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{q}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{q}_b \mathbf{F}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b) C_{\Lambda_a}(\mathbf{q}_a) f(q_{b1}) = 0 \quad \forall f(q_{b1}) \quad (3.22)$$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{q}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{q}_b \mathbf{F}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b) C_{\Lambda_b}(\mathbf{q}_b) g(q_{a1}) = 0 \quad \forall g(q_{a1}). \quad (3.23)$$

Il s'ensuit immédiatement par comparaison de (3.20) avec (3.22), et de (3.21) avec (3.23), que (3) = (4) = 0. Ainsi, nous avons montré que tous les termes (1), (2), (3) et (4) formant (3.17) sont nuls, ce qui entraîne la nullité de  $f_{cc}(d)$  à l'ordre linéaire dans le potentiel d'interaction, et achève la preuve.  $\blacksquare$

Ainsi, l'expression de la force à l'ordre linéaire devient

$$\begin{aligned}
 f(d)_{\mathcal{O}(\beta^1)} &= f_T(d)_{\mathcal{O}(\beta^1)} \\
 &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{-\infty}^0 dq_{a1} \int_d^\infty dq_{b1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_a \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_b \mathbf{F}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b) C_T(\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b)_{\mathcal{O}(\beta)} \\
 &\stackrel{(3.16)}{=} -\beta \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{-\infty}^0 dq_{a1} \int_d^\infty dq_{b1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_a \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_b \int_{-\infty}^0 dy_{a1} \int_d^\infty dy_{b1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{y}}_a \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{y}}_b \\
 &\quad \mathbf{F}(q_{a1} - q_{b1}, |\bar{\mathbf{q}}_a - \bar{\mathbf{q}}_b|) C_T^{\Lambda_a}(q_{a1}; y_{a1} : |\bar{\mathbf{q}}_a - \bar{\mathbf{y}}_a|) C_T^{\Lambda_b}(q_{b1}; y_{b1} : |\bar{\mathbf{q}}_b - \bar{\mathbf{y}}_b|) V(y_{a1} - y_{b1}, |\bar{\mathbf{y}}_a - \bar{\mathbf{y}}_b|)
 \end{aligned}$$

L'idée est d'exploiter l'invariance de translation dans le plan transverse, en effectuant des changements de variables judicieux pour s'affranchir de la limite thermodynamique  $\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2}$ . Soit les changements de variables (dans l'ordre)

1.  $\bar{\mathbf{q}}_a \doteq \bar{\mathbf{q}}_a + \bar{\mathbf{y}}_a$   
 $\bar{\mathbf{q}}_b \doteq \bar{\mathbf{q}}_b + \bar{\mathbf{y}}_b$
2.  $\bar{\mathbf{y}}_a \doteq \bar{\mathbf{y}}_a + \bar{\mathbf{y}}_b$ ,

alors

$$\begin{aligned}
 f(d)_{\mathcal{O}(\beta^1)} &= -\beta \int_{-\infty}^0 dq_{a_1} \int_d^\infty dq_{b_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_a \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_b \int_{-\infty}^0 dy_{a_1} \int_d^\infty dy_{b_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{y}}_a \underbrace{\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{L^2} d^2 \bar{\mathbf{y}}_b}_{=\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} L^2 = 1} \\
 &\quad \underbrace{\mathbf{F}(q_{a_1} - q_{b_1}, |\bar{\mathbf{q}}_a - \bar{\mathbf{q}}_b + \bar{\mathbf{y}}_a|) C_T^{\Lambda_a}(q_{a_1}; y_{a_1}; |\bar{\mathbf{q}}_a|) C_T^{\Lambda_b}(q_{b_1}; y_{b_1}; |\bar{\mathbf{q}}_b|) V(y_{a_1} - y_{b_1}, |\bar{\mathbf{y}}_a|)}_{\text{constante par rapport à } \bar{\mathbf{y}}_b} \\
 &= -\beta \int_{-\infty}^0 dq_{a_1} \int_d^\infty dq_{b_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_a \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_b \int_{-\infty}^0 dy_{a_1} \int_d^\infty dy_{b_1} C_T^{\Lambda_a}(q_{a_1}; y_{a_1}; |\bar{\mathbf{q}}_a|) C_T^{\Lambda_b}(q_{b_1}; y_{b_1}; |\bar{\mathbf{q}}_b|) \\
 &\quad \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{y}}_a \mathbf{F}(q_{a_1} - q_{b_1}, |\bar{\mathbf{q}}_a - \bar{\mathbf{q}}_b + \bar{\mathbf{y}}_a|) V(y_{a_1} - y_{b_1}, |\bar{\mathbf{y}}_a|). \tag{3.24}
 \end{aligned}$$

La dépendance en  $d$  est contenue dans les bornes des intégrales sur  $q_{b_1}$  et  $y_{b_1}$ . Évidemment, le comportement asymptotique  $d \rightarrow \infty$  est difficile à réaliser si une telle dépendance est présente dans les bornes d'intégration. Pour contourner cette difficulté, on utilise l'invariance des corrélations de n'importe quel ordre sous les translations et inversions de l'ensemble des variables. Par exemple, soit  $G$  une fonction sans symétrie particulière, soit

$$\Lambda_b = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 | r_1 \geq d\} \tag{3.25}$$

$$\Lambda_{b-d} = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 | r_1 \geq 0\} \tag{3.26}$$

$$\Lambda_a = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 | r_1 \leq 0\}, \tag{3.27}$$

alors les fonctions de corrélation vérifient

$$\begin{aligned}
 C_{\Lambda_b}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) &= C_{\Lambda_{b-d}}(\mathbf{r}_1 - d, \dots, \mathbf{r}_n - d) \\
 &= C_{\Lambda_a}(d - \mathbf{r}_1, \dots, d - \mathbf{r}_n). \tag{3.28}
 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Lambda_b^n} d^3 \mathbf{r}_1 \dots d^3 \mathbf{r}_n C_{\Lambda_b}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) G(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) \\
 &\stackrel{(3.28)}{=} \int_{\Lambda_b^n} d^3 \mathbf{r}_1 \dots d^3 \mathbf{r}_n C_{\Lambda_a}(d - \mathbf{r}_1, \dots, d - \mathbf{r}_n) G(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) \\
 &\stackrel{\mathbf{y}_i \doteq d - \mathbf{r}_i}{=} \int_{\Lambda_a^n} d^3 \mathbf{y}_1 \dots d^3 \mathbf{y}_n C_{\Lambda_a}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n) G(d - \mathbf{y}_1, \dots, d - \mathbf{y}_n). \tag{3.29}
 \end{aligned}$$

Nous allons exploiter la propriété (3.29) dans (3.24). L'idée est de réaliser le bon changement de variables sur  $\Lambda_b$ , une translation puis une inversion, pour ramener le volume  $\Lambda_b$  sur  $\Lambda_a$ , et ainsi n'avoir plus qu'un seul volume de référence indépendant de  $d$ . Soit le changement de variables

$$\begin{aligned}
 q_{b_1} &\doteq d - q_{b_1} \\
 y_{b_1} &\doteq d - y_{b_1}. \tag{3.30}
 \end{aligned}$$

Soit  $\Omega = ]-\infty; 0] \subset \mathbb{R}$ , soit  $C_T^{\text{s.i.}}(\dots)$  la fonction de corrélation tronquée du demi-plan de référence  $\Lambda_a$  sans interaction  $U(r_a, r_b) = 0$ . Alors, en appliquant le changement de variables (3.30) à (3.24) et en utilisant (3.29), on obtient finalement

$$\boxed{f(d)_{\mathcal{O}(\beta^1)} = -\beta \int_{\Omega^4} dq_{a_1} dq_{b_1} dy_{a_1} dy_{b_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_a \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_b C_T^{\text{s.i.}}(q_{a_1}; y_{a_1}; |\bar{\mathbf{q}}_a|) C_T^{\text{s.i.}}(q_{b_1}; y_{b_1}; |\bar{\mathbf{q}}_b|) \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{y}}_a \mathbf{F}(q_{a_1} + q_{b_1} - d, |\bar{\mathbf{q}}_a - \bar{\mathbf{q}}_b + \bar{\mathbf{y}}_a|) V(|y_{a_1} + y_{b_1} - d|, |\bar{\mathbf{y}}_a|)} \tag{3.31}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{F}(q_{a_1} + q_{b_1} - d, |\bar{\mathbf{q}}_a - \bar{\mathbf{q}}_b + \bar{\mathbf{y}}_a|) &= \frac{q_{a_1} + q_{b_1} - d}{((q_{a_1} + q_{b_1} - d)^2 + |\bar{\mathbf{q}}_a - \bar{\mathbf{q}}_b + \bar{\mathbf{y}}_a|^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{e}}_1 \\ V(|y_{a_1} + y_{b_1} - d|, |\bar{\mathbf{y}}_a|) &= \frac{1}{((y_{a_1} + y_{b_1} - d)^2 + |\bar{\mathbf{y}}_a|^2)^{1/2}} \end{aligned}} \tag{3.32}$$

### 3.2.3 Développement asymptotique $d \rightarrow \infty$

Nous désirons exhiber le comportement asymptotique  $d \rightarrow \infty$  de (3.31). Pour ce faire, il est nécessaire de mettre en évidence des petits paramètres, qui sont <sup>2</sup>

$$\mu \doteq \frac{q_{a_1} + q_{b_1}}{d} \qquad \nu \doteq \frac{y_{a_1} + y_{b_1}}{d} \qquad (3.33)$$

$$\alpha \doteq \frac{q_{a_2} - q_{b_2}}{d} \qquad \beta \doteq \frac{q_{a_3} - q_{b_3}}{d}. \qquad (3.34)$$

En effet, on suppose que les corrélations tronquées décroissent suffisamment vite pour que le poids qu'elles attribuent à  $\int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{y}}_a \mathbf{F}(q_{a_1} + q_{b_1} - d; |\bar{\mathbf{q}}_a - \bar{\mathbf{q}}_b + \bar{\mathbf{y}}_a|) V(|y_{a_1} + y_{b_1} - d|; |\bar{\mathbf{y}}_a|)$  devienne suffisamment petit lorsque  $|q_{a_1} + q_{b_1}| \rightarrow \infty$ , ou  $|y_{a_1} + y_{b_1}| \rightarrow \infty$ , ou  $|q_{a_2} - q_{b_2}| \rightarrow \infty$ , ou  $|q_{a_3} - q_{b_3}| \rightarrow \infty$ , de sorte que l'erreur commise en développant  $\mathbf{F}(\dots)V(\dots)$  autour de  $\mu = \nu = \alpha = \beta = 0$  soit négligeable. Remarquons encore, comme il est démontré dans [Ma2], que les corrélations décroissent beaucoup plus rapidement dans la direction  $\hat{e}_1$  que dans les directions  $\hat{e}_2$  et  $\hat{e}_3$ . Néanmoins, pour l'instant, nous ne traitons pas de façon différente les termes se rapportant à des vitesses de décroissance différentes.

Pour alléger l'écriture, notons

$$\int dz_1 \doteq \int_{\Omega^4} dq_{a_1} dq_{b_1} dy_{a_1} dy_{b_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_a \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_b \qquad (3.35)$$

$$z_1 \doteq (q_{a_1}, q_{b_1}, y_{a_1}, y_{b_1}, \bar{\mathbf{q}}_a, \bar{\mathbf{q}}_b) \qquad (3.36)$$

$$\varphi_1(z_1) \doteq -\beta C_T^{s.i.}(q_{a_1}; y_{a_1}; |\bar{\mathbf{q}}_a|) C_T^{s.i.}(q_{b_1}; y_{b_1}; |\bar{\mathbf{q}}_b|) \qquad (3.37)$$

$$g_1(d, z_1) \doteq \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{y}}_a \mathbf{F}(q_{a_1} + q_{b_1} - d, |\bar{\mathbf{q}}_a - \bar{\mathbf{q}}_b + \bar{\mathbf{y}}_a|) V(|y_{a_1} + y_{b_1} - d|, |\bar{\mathbf{y}}_a|). \qquad (3.38)$$

L'indice 1 de  $\varphi_1(z_1)$ ,  $g_1(d, z_1)$  et  $z_1$  signifie que l'on étudie la force à l'ordre linéaire  $U(r_a, r_b)$ . Ainsi, dans ces notations, (3.31) prend la forme

$$f(d)_{\mathcal{O}(\beta^1)} = \int dz_1 \varphi_1(z_1) g_1(d, z_1). \qquad (3.39)$$

Notre hypothèse est que  $g_1(d, z_1)$  admet un développement asymptotique en puissances de  $d^{-1}$ , c'est-à-dire <sup>3</sup>

$$g_1(d, z_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{d^k} g_{1,k}(z_1) \qquad (3.40)$$

$$\implies f(d)_{\mathcal{O}(\beta^1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{d^k} \underbrace{\int dz_1 \varphi_1(z_1) g_{1,k}(z_1)}_{\doteq f_{1,k}}, \qquad (3.41)$$

où  $g_{i,j}(z_i)$  et  $f_{i,j}$  signifient un développement d'ordre  $i$  dans le potentiel d'interaction, et d'ordre  $j$  en  $d^{-1}$ .

Les étapes principales du développement de  $g_1(d, z_1)$  en fonction des petits paramètres sont présentées dans l'annexe A.9. Soit les nouvelles variables indépendantes de  $d$

$$\tilde{\mu} = \mu d, \qquad \tilde{\nu} = \nu d, \qquad \tilde{\alpha} = \alpha d, \qquad \tilde{\beta} = \beta d, \qquad (3.42)$$

2. Un simple développement de Taylor du terme  $\int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{y}}_a \mathbf{F}(\dots)V(\dots)$  en puissances de  $x = d^{-1}$  autour de  $x = 0$  engendre une série divergente.

3. Par la suite, si nous trouvons bien un tel développement, il faudra vérifier la finitude des coefficients. Si les coefficients du développement ne sont pas finis, alors l'hypothèse 7 de l'existence d'une série en puissances de  $d^{-1}$  se révélera fautive. Néanmoins, nous sommes confiants sur l'existence de cette série, car [Li], [LL] et [FJT] par exemple ont trouvé une contribution dominante en  $d^{-3}$  finie, pour un problème similaire.

alors dans l'annexe A.9 on établit que

$$\begin{aligned} g_{1,0}(z_1) &= 0 \\ g_{1,1}(z_1) &= -\pi \hat{e}_1 \\ g_{1,2}(z_1) &= -\frac{\pi}{2} (\tilde{\mu} + \tilde{\nu}) \hat{e}_1 \\ g_{1,3}(z_1) &= \frac{\pi}{8} (\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2) \hat{e}_1 - \frac{\pi}{4} (\tilde{\mu} + \tilde{\nu})^2 \hat{e}_1. \end{aligned} \quad (3.43)$$

### 3.2.4 Calcul de la force par unité de surface en puissances de $d^{-1}$

Connaissant les  $g_{1,j}(z_1)$ ,  $j = 0, \dots, 3$ , la procédure de calcul de la force aux ordres  $d^{-j}$  est bien définie grâce à (3.41).

$$\begin{aligned} f_{1,0} &= 0 \\ f_{1,1} &= \int dz_1 \varphi_1(z_1) g_{1,1}(z_1) \\ &= -\pi \hat{e}_1 \int dz_1 \varphi_1(z_1) \\ &= \pi \beta \hat{e}_1 \left( \int_{\Omega} dq_{a_1} \int_{\Omega} dy_{a_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_a C_T^{\text{s.i.}}(q_{a_1}; y_{a_1}; |\bar{\mathbf{q}}_a|) \right) \left( \int_{\Omega} dq_{b_1} \int_{\Omega} dy_{b_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_b C_T^{\text{s.i.}}(q_{b_1}; y_{b_1}; |\bar{\mathbf{q}}_b|) \right) \\ &\stackrel{(3.47)}{=} 0 : \text{électroneutralité} \quad \stackrel{(3.47)}{=} 0 : \text{électroneutralité} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} f_{1,2} &= \int dz_1 \varphi_1(z_1) g_{1,2}(z_1) \\ &= \frac{\pi}{2} \beta \int_{\Omega^4} dq_{a_1} dq_{b_1} dy_{a_1} dy_{b_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_a \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_b C_T^{\text{s.i.}}(q_{a_1}; y_{a_1}; |\bar{\mathbf{q}}_a|) C_T^{\text{s.i.}}(q_{b_1}; y_{b_1}; |\bar{\mathbf{q}}_b|) \\ &\quad (q_{a_1} + q_{b_1} + y_{a_1} + y_{b_1}) \hat{e}_1 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.46)$$

La dernière égalité est nulle par électroneutralité. En effet, l'expression de  $f_{1,2}$  ne fait intervenir que des premiers moments, sans terme croisé entre variables originellement issues de  $\Lambda_a$  et  $\Lambda_b$ . Ainsi, le premier moment de la fonction de corrélation tronquée est connu par la règle de somme (3.48), et vaudra  $-\frac{1}{4\pi\beta}$ , tandis que l'intégration sur la deuxième fonction de corrélation engendre une contribution nulle par électroneutralité (voir l'annexe A.10 pour l'interprétation de cette relation)

$$\int_{\Omega} dy_{a_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_a C_T^{\text{s.i.}}(q_{a_1}; y_{a_1}; |\bar{\mathbf{q}}_a|) = \int_{\Omega} dy_{b_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_b C_T^{\text{s.i.}}(q_{b_1}; y_{b_1}; |\bar{\mathbf{q}}_b|) = 0, \quad (3.47)$$

entraînant la nullité de  $f_{1,2}$ .

Pour le calcul de  $f_{1,3}$ , on remarque que le mécanisme qui a entraîné la nullité de  $f_{1,2}$  fait en sorte que les seconds moments de variables non croisées  $q_{a_1} y_{a_1}$ ,  $q_{b_1} y_{b_1}$ ,  $q_{a_1}^2$ ,  $q_{a_2}^2$ ,  $q_{a_3}^2$ ,  $y_{a_1}^2$ ,  $y_{a_2}^2$ ,  $y_{a_3}^2$ ,  $q_{b_1}^2$ ,  $q_{b_2}^2$ ,  $q_{b_3}^2$  et  $y_{b_1}^2$  engendrent une contribution nulle à  $f_{1,3}$ . Les moments  $q_{a_1}^2$ ,  $q_{b_1}^2$ ,  $y_{a_1}^2$ ,  $y_{b_1}^2$  sont bien finis, grâce à la rapide décroissance des fonctions de corrélation tronquées dans la direction  $\hat{e}_1$ . Néanmoins, pour affirmer que les seconds moments des variables transverses  $q_{a_2}^2$ ,  $q_{a_3}^2$ ,  $y_{a_2}^2$ ,  $y_{a_3}^2$ ,  $q_{b_2}^2$  et  $q_{b_3}^2$  engendrent une contribution nulle à  $f_{1,3}$ , il faut être en mesure d'affirmer que ces seconds moments sont finis, ce qui n'est pas évident à démontrer. Une argumentation sur la nullité de ces seconds moments est proposée en annexe A.11.

Les arguments suivants permettent de simplifier le calcul de  $f_{1,3}$ :

1. Les moments non croisés donnent une contribution nulle par électroneutralité. Les termes concernés sont  $q_{a_i}^2$ ,  $q_{b_i}^2$ ,  $y_{a_i}^2$ ,  $y_{b_i}^2$ ,  $q_{a_1} y_{a_1}$ ,  $q_{b_1} y_{b_1}$ ,  $i = 1, \dots, 3$ .

2. Symétrie du problème dans le plan engendré par  $\hat{e}_2, \hat{e}_3$ . Les termes  $q_{a_i} q_{b_i}$ ,  $i = 2, 3$  donnent la même contribution.
3. Symétrie du problème dans le plan engendré par  $\hat{e}_2, \hat{e}_3$ . La contribution des moments  $q_{a_i} q_{b_i}$   $\forall i = 2, 3$  est nulle. En effet,

$$\begin{aligned} \int dz_1 \varphi_1(z_1) q_{a_i} q_{b_i} &= -\beta \int_{\Omega^4} dq_{a_1} dq_{b_1} dy_{a_1} dy_{b_1} \\ &\quad \left( \underbrace{\int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_a C_T^{s,i.}(q_{a_1}; y_{a_1}; |\bar{\mathbf{q}}_a|) q_{a_i}}_{\stackrel{(*)}{=} 0} \right) \left( \underbrace{\int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_b C_T^{s,i.}(q_{b_1}; y_{b_1}; |\bar{\mathbf{q}}_b|) q_{b_i}}_{\stackrel{(*)}{=} 0} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

L'égalité  $(*)$  provient du fait que  $C_T^{s,i.}(q_{a_1}; y_{a_1}; |\bar{\mathbf{q}}_a|)$  est paire en  $q_{a_i}$ ,  $i = 2, 3$ , tandis que  $q_{a_i}$  est une fonction impaire. Ainsi, l'intégration sur le domaine symétrique  $\mathbb{R}^2$  du produit d'une fonction paire et impaire donne un résultat nul.

4. Invariance de  $C_T^{s,i.}(q_{a_1}; y_{a_1}; |\bar{\mathbf{q}}_a|)$  sous l'échange de  $q_{a_1}$  et  $y_{a_1}$ . Ainsi, la règle de somme en dimension 3 démontrée dans l'annexe A.12 pour le système infini  $\Lambda_a$  donne

$$\int_{\Omega} dq_{a_1} \int_{\Omega} dy_{a_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_a C_T^{s,i.}(q_{a_1}; y_{a_1}; |\bar{\mathbf{q}}_a|) y_{a_1} = \int_{\Omega} dy_{a_1} \int_{\Omega} dq_{a_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_a C_T^{s,i.}(q_{a_1}; y_{a_1}; |\bar{\mathbf{q}}_a|) q_{a_1} = -\frac{1}{4\pi\beta}. \quad (3.48)$$

Nous sommes à présent en mesure de calculer analytiquement  $f_{1,3}$ .

$$\begin{aligned} f_{1,3} &= \int dz_1 \varphi_1(z_1) g_{1,3}(z_1) \\ &= \int dz_1 \varphi_1(z_1) \left( \frac{\pi}{8} \left( \underbrace{q_{a_2}^2 + q_{b_2}^2}_{\stackrel{\perp=0}{}} - 2 \underbrace{q_{a_2} q_{b_2}}_{\stackrel{\cong=0}{}} + \underbrace{q_{a_3}^2 + q_{b_3}^2}_{\stackrel{\perp=0}{}} - 2 \underbrace{q_{a_3} q_{b_3}}_{\stackrel{\cong=0}{}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\pi}{4} \left( \underbrace{(q_{a_1}^2 + q_{b_1}^2)}_{\stackrel{\perp=0}{}} + 2 \underbrace{q_{a_1} q_{b_1}}_{\stackrel{\perp=y_{a_1} y_{b_1}}{}} + \underbrace{(y_{a_1}^2 + y_{b_1}^2)}_{\stackrel{\perp=0}{}} + 2 y_{a_1} y_{b_1} \right) \right. \\ &\quad \left. + 2 \left( \underbrace{q_{a_1} y_{a_1}}_{\stackrel{\perp=0}{}} + \underbrace{q_{a_1} y_{b_1}}_{\stackrel{\perp=y_{a_1} y_{b_1}}{}} + \underbrace{q_{b_1} y_{a_1}}_{\stackrel{\perp=y_{a_1} y_{b_1}}{}} + \underbrace{q_{b_1} y_{b_1}}_{\stackrel{\perp=0}{}} \right) \right) \hat{e}_1 \\ &= -\frac{\pi}{4} \underbrace{\int dz_1 \varphi_1(z_1) y_{a_1} y_{b_1}}_{\stackrel{\perp=-\beta(-\frac{1}{4\pi\beta})^2}{}} (2 + 2 + 2 + 2) \hat{e}_1 \quad (3.49) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{8} \frac{1}{\pi\beta} \hat{e}_1 \quad (3.50)$$

Nous avons ainsi trouvé le terme dominant en puissances de  $d^{-1}$  du comportement asymptotique  $d \rightarrow \infty$  de la force à l'ordre linéaire dans le potentiel d'interaction  $U(r_a, r_b)$ . Néanmoins, nous montrerons plus tard que le résultat trouvé est le coefficient dominant de la force pour tout ordre dans le potentiel d'interaction, ce qui permet, dans (3.51), de remplacer  $f(d)_{\mathcal{O}(\beta^1)}$  par  $f(d)$ .

$$\boxed{f(d) = \frac{1}{8} \frac{1}{\pi\beta} \frac{1}{d^3} \hat{e}_1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{d^4}\right)} \quad (3.51)$$

### 3.2.5 Discussion

La règle de somme (3.48) représente la valeur d'un moment dipolaire de charge. Lors de l'établissement de l'expression (3.50) de la force, nous voyons apparaître le produit de deux tels moments



dipolaires, l'un issu du système  $\Lambda_a$  et l'autre de  $\Lambda_b$ . On retrouve l'interprétation de la section 3.2.1 et de la figure 3.1. La force à l'ordre le plus bas résulte des interactions entre dipôles créés par les parois. On peut donc imaginer qu'aux ordres supérieurs, la force résulte d'interactions entre multipôles d'ordre supérieur ou égal à deux.

### Interprétation de la décroissance en $d^{-3}$

Il est possible de donner un sens physique à la décroissance en  $d^{-3}$  de la force. Ceci se fait grâce au développement multipolaire microscopique. En effet, à l'ordre le plus bas du développement multipolaire, chaque volume  $\Lambda_a, \Lambda_b$  est modélisé par une particule ponctuelle de charge totale nulle par l'hypothèse 3 de neutralité macroscopique. À cet ordre, la force, qui devrait décroître en  $d^{-1}$ , est donc nulle par électroneutralité. L'ordre suivant du développement multipolaire représente l'interaction entre un dipôle et une particule ponctuelle. À nouveau, la force, qui devrait alors décroître en  $d^{-2}$ , est nulle par neutralité de charge. Enfin, l'interaction entre deux dipôles n'a a priori aucune raison d'être nulle pour cause d'électroneutralité, et donc le premier terme non nul de la force décroît en  $d^{-3}$ . Ce développement multipolaire peut être schématisé comme suit.

$$\begin{aligned}
 f(d) = & \text{Diagram of two volumes } \Lambda_a \text{ and } \Lambda_b \text{ separated by distance } d \\
 = & \underbrace{\text{Diagram 1: } q_a \text{ and } q_b \text{ charges}}_{= \frac{f_1}{d} = 0} + \underbrace{\text{Diagram 2: } q_a \text{ and } q_b \text{ charges with dipoles } y_a, y_b}_{= \frac{1}{2} \frac{f_2}{d^2} = 0} + \underbrace{\text{Diagram 3: } q_a \text{ and } q_b \text{ charges with dipoles } y_a, y_b}_{= \frac{1}{2} \frac{f_2}{d^2} = 0} \\
 & + \underbrace{\text{Diagram 4: } q_a \text{ and } q_b \text{ charges with dipoles } y_a, y_b}_{= \frac{f_3}{d^3} \neq 0} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{d^4}\right) \quad (3.52)
 \end{aligned}$$

Les volumes  $\Lambda_a$  et  $\Lambda_b$  foncés représentent les systèmes dans toute leur complexité, tandis que lorsque ces mêmes volumes sont laissés en blanc ils représentent un certain ordre du développement multipolaire, indiqué par le nombre de points noirs • présents dans chaque volume. Les termes qui font intervenir une particule ponctuelle sont toujours nuls par neutralité macroscopique de chaque volume  $\Lambda_a$  et  $\Lambda_b$ . On constate donc que le premier terme non nul de la force  $f(d)$  est formé de la somme des interactions entre tous les dipôles microscopiques issus de  $\Lambda_a$  avec ceux de  $\Lambda_b$ , dipôles engendrés par la présence des parois.

### Caractère universel de la force

La force obtenue ne dépend que de la distance de séparation  $d$ , et par conséquent pas du détail du plasma (espèces de particules), d'où le caractère universel du résultat analytique. Cette universalité n'a rien de surprenant car elle est la conséquence directe de la règle de somme, cette dernière contenant le caractère universel. En effet, la seule hypothèse physique énoncée pour établir cette règle de somme (mise à part une autre faible hypothèse assurant une certaine convergence) est la propriété d'écran parfait, qui ne dépend pas des espèces, d'où l'universalité. Bien entendu, l'hypothèse d'écran parfait implique tout de même une contrainte implicite sur les espèces, c'est-à-dire qu'il existe des espèces de différents signe de charge de sorte que l'écran parfait soit possible. Par contre, le détail des configurations des espèces n'est soumis à aucune contrainte, d'où l'universalité du résultat.

**Force entre deux plaques planes**

Les calculs réalisés sont aussi valables dans le système fini selon  $\hat{e}_1$ , c'est-à-dire dans le cas de la force d'interaction entre deux plaques planes  $\Lambda_a$  et  $\Lambda_b$  définies par (voir la figure 3.2)

$$\Lambda_a = \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \in [-a, 0], (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2 \} \quad (3.53)$$

$$\Lambda_b = \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \in [d, d+a], (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2 \}, \quad (3.54)$$

à condition de ne pas utiliser la règle de somme (3.48) établie pour  $a = \infty$ .

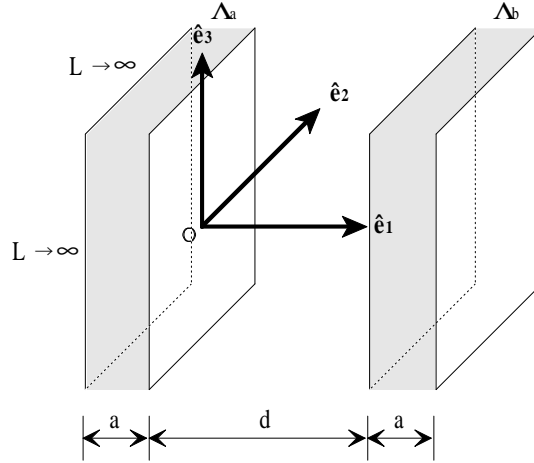


FIG. 3.2 – Système de plaques d'épaisseur finie  $a$

Soit  $\mathcal{P}(a)$  la valeur du premier moment de la fonction de corrélation tronquée de charge du système de plaques, alors, en utilisant (3.49), la force  $f_a(d)$  entre deux plaques planes d'épaisseur finie  $a$  est donnée par

$$f_a(d) = \frac{2\pi\beta}{d^3} \left( \underbrace{\int_{-a}^0 dq_{a1} \int_{-a}^0 dy_{a1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\bar{y}_a y_{a1} C_{a;T}^{s.i.}(q_{a1}; y_{a1} : |\bar{y}_a|)}_{=\mathcal{P}(a)} \right)^2 \hat{e}_1. \quad (3.55)$$

La démarche qui a mené à l'expression (3.51) de la force  $f(d)$  est la suivante (dans l'ordre)

1. extension transverse de  $\Lambda_a$  et  $\Lambda_b$  qui tend vers l'infini
2.  $a \rightarrow \infty$
3.  $d \rightarrow \infty$ ,

alors que (3.55) est la conséquence de la démarche

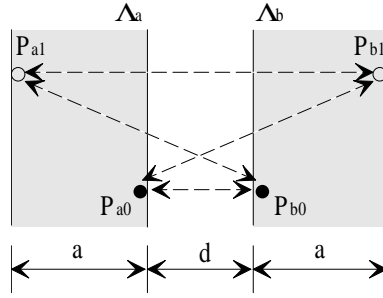
1. extension transverse de  $\Lambda_a$  et  $\Lambda_b$  qui tend vers l'infini
2.  $d \rightarrow \infty$
3.  $a \rightarrow \infty$ .

La question est de savoir si les deux dernières limites commutent, c'est-à-dire si

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \lim_{a \rightarrow \infty} f_a(d) = \lim_{a \rightarrow \infty} \lim_{d \rightarrow \infty} f_a(d), \quad (3.56)$$

$$f(d) = \frac{1}{8} \frac{1}{\pi\beta} \frac{1}{d^3} \hat{e}_1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{d^4}\right) \quad f(d) = \frac{2\pi\beta}{d^3} \mathcal{P}(a)^2$$

ce qui revient à étudier si  $\lim_{a \rightarrow \infty} \mathcal{P}(a) = -\frac{1}{4\pi\beta}$ . Il est légitime de se poser cette question car la physique est différente selon que  $a = \infty$  ou bien  $a < \infty$ . La différence provient des aspects


 FIG. 3.3 – Interaction entre dipôles pour deux plaques d'épaisseur finie  $a$ 

Notons  $\mathcal{P}_{a0}$ ,  $\mathcal{P}_{b0}$  les dipôles issus des parois internes des systèmes  $\Lambda_a$ ,  $\Lambda_b$  respectivement, ainsi que  $\mathcal{P}_{a1}$  et  $\mathcal{P}_{b1}$  ceux issus des parois externes. Les dipôles issus d'un volume interagissent avec tous ceux de l'autre volume, et contribuent ainsi à la force  $f_a(d)$  s'exerçant entre les deux plaques.

subtils de l'interaction de Coulomb dans des systèmes infinis (voir l'annexe A.1 pour une première discussion sur le sujet).

Comme le montre la figure 3.3, la finitude de l'épaisseur du système crée des dipôles supplémentaires représentés par des cercles blancs  $\circ$ , qui interagissent avec les dipôles de l'autre volume. On est tenté d'affirmer que lorsque  $a \rightarrow \infty$ , les parois externes créant les dipôles  $\circ$  sont infiniment éloignées, donc les interactions issues des dipôles  $\circ$  engendrés par ces parois deviennent négligeables. Expliquons pourquoi cette dernière affirmation n'est pas forcément correcte. À cause de la lente décroissance du potentiel de Coulomb, il n'est pas certain que les interactions engendrées par les dipôles issus des parois externes s'annulent dans la limite  $a \rightarrow \infty$ . Par exemple, la force entre deux condensateurs plans chargés séparés d'une distance  $a$  est constante. En particulier, cette force est indépendante de la distance de séparation  $a$ . Formalisons ces idées. Soit le changement de variables  $q_{a1} \doteq q_{a1} + a/2$ ;  $y_{a1} \doteq y_{a1} + a/2$  effectué sur  $\mathcal{P}(a)$  défini par (3.55). Alors, étant donné que les corrélations sont invariantes sous un tel changement de variables (voir (3.29) page 27), on a

$$\begin{aligned}
 \lim_{a \rightarrow \infty} \mathcal{P}(a) &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a/2}^{a/2} dq_{a1} \int_{-a/2}^{a/2} dy_{a1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{y}}_a \left( y_{a1} + \frac{a}{2} \right) C_{a;T}^{\text{s.i.}}(q_{a1}; y_{a1} : |\bar{\mathbf{y}}_a|) \\
 &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a/2}^{a/2} dq_{a1} \int_{-a/2}^{a/2} dy_{a1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{y}}_a y_{a1} C_{a;T}^{\text{s.i.}}(q_{a1}; y_{a1} : |\bar{\mathbf{y}}_a|) \\
 &\quad + \underbrace{\frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow \infty} a \int_{-a/2}^{a/2} dq_{a1} \int_{-a/2}^{a/2} dy_{a1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{y}}_a C_{a;T}^{\text{s.i.}}(q_{a1}; y_{a1} : |\bar{\mathbf{y}}_a|)}_{=0 \forall a : \text{électroneutralité}}. \quad (3.57)
 \end{aligned}$$

En séparant les différentes contributions de  $\mathcal{P}(a)$  comme expliqué par la figure 3.4, on obtient

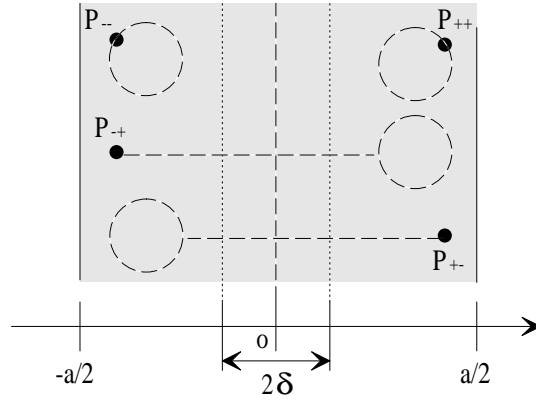


FIG. 3.4 – Séparation des contributions formant les dipôles

Nous séparons en deux le système de référence, pour traiter individuellement les effets de chaque paroi. Il ne faut pas confondre cette notation avec les dipôles donnés par la figure 3.3. En effet, on a la relation  $\mathcal{P}_{a_1} = \mathcal{P}_{b_1} = \mathcal{P}_{--} + \mathcal{P}_{-+}$ , et  $\mathcal{P}_{a_0} = \mathcal{P}_{b_0} = \mathcal{P}_{++} + \mathcal{P}_{+-}$ . Dans notre cas, le point noir  $\bullet$  représente la localisation de la particule  $q_{a_1}$ , tandis que le cercle en traitillé symbolise le nuage formant le dipôle. La région  $2\delta$  est celle dans laquelle les fonctions de corrélation peuvent en bonne approximation être considérées comme invariantes par translation.

$$\begin{aligned}
 \lim_{a \rightarrow \infty} \mathcal{P}(a) &= \lim_{a \rightarrow \infty} \underbrace{\int_{-a/2}^0 dq_{a_1} \int_{-a/2}^0 dy_{a_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{y}}_a y_{a_1} C_{a;T}^{\text{S.I.}}(q_{a_1}; y_{a_1} : |\bar{\mathbf{y}}_a|)}_{\doteq \mathcal{P}_{--}(a)} \\
 &+ \lim_{a \rightarrow \infty} \underbrace{\int_0^{a/2} dq_{a_1} \int_0^{a/2} dy_{a_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{y}}_a y_{a_1} C_{a;T}^{\text{S.I.}}(q_{a_1}; y_{a_1} : |\bar{\mathbf{y}}_a|)}_{\doteq \mathcal{P}_{++}(a)} \\
 &+ \lim_{a \rightarrow \infty} \underbrace{\int_{-a/2}^0 dq_{a_1} \int_0^{a/2} dy_{a_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{y}}_a y_{a_1} C_{a;T}^{\text{S.I.}}(q_{a_1}; y_{a_1} : |\bar{\mathbf{y}}_a|)}_{\doteq \mathcal{P}_{-+}(a)} \\
 &+ \lim_{a \rightarrow \infty} \underbrace{\int_0^{a/2} dq_{a_1} \int_{-a/2}^0 dy_{a_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{y}}_a y_{a_1} C_{a;T}^{\text{S.I.}}(q_{a_1}; y_{a_1} : |\bar{\mathbf{y}}_a|)}_{\doteq \mathcal{P}_{+-}(a)}. \quad (3.58)
 \end{aligned}$$

On peut supposer que pour  $a$  suffisamment grand, dans une région  $2\delta = 2\delta(a)$ , la fonction de corrélation est très proche de celle dans la partie volumique, qui est invariante par translation. Par conséquent, lorsque  $a \rightarrow \infty$ , on peut supposer que  $\mathcal{P}_{--}(a)$  ainsi que  $\mathcal{P}_{++}(a)$  tendent vers la valeur  $\mathcal{P} = -\frac{1}{4\pi\beta}$ , tandis que  $\mathcal{P}_{-+}(a)$  et  $\mathcal{P}_{+-}(a)$  tendent tous deux vers zéro. En effet, ces deux dernières contributions sont nulles car dans leur expression apparaît la fonction de corrélation tronquée de deux points, pour l'un issu du volume de droite de la figure 3.4, et pour l'autre du volume de gauche. Ainsi, on a  $\lim_{a \rightarrow \infty} \mathcal{P}(a) = 2\mathcal{P} = -\frac{1}{2\pi\beta}$ , donc les limites  $d \rightarrow \infty$  et  $a \rightarrow \infty$  ne commutent pas. Plus précisément

$$\lim_{a \rightarrow \infty} f_a(d) = \frac{1}{2} \frac{1}{\pi\beta} \frac{1}{d^3} = 4f(d), \quad (3.59)$$

avec  $f(d)$  la force entre deux demi-plans. Ce résultat n'est néanmoins pas tout à fait rigoureux. Par conséquent, il serait nécessaire de procéder à une preuve plus satisfaisante.

Savoir si les limites  $a \rightarrow \infty$  et  $d \rightarrow \infty$  commutent est important. Pour cause, dans la pratique, la force mesurée lors d'une expérience va dépendre des épaisseurs relatives  $a \gg d$  (équivalent au

choix  $\lim_{d \rightarrow \infty} \lim_{a \rightarrow \infty}$ ) ou  $d \gg a$  (équivalent au choix  $\lim_{a \rightarrow \infty} \lim_{d \rightarrow \infty}$ ). En effet, pour  $\Lambda_b$  par exemple, la force due aux dipôles intérieurs  $\mathcal{P}_{b_0}$  est de l'ordre  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{d^3}\right)$ , tandis que celle due aux dipôles extérieurs  $\mathcal{P}_{b_1}$  est de l'ordre  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{(d+a)^3}\right)$ . Ainsi, si  $a \gg d$ , les dipôles extérieurs ne contribuent pas, et on retrouve la force  $f(d)$  conséquente au choix  $\lim_{d \rightarrow \infty} \lim_{a \rightarrow \infty}$ .

### Comparaison avec la littérature

La force par unité de surface entre deux demi-espaces plans remplis d'un conducteur parfait et séparés par des parois isolantes à faible distance  $d$ , selon une approche microscopique et sans rayonnement, est inférieure d'un facteur  $\zeta(3) = 1.202\dots$  à celle obtenue dans la littérature pour des parois ayant les propriétés d'un conducteur parfait ou d'un diélectrique idéal (voir la section 1.3). Une lecture plus attentive des articles cités dans la section 1.3 qui établissent l'expression de la force avec le facteur  $\zeta(3)$ , révèle que les systèmes en question sont différents du nôtre. En effet, nous n'imposons pas de conditions de bord, ce qui signifie un confinement par des parois dites isolantes. Le facteur  $\zeta(3)$  apparaît lorsque les parois ont les propriétés d'un diélectrique idéal (voir [JŠ]) ou d'un conducteur parfait (voir [JT]), égalité remarquable et non triviale de la force dans ces deux derniers cas, tandis que nous établissons qu'il est absent pour des parois isolantes. On remarque qu'il est impossible de retrouver le facteur  $\zeta(3)$  avec notre approche, car  $\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{12}{21} \int_0^{\infty} dx \frac{x^2 e^x}{e^{2x}-1}$ , expressions que notre démarche ne peut pas engendrer.

### Mécanisme des puissances de $d^{-1}$ aux ordres supérieurs dans le potentiel d'interaction

On peut se demander si (3.51) représente le terme non nul d'ordre le plus bas en puissances de  $d^{-1}$ , et si éventuellement apparaissent des contributions en  $d^{-2}$  ou  $d^{-3}$  lorsqu'on traite le problème à l'ordre quadratique dans le potentiel d'interaction  $U(r_a, r_b)$ . La réponse est que (3.51) représente effectivement le terme non nul d'ordre le plus bas en  $d^{-1}$ . En effet, le premier coefficient non nul du développement à l'ordre  $k$  dans le potentiel d'interaction  $U(r_a, r_b)$  est de l'ordre  $d^{-(k+2)}$ . La preuve à l'ordre quadratique est réalisée dans la section 3.3, tandis que celle à un ordre quelconque dans la section 3.4. Néanmoins, nous pouvons exposer ici le mécanisme de base qui engendre le premier terme non nul lors du développement de la force à un ordre quelconque en  $U(r_a, r_b)$ . Dans le cas linéaire en  $U(r_a, r_b)$ , nous avons

$$g_1(d, z_1) = \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{y}}_a \underbrace{\mathbf{F}(\dots)}_{=\mathcal{O}(1/d^2)} \underbrace{V(\dots)}_{=\mathcal{O}(1/d)} \underbrace{\hspace{10em}}_{=\mathcal{O}(1/d^3)} \underbrace{\hspace{10em}}_{=\mathcal{O}(1/d)}. \quad (3.60)$$

L'intégration sur  $\mathbb{R}^2$  fait en effet passer de l'ordre  $d^{-3}$  à  $d^{-1}$ . Ainsi,  $g_1(d, z_1) = \mathcal{O}(d^{-1})$ . En effet, on avait trouvé  $g_{1,0}(z_1) = 0$  et  $g_{1,1}(z_1) = -\pi \hat{\mathbf{e}}_1 \neq 0$ . L'électronneutralité implique ensuite la nullité de  $f_{1,1}$  et  $f_{1,2}$ .

Généralisons le raisonnement au développement de la fonction de corrélation à deux points à l'ordre  $i$  dans le potentiel d'interaction. Le premier terme non nul, lors du développement asymptotique  $d \rightarrow \infty$  de  $g_i(d, z_i)$ , soit  $g_{i,k}(z_i)$ , sera toujours une constante par rapport aux variables  $z_i$ . En effet, cet ordre revient à prendre la limite  $d \rightarrow \infty$  de tous les petits paramètres, par exemple  $\mu, \nu, \alpha$  et  $\beta$ , qui deviennent nuls, et donc  $g_{i,k}(z_i) = g_{i,k}$ . De plus, on se souvient que si  $g_{i,k}(z_i) = cste|_{z_i}$ , alors par électronneutralité  $f_{i,k} = \int dz_i \varphi_i(z_i) g_{i,k}(z_i) = 0$ . Ensuite, il faut aller à l'ordre suivant en puissances de  $d^{-1}$  dans le développement de  $g_i(d, z_i)$ , soit l'ordre  $k+1$ , pour obtenir des termes linéaires en  $\mu, \nu, \alpha$  et  $\beta$ . Mais, à cet ordre linéaire dans les petits paramètres, il n'existe pas de second moment, et par conséquent pas de moment croisé entre les variables décrivant initialement  $\Lambda_a$  et  $\Lambda_b$ , ainsi  $f_{i,k+1}$  sera à nouveau nul par l'électronneutralité issue d'un des volumes. Il faut encore aller à l'ordre suivant en puissance de  $d^{-1}$  dans le développement de  $g_i(d, z_i)$ , soit l'ordre  $k+2$ , pour obtenir des termes croisés, qui engendrent alors un  $f_{i,k+2}$  non nul. Il reste à présent à trouver  $k = k(i)$  tel que

le raisonnement précédent s'applique. Par exemple, nous avons dans cette section explicitement fait le calcul pour  $i = 1$ , et avons trouvé  $k = i + 2$ . À l'ordre  $i$  dans le potentiel d'interaction  $U(r_a, r_b)$ , on doit pouvoir se ramener à une expression de la forme

$$g_i(d, z_i) = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{y}}_a \underbrace{\mathbf{F}(\dots)}_{=\mathcal{O}(1/d^2)} \underbrace{\tilde{V}^i(\dots)}_{=\mathcal{O}(1/d^i)}}_{=\mathcal{O}(1/d^{i+2})} = \mathcal{O}(1/d^i), \quad (3.61)$$

où  $\tilde{V}^i$  désigne une expression d'ordre  $i$  en  $V$ , qui peut être compliquée. Ceci permet d'établir les relations suivantes.

$$\begin{aligned} g_{i,0}(z_i) &= 0 & \implies & f_{i,0} = 0 \\ &\vdots & & \vdots \\ g_{i,i}(z_i) &= \text{cste}|_{z_i} \neq 0 & \implies & f_{i,i} = 0 \quad : \text{électronneutralité} \\ g_{i,i+1}(z_i) &= \mathcal{O}(z_i) \neq 0 & \implies & f_{i,i+1} = 0 \quad : \text{électronneutralité} \\ g_{i,i+2}(z_i) &= \mathcal{O}(z_i^2) \neq 0 & \implies & f_{i,i+2} \neq 0. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Ainsi  $k = i + 2$ , et donc à l'ordre  $i \geq 1$  dans le potentiel d'interaction, le premier terme non nul dans le développement de la force en puissances de  $d^{-1}$  est d'ordre  $d^{-(i+2)}$ , ce qui permet d'affirmer que (3.51) est la contribution dominante dans la limite  $d \rightarrow \infty$ . Cette preuve est réalisée rigoureusement dans la section 3.4. Il faut néanmoins prendre conscience qu'aux ordres supérieurs apparaissent des corrélations tronquées à plus de deux points, sur lesquelles on ne connaît pas de règle de somme en général, et donc qu'il ne sera pas possible de trouver la valeur de  $f_{i,j} \forall i, j \geq 1$  de façon analytique.

### 3.3 Force à l'ordre quadratique dans le potentiel d'interaction

La section 3.3 démontre le lemme suivant.

**Lemme 3.2** *Le terme dominant du développement asymptotique  $d \rightarrow \infty$  de la force classique à l'ordre quadratique dans le potentiel d'interaction  $U(r_a, r_b)$  décroît en  $d^{-4}$ .*

Pour les ordres  $k \geq 2$  dans le potentiel d'interaction  $U(r_a, r_b)$ , on ne procède plus à la décomposition  $f(d) = f_{cc}(d) + f_T(d)$  réalisée à l'ordre linéaire en  $U(r_a, r_b)$ . Cette décomposition n'est profitable qu'à l'ordre linéaire, pour lequel  $f_{cc}(d)_{\mathcal{O}(\beta^1)} = 0$ , ce qui permet de travailler uniquement avec le terme  $f_T(d)_{\mathcal{O}(\beta^1)}$  qui présente des avantages pédagogiques. Au contraire, à l'ordre quadratique, cette décomposition consiste en une nouvelle sommation non judicieuse, qui fait survenir des problèmes a priori insurmontables. Ainsi, nous adoptons la démarche générale qui consiste à étudier  $f(d) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{q}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{q}_b \mathbf{F}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b) C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b)$ , avec  $\mathbf{F}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b) = \frac{q_{a1} - q_{b1}}{|\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b|^3} \hat{\mathbf{e}}_1$ .

Les résultats de cette section 3.3 sont contenus dans le cas général de la section 3.4. Néanmoins, il est tout de même utile d'exposer les étapes de calcul de l'ordre quadratique, car la preuve générale de la section 3.4 est relativement abstraite, mais suit les mêmes idées que celles de l'ordre quadratique. Ainsi, la lecture du présent chapitre doit rendre la preuve générale de la section 3.4 plus abordable.

#### 3.3.1 Expression des fonctions de corrélation

Soit  $\hat{\theta} = \hat{C}(\mathbf{q}_a) \hat{C}(\mathbf{q}_b)$ ,  $\hat{A}(\mathbf{y}_a, \mathbf{y}_b) = \hat{C}(\mathbf{y}_a) \hat{C}(\mathbf{y}_b)$ ,  $\hat{A}(\mathbf{z}_a, \mathbf{z}_b) = \hat{C}(\mathbf{z}_a) \hat{C}(\mathbf{z}_b)$ . Notons

$$\left\langle \hat{\theta}; \hat{A}(\mathbf{y}_a, \mathbf{y}_b); \hat{A}(\mathbf{z}_a, \mathbf{z}_b) \right\rangle_{\text{s.i., } T} \doteq C_T^{\Lambda_a, \Lambda_b}(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b; \mathbf{y}_a, \mathbf{y}_b; \mathbf{z}_a, \mathbf{z}_b) \quad (3.63)$$

$$= C_T^{\Lambda_a, \Lambda_b}(q_{a1}, q_{b1}; y_{a1}, y_{b1}; z_{a1}, z_{b1} : |\mathbf{q}_a + \mathbf{q}_b - \mathbf{y}_a - \mathbf{y}_b|, |\mathbf{q}_a + \mathbf{q}_b - \mathbf{z}_a - \mathbf{z}_b|, |\mathbf{y}_a + \mathbf{y}_b - \mathbf{z}_a - \mathbf{z}_b|), \quad (3.64)$$

où les symétries de (3.63) sont explicitées dans (3.64). La notation utilisée est expliquée au début de la section 2.1.

On établit dans l'annexe A.6 l'expression de la fonction de corrélation à deux points  $C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b)$  au deuxième ordre dans le potentiel d'interaction.

$$C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b)_{\mathcal{O}(\beta^2)} = \frac{\beta^2}{2} \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{y}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{y}_b \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{z}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{z}_b V(\mathbf{y}_a - \mathbf{y}_b) V(\mathbf{z}_a - \mathbf{z}_b) C_T^{\Lambda_a, \Lambda_b}(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b; \mathbf{y}_a, \mathbf{y}_b; \mathbf{z}_a, \mathbf{z}_b) \quad (3.65)$$

### 3.3.2 Expression de la force par unité de surface $f(d)$

La démarche consiste à introduire (3.65) dans (2.45), puis faire des changements de variables judicieux en tenant compte des symétries (3.64). Pour alléger la notation, nous remplaçons parfois les arguments d'une fonction par  $(\dots)$ .

$$\begin{aligned} f(d)_{\mathcal{O}(\beta^2)} &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{q}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{q}_b \mathbf{F}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b) C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b)_{\mathcal{O}(\beta^2)} \\ &= \frac{\beta^2}{2} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{q}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{q}_b \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{y}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{y}_b \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{z}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{z}_b V(\mathbf{y}_a - \mathbf{y}_b) V(\mathbf{z}_a - \mathbf{z}_b) \mathbf{F}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b) C_T^{\Lambda_a, \Lambda_b}(\dots) \\ &= \frac{\beta^2}{2} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{-\infty}^0 dq_{a_1} \int_d dq_{b_1} \int_{-\infty}^{\infty} dy_{a_1} \int_d dy_{b_1} \int_{-\infty}^{\infty} dz_{a_1} \int_d dz_{b_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_a \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_b \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{y}}_a \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{y}}_b \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{z}}_a \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{z}}_b \\ &\quad C_T^{\Lambda_a, \Lambda_b}(q_{a_1}, q_{b_1}; y_{a_1}, y_{b_1}; z_{a_1}, z_{b_1} : |\mathbf{q}_a + \mathbf{q}_b - \mathbf{y}_a - \mathbf{y}_b|, |\mathbf{q}_a + \mathbf{q}_b - \mathbf{z}_a - \mathbf{z}_b|, |\mathbf{y}_a + \mathbf{y}_b - \mathbf{z}_a - \mathbf{z}_b|) \\ &\quad V(|y_{a_1} - y_{b_1}|, |\bar{\mathbf{y}}_a - \bar{\mathbf{y}}_b|) V(|z_{a_1} - z_{b_1}|, |\bar{\mathbf{z}}_a - \bar{\mathbf{z}}_b|) \mathbf{F}(q_{a_1} - q_{b_1}, |\bar{\mathbf{q}}_a - \bar{\mathbf{q}}_b|). \end{aligned} \quad (3.66)$$

Soit les changements de variables (dans l'ordre)

1.  $\bar{\mathbf{q}}_a \doteq \bar{\mathbf{q}}_a + \bar{\mathbf{y}}_a$   
 $\bar{\mathbf{q}}_b \doteq \bar{\mathbf{q}}_b + \bar{\mathbf{y}}_b$
2.  $\bar{\mathbf{y}}_a \doteq \bar{\mathbf{y}}_a + \bar{\mathbf{z}}_a$   
 $\bar{\mathbf{y}}_b \doteq \bar{\mathbf{y}}_b + \bar{\mathbf{z}}_b$
3.  $\bar{\mathbf{z}}_a \doteq \bar{\mathbf{z}}_a + \bar{\mathbf{z}}_b$ ,

alors

$$\begin{aligned} f(d)_{\mathcal{O}(\beta^2)} &= \frac{\beta^2}{2} \int_{-\infty}^0 dq_{a_1} \int_d dq_{b_1} \int_{-\infty}^{\infty} dy_{a_1} \int_d dy_{b_1} \int_{-\infty}^{\infty} dz_{a_1} \int_d dz_{b_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_a \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_b \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{y}}_a \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{y}}_b \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{z}}_a \\ &\quad C_T^{\Lambda_a, \Lambda_b}(q_{a_1}, q_{b_1}; y_{a_1}, y_{b_1}; z_{a_1}, z_{b_1} : |\mathbf{q}_a + \mathbf{q}_b|, |\mathbf{q}_a + \mathbf{q}_b + \mathbf{y}_a + \mathbf{y}_b|, |\mathbf{y}_a + \mathbf{y}_b|) \\ &\quad \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{z}}_a V(|y_{a_1} - y_{b_1}|, |\bar{\mathbf{y}}_a - \bar{\mathbf{y}}_b + \bar{\mathbf{z}}_a|) V(|z_{a_1} - z_{b_1}|, |\bar{\mathbf{z}}_a|) \mathbf{F}(q_{a_1} - q_{b_1}, |\bar{\mathbf{q}}_a - \bar{\mathbf{q}}_b + \bar{\mathbf{y}}_a - \bar{\mathbf{y}}_b + \bar{\mathbf{z}}_a|) \\ &\quad \underbrace{\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{L^2} d^2 \bar{\mathbf{z}}_b}_{=\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} L^2 = 1}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Soit le changement de variables

$$\begin{aligned} q_{b_1} &\doteq d - q_{b_1} \\ y_{b_1} &\doteq d - y_{b_1} \\ z_{b_1} &\doteq d - z_{b_1}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Soit  $\Omega = ] - \infty; 0] \subset \mathbb{R}$ , soit  $C_T^{s,i}(\dots)$  la fonction de corrélation tronquée du système semi-infini  $\Lambda_a$  de référence sans interaction, alors en appliquant le changement de variables (3.68) à (3.67), on

obtient finalement

$$\begin{aligned}
 f(d)_{\mathcal{O}(\beta^2)} &= \frac{\beta^2}{2} \int_{\Omega^6} dq_{a_1} dq_{b_1} dy_{a_1} dy_{b_1} dz_{a_1} dz_{b_1} \int_{\mathbb{R}^{2 \times 4}} d^2 \bar{\mathbf{q}}_a d^2 \bar{\mathbf{q}}_b d^2 \bar{\mathbf{y}}_a d^2 \bar{\mathbf{y}}_b \\
 &\quad C_T^{\text{s.i.}}(q_{a_1}, q_{b_1}; y_{a_1}, y_{b_1}; z_{a_1}, z_{b_1} : |\mathbf{q}_a + \mathbf{q}_b|, |\mathbf{q}_a + \mathbf{q}_b + \mathbf{y}_a + \mathbf{y}_b|, |\mathbf{y}_a + \mathbf{y}_b|) \\
 &\quad \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{z}}_a V(|y_{a_1} + y_{b_1} - d|, |\bar{\mathbf{y}}_a - \bar{\mathbf{y}}_b + \bar{\mathbf{z}}_a|) V(|z_{a_1} + z_{b_1} - d|, |\bar{\mathbf{z}}_a|) \\
 &\quad \mathbf{F}(q_{a_1} + q_{b_1} - d, |\bar{\mathbf{q}}_a - \bar{\mathbf{q}}_b + \bar{\mathbf{y}}_a - \bar{\mathbf{y}}_b + \bar{\mathbf{z}}_a|).
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

### 3.3.3 Développement asymptotique $d \rightarrow \infty$

Pour alléger l'écriture, notons

$$\int dz_2 \doteq \int_{\Omega^6} dq_{a_1} dq_{b_1} dy_{a_1} dy_{b_1} dz_{a_1} dz_{b_1} \int_{\mathbb{R}^{2 \times 4}} d^2 \bar{\mathbf{q}}_a d^2 \bar{\mathbf{q}}_b d^2 \bar{\mathbf{y}}_a d^2 \bar{\mathbf{y}}_b \tag{3.70}$$

$$z_2 \doteq (q_{a_1}, q_{b_1}, y_{a_1}, y_{b_1}, z_{a_1}, z_{b_1}, \bar{\mathbf{q}}_a, \bar{\mathbf{q}}_b, \bar{\mathbf{y}}_a, \bar{\mathbf{y}}_b) \tag{3.71}$$

$$\varphi_2(z_2) \doteq \frac{\beta^2}{2} C_T^{\text{s.i.}}(q_{a_1}, q_{b_1}; y_{a_1}, y_{b_1}; z_{a_1}, z_{b_1} : |\mathbf{q}_a + \mathbf{q}_b|, |\mathbf{q}_a + \mathbf{q}_b + \mathbf{y}_a + \mathbf{y}_b|, |\mathbf{y}_a + \mathbf{y}_b|) \tag{3.72}$$

$$g_2(d, z_2) \doteq \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{z}}_a V(|y_{a_1} + y_{b_1} - d|, |\bar{\mathbf{y}}_a - \bar{\mathbf{y}}_b + \bar{\mathbf{z}}_a|) V(|z_{a_1} + z_{b_1} - d|, |\bar{\mathbf{z}}_a|) \mathbf{F}(q_{a_1} + q_{b_1} - d, |\bar{\mathbf{q}}_a - \bar{\mathbf{q}}_b + \bar{\mathbf{y}}_a - \bar{\mathbf{y}}_b + \bar{\mathbf{z}}_a|) \tag{3.73}$$

Dans ces notations, la force par unité de surface (3.69) prend la forme

$$f(d)_{\mathcal{O}(\beta^2)} = \int dz_2 \varphi_2(z_2) g_2(d, z_2). \tag{3.74}$$

On suppose que  $g_2(d, z_2)$  admet un développement asymptotique en puissances de  $d^{-1}$  de la forme

$$g_2(d, z_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{d^k} g_{2,k}(z_2) \tag{3.75}$$

$$\implies f(d)_{\mathcal{O}(\beta^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{d^k} \underbrace{\int dz_2 \varphi_2(z_2) g_{2,k}(z_2)}_{\doteq f_{2,k}}. \tag{3.76}$$

Les petits paramètres du problèmes sont

$$\begin{aligned}
 \mu &\doteq \frac{q_{a_1} + q_{b_1}}{d} & \nu &\doteq \frac{y_{a_1} + y_{b_1}}{d} & \eta &\doteq \frac{z_{a_1} + z_{b_1}}{d} & \delta &\doteq \frac{y_{a_3} - y_{b_3}}{d} \\
 \alpha &\doteq \frac{q_{a_2} - q_{b_2}}{d} & \beta &\doteq \frac{q_{a_3} - q_{b_3}}{d} & \gamma &\doteq \frac{y_{a_2} - y_{b_2}}{d} & & &
 \end{aligned} \tag{3.77}$$

On remarque que (3.74) est intégrable, malgré la non intégrabilité du potentiel de Coulomb. En effet, l'intégrabilité est assurée par la décroissance de la fonction de corrélation à 3 points  $C_T^{\text{s.i.}}(\dots)$ . Ainsi, pour toute variable  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3$  dont dépend  $C_T^{\text{s.i.}}(\dots)$ , on a  $\lim_{\xi_1 \rightarrow -\infty} C_T^{\text{s.i.}}(\dots) = \lim_{\xi_1 \rightarrow -\infty} C(\boldsymbol{\xi})g(\dots) = 0$ , avec  $g(\dots)$  une fonction indépendante de  $\boldsymbol{\xi}$ . En effet, loin des parois, le système tend vers un système de Debye, pour lequel il y a écran exponentiel. Ainsi, la limite  $\lim_{\xi_1 \rightarrow -\infty} C(\boldsymbol{\xi})$  tend suffisamment rapidement vers zéro loin des parois pour assurer la finitude des intégrales.

La démarche pour déterminer  $g_{2,k}(z_2)$  est la même que celle présentée en annexe A.9, qui a permis de déterminer  $g_{1,k}(z_1)$ . La principale différence est d'avoir dans notre cas des formules bien plus lourdes à manipuler, à cause du nombre plus grand de petits paramètres. C'est pourquoi ces calculs ne sont pas présentés. Néanmoins, il faut remarquer que l'équivalent de (A.65) à l'ordre quadratique fait intervenir un potentiel de Coulomb supplémentaire, et donc un facteur  $d^{-1}$  supplémentaire lors de la mise en évidence des petits paramètres. Soit les variables indépendantes de  $d$  définies par

$$\tilde{\mu} = \mu d, \quad \tilde{\nu} = \nu d, \quad \tilde{\eta} = \eta d, \quad \tilde{\alpha} = \alpha d, \quad \tilde{\beta} = \beta d, \quad \tilde{\gamma} = \gamma d, \quad \tilde{\delta} = \delta d, \tag{3.78}$$



alors on trouve après quelques calculs

$$\begin{aligned}
 g_{2,0}(z_2) &= 0 \\
 g_{2,1}(z_2) &= 0 \\
 g_{2,2}(z_2) &= -\frac{2}{3}\pi\hat{\mathbf{e}}_1 \\
 g_{2,3}(z_2) &= -\frac{2}{5}\pi\left(\frac{4}{3}\tilde{\mu} + \tilde{\nu} + \tilde{\eta}\right)\hat{\mathbf{e}}_1 \\
 g_{2,3}(z_2) &= -\frac{2}{35}\pi\left(4\tilde{\alpha}^2 + 4\tilde{\beta}^2 + 5\tilde{\gamma}^2 + 5\tilde{\delta}^2 + 4\tilde{\eta}^2 + 4\tilde{\nu}^2 + 6\tilde{\mu}^2 \right. \\
 &\quad \left. + 11\tilde{\alpha}\tilde{\gamma} + 11\tilde{\beta}\tilde{\delta} + 8\tilde{\mu}\tilde{\eta} + 8\tilde{\mu}\tilde{\nu} + 5\tilde{\nu}\tilde{\eta}\right)\hat{\mathbf{e}}_1.
 \end{aligned} \tag{3.79}$$

### 3.3.4 Calcul de la force par unité de surface en puissances de $d^{-1}$

Connaissant les  $g_{2,k}(z_2)$ ,  $k = 0, \dots, 4$ , la procédure de calcul de la force aux ordres  $d^{-k}$  est bien définie grâce à (3.76). Ainsi

$$f_{2,0} = 0 \tag{3.80}$$

$$f_{2,1} = 0. \tag{3.81}$$

Étant donné que  $\varphi_2(z_2)$  est une fonction de corrélation totalement tronquée par rapport à des groupements de variables, il est judicieux de choisir une nouvelle notation qui les exploite pleinement.

$$\begin{aligned}
 q &\doteq (q_1, \bar{\mathbf{q}}) & q_1 &\doteq (q_{a_1}, q_{b_1}) & \bar{\mathbf{q}} &\doteq (\bar{\mathbf{q}}_a, \bar{\mathbf{q}}_b) \\
 y &\doteq (y_1, \bar{\mathbf{y}}) & y_1 &\doteq (y_{a_1}, y_{b_1}) & \bar{\mathbf{y}} &\doteq (\bar{\mathbf{y}}_a, \bar{\mathbf{y}}_b) \\
 z &\doteq (z_1, \bar{\mathbf{z}}) & z_1 &\doteq (z_{a_1}, z_{b_1}) & \bar{\mathbf{z}} &\doteq (\bar{\mathbf{z}}_a, \bar{\mathbf{z}}_b)
 \end{aligned} \tag{3.82}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
 f_{2,2} &= \int dz_i \varphi_2(z_2) g_{2,2}(z_2) \\
 &= -\frac{2}{3}\pi \int dz_2 \varphi_2(z_2) \hat{\mathbf{e}}_1 \\
 &= -\frac{2}{3}\pi \frac{\beta^2}{2} \int_{\Omega^2} dq_1 \int_{\Omega^2} dy_1 \int_{\Omega^2} dz_1 \underbrace{\int_{\mathbb{R}^{2 \times 2}} d^4 \bar{\mathbf{q}} \int_{\mathbb{R}^{2 \times 2}} d^4 \bar{\mathbf{y}} C_T^{\text{s.i.}}(q_1; y_1; z_1 : |\bar{\mathbf{q}}|, |\bar{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{y}}|, |\bar{\mathbf{y}}|)}_{=0 : \text{électroneutralité}} \hat{\mathbf{e}}_1 \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.83}$$

Il n'est a priori pas évident que la dernière relation s'annule par électroneutralité. Nous avons choisi de réaliser ces groupements de variables pour se ramener, après intégration sur certaines variables, à une forme similaire à celle de la règle d'électroneutralité

$$\int_{\Omega} dy_{a_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{y}}_a C_T(q_{a_1}; y_{a_1} : |\bar{\mathbf{y}}_a|) = 0. \tag{3.84}$$

Nous exploitons donc une analogie formelle uniquement. Néanmoins, on peut facilement montrer, après intégration sur certaines variables, que ces analogies formelles traduisent des relations tout à fait justifiées. En effet, par exemple pour (3.83), après intégration sur  $z_{a_1}, z_{b_1}, y_{b_1}, \bar{\mathbf{q}}_a, \bar{\mathbf{q}}_b, \bar{\mathbf{y}}_b$ , on obtient

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega^2} dq_1 \int_{\Omega^2} dy_1 \int_{\Omega^2} dz_1 \int_{\mathbb{R}^{2 \times 2}} d^4 \bar{\mathbf{q}} \int_{\mathbb{R}^{2 \times 2}} d^4 \bar{\mathbf{y}} C_T^{\text{s.i.}}(q_1; y_1; z_1 : |\bar{\mathbf{q}}|, |\bar{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{y}}|, |\bar{\mathbf{y}}|) \\
 = \int_{\Omega} dy_{a_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{y}}_a \underbrace{C_T^{\text{s.i.}}(q_{a_1}; y_{a_1} : |\bar{\mathbf{y}}_a|)}_{=\langle \hat{C}(\mathbf{q}_a) \hat{C}(\mathbf{q}_b); \hat{C}(\mathbf{y}_a) \rangle_{\text{s.i., } T}}.
 \end{aligned} \tag{3.85}$$

Cette dernière relation est bien nulle par la règle d'électroneutralité (A.78). Cette discussion justifie donc l'exploitation des analogies formelles issues du regroupement de variables (3.82).

$$\begin{aligned}
 f_{2,3} &= \int dz_2 \varphi_2(z_2) g_{2,3}(z_2) \\
 &= -\frac{\beta^2}{2} \int_{\Omega^2} dq_1 \int_{\Omega^2} dy_1 \int_{\Omega^2} dz_1 \int_{\mathbb{R}^{2 \times 2}} d^4 \bar{\mathbf{q}} \int_{\mathbb{R}^{2 \times 2}} d^4 \bar{\mathbf{y}} C_T^{\text{s.i.}}(q_1; y_1; z_1 : |\bar{\mathbf{q}}|, |\bar{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{y}}|, |\bar{\mathbf{y}}|) \frac{2}{5} \pi \left( \frac{4}{3} \tilde{\mu} + \tilde{\nu} + \tilde{\eta} \right) \hat{\mathbf{e}}_1 \\
 &= -\frac{\beta^2}{2} \frac{8}{15} \pi \int_{\Omega^2} dq_1 (q_{a_1} + q_{b_1}) \underbrace{\int_{\Omega^2} dy_1 \int_{\Omega^2} dz_1 \int_{\mathbb{R}^{2 \times 2}} d^4 \bar{\mathbf{q}} \int_{\mathbb{R}^{2 \times 2}} d^4 \bar{\mathbf{y}} C_T^{\text{s.i.}}(q_1; y_1; z_1 : |\bar{\mathbf{q}}|, |\bar{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{y}}|, |\bar{\mathbf{y}}|) \hat{\mathbf{e}}_1}_{=0 : \text{électroneutralité}} \\
 &\quad - \frac{\beta^2}{2} \frac{2}{5} \pi \int_{\Omega^2} dz_1 (z_{a_1} + z_{b_1}) \underbrace{\int_{\Omega^2} dq_1 \int_{\Omega^2} dy_1 \int_{\mathbb{R}^{2 \times 2}} d^4 \bar{\mathbf{q}} \int_{\mathbb{R}^{2 \times 2}} d^4 \bar{\mathbf{y}} C_T^{\text{s.i.}}(q_1; y_1; z_1 : |\bar{\mathbf{q}}|, |\bar{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{y}}|, |\bar{\mathbf{y}}|) \hat{\mathbf{e}}_1}_{=0 : \text{électroneutralité}} \\
 &\quad - \frac{\beta^2}{2} \frac{2}{5} \pi \int_{\Omega^2} dy_1 (y_{a_1} + y_{b_1}) \underbrace{\int_{\Omega^2} dq_1 \int_{\Omega^2} dz_1 \int_{\mathbb{R}^{2 \times 2}} d^4 \bar{\mathbf{q}} \int_{\mathbb{R}^{2 \times 2}} d^4 \bar{\mathbf{y}} C_T^{\text{s.i.}}(q_1; y_1; z_1 : |\bar{\mathbf{q}}|, |\bar{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{y}}|, |\bar{\mathbf{y}}|) \hat{\mathbf{e}}_1}_{=0 : \text{électroneutralité}} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{3.86}$$

La nullité de  $f_{2,3}$  est à nouveau la conséquence de la présence de moments d'ordre 1 dans  $g_{2,3}$ , permettant à l'électroneutralité de se manifester. Pour le calcul de  $f_{2,4}$ , il existe des moments d'ordre 2, et donc l'électroneutralité ne pourra pas annuler tous les termes. Par contre, comme pour le cas linéaire dans le potentiel d'interaction, les moments d'ordre deux qui ne sont pas croisés vont à nouveau engendrer des contributions nulles. Néanmoins, il n'est pas possible de trouver facilement une expression analytique pour  $f_{2,4}$ , car la règle de somme (3.48) ne peut pas être appliquée au calcul de tous les moments engendrant  $f_{2,4}$ . Il suffit de constater que les moments croisés de  $g_{2,4}$  engendrent une contribution non nulle à  $f_{2,4}$ , c'est-à-dire  $f_{2,4} = \int dz_2 \varphi_2(z_2) g_{2,4}(z_2) \neq 0$ .

$$\boxed{f(d)_{\mathcal{O}(\beta^2)} = \frac{f_{2,4}}{d^4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{d^5}\right)} \tag{3.87}$$

### 3.3.5 Discussion

Nos suppositions sur le comportement de la dépendance de la force en puissances de  $d^{-1}$  pour un certain ordre dans le potentiel d'interaction  $U(r_a, r_b)$  se sont révélées correctes à l'ordre quadratique en  $U(r_a, r_b)$ . La section 3.4 démontre que ces suppositions sont correctes pour tout ordre en le potentiel d'interaction. Ainsi

$$f(d) = \sum_{k=0}^{\infty} f(d)_{\mathcal{O}(\beta^k)} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f_{k,j}}{d^j} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} f_{k,j}}{d^j} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\tilde{f}_j}{d^j} = \frac{\tilde{f}_3}{d^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{d^4}\right) \tag{3.88}$$

$$f_{k,j} = 0 \quad \forall j < k + 2. \tag{3.89}$$

Plus concrètement, (3.89) revient à affirmer qu'à l'ordre  $k$  dans le potentiel d'interaction  $U(r_a, r_b)$ , le terme dominant du développement asymptotique  $d \rightarrow \infty$  de la force est en  $d^{-(k+2)}$ . De plus, nous avons montré que  $\tilde{f}_3 = \frac{1}{8} \frac{1}{\pi \beta}$ . Affirmer que  $\tilde{f}_{k,j} = 0 \quad \forall j < k + 2$  revient à écrire

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}_0 &= 0 & \tilde{f}_3 &= f_{1,3} \\
 \tilde{f}_1 &= 0 & \tilde{f}_4 &= f_{1,4} + f_{2,4} \\
 \tilde{f}_2 &= 0 & \tilde{f}_5 &= f_{1,5} + f_{2,5} + f_{3,5} \\
 & & & \vdots
 \end{aligned} \tag{3.90}$$

c'est-à-dire

	$\mathcal{O}(U(r_a, r_b)^1)$	$\mathcal{O}(U(r_a, r_b)^2)$	$\mathcal{O}(U(r_a, r_b)^3)$	$\dots$	$\mathcal{O}(U(r_a, r_b)^k)$
$f(d)$	$\frac{1}{d^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{d^4}\right)$	$\frac{1}{d^4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{d^5}\right)$	$\frac{1}{d^5} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{d^6}\right)$	$\dots$	$\frac{1}{d^{k+2}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{d^{k+3}}\right)$

### 3.4 Force à l'ordre $k \geq 0$ dans le potentiel d'interaction

La présente section 3.4 démontre la proposition suivante.

**Proposition 3.2** *Le terme dominant du développement asymptotique  $d \rightarrow \infty$  de la force classique à l'ordre  $k \geq 1$  dans le potentiel d'interaction  $U(r_a, r_b)$  décroît en  $d^{-(k+2)}$ .*

#### 3.4.1 Expression des fonctions de corrélation

Nous utilisons la relation établie dans l'annexe A.6. Soit  $\hat{\theta} = \hat{C}(\mathbf{q}_a)\hat{C}(\mathbf{q}_b)$ ;  $\hat{A}(\mathbf{y}_{ai}, \mathbf{y}_{bi}) = \hat{C}(\mathbf{y}_{ai})\hat{C}(\mathbf{y}_{bi})$ ;  $\mathbf{y}_{ai}, \mathbf{y}_{bi} \in \mathbb{R}^3$ ;  $\mathbf{y}_{ai} = (y_{ai1}, \bar{\mathbf{y}}_{ai})$ ;  $\mathbf{y}_{bi} = (y_{bi1}, \bar{\mathbf{y}}_{bi})$ .

$$C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b)_{\mathcal{O}(\beta^k)} = \frac{(-\beta)^k}{k!} \int_{\Lambda_a^k} d^3 \mathbf{y}_{a1} \dots d^3 \mathbf{y}_{ak} \int_{\Lambda_b^k} d^3 \mathbf{y}_{b1} \dots d^3 \mathbf{y}_{bk} \prod_{i=1}^k V(\mathbf{y}_{ai} - \mathbf{y}_{bi}) \left\langle \hat{\theta} \prod_{j=1}^k \hat{A}(\mathbf{y}_{aj}, \mathbf{y}_{bj}) \right\rangle_{\text{s.i., } T} \quad (3.91)$$

#### 3.4.2 Expression de la force par unité de surface $f(d)$

Notons  $C_T^{\Lambda_a, \Lambda_b}(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b; \mathbf{y}_{a1}, \mathbf{y}_{b1}; \dots; \mathbf{y}_{ak}, \mathbf{y}_{bk}) \doteq \left\langle \hat{\theta} \prod_{j=1}^k \hat{A}(\mathbf{y}_{aj}, \mathbf{y}_{bj}) \right\rangle_{\text{s.i., } T}$ , alors

$$\begin{aligned} f(d)_{\mathcal{O}(\beta^k)} &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{q}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{q}_b \mathbf{F}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b) C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b)_{\mathcal{O}(\beta^k)} \\ &= \frac{(-\beta)^k}{k!} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{q}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{q}_b \int_{\Lambda_a^k} d^3 \mathbf{y}_{a1} \dots d^3 \mathbf{y}_{ak} \int_{\Lambda_b^k} d^3 \mathbf{y}_{b1} \dots d^3 \mathbf{y}_{bk} \\ &\quad \mathbf{F}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b) \prod_{i=1}^k V(\mathbf{y}_{ai} - \mathbf{y}_{bi}) C_T^{\Lambda_a, \Lambda_b}(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b; \mathbf{y}_{a1}, \mathbf{y}_{b1}; \dots; \mathbf{y}_{ak}, \mathbf{y}_{bk}), \end{aligned} \quad (3.92)$$

avec

$$\begin{aligned} &C_T^{\Lambda_a, \Lambda_b}(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b; \mathbf{y}_{a1}, \mathbf{y}_{b1}; \dots; \mathbf{y}_{ak}, \mathbf{y}_{bk}) \\ &= C_T^{\Lambda_a, \Lambda_b} \left( q_{a1}, q_{b1}; y_{a11}, y_{b11}; \dots; y_{ak1}, y_{bk1}; \right. \\ &\quad |\bar{\mathbf{q}}_a + \bar{\mathbf{q}}_b - \bar{\mathbf{y}}_{a1} - \bar{\mathbf{y}}_{b1}|, |\bar{\mathbf{q}}_a + \bar{\mathbf{q}}_b - \bar{\mathbf{y}}_{a2} - \bar{\mathbf{y}}_{b2}|, \dots, |\bar{\mathbf{q}}_a + \bar{\mathbf{q}}_b - \bar{\mathbf{y}}_{ak} - \bar{\mathbf{y}}_{bk}|, \\ &\quad |\bar{\mathbf{y}}_{a1} + \bar{\mathbf{y}}_{b1} - \bar{\mathbf{y}}_{a2} - \bar{\mathbf{y}}_{b2}|, |\bar{\mathbf{y}}_{a1} + \bar{\mathbf{y}}_{b1} - \bar{\mathbf{y}}_{a3} - \bar{\mathbf{y}}_{b3}|, \dots, |\bar{\mathbf{y}}_{a1} + \bar{\mathbf{y}}_{b1} - \bar{\mathbf{y}}_{ak} - \bar{\mathbf{y}}_{bk}|, \\ &\quad |\bar{\mathbf{y}}_{a2} + \bar{\mathbf{y}}_{b2} - \bar{\mathbf{y}}_{a3} - \bar{\mathbf{y}}_{b3}|, |\bar{\mathbf{y}}_{a2} + \bar{\mathbf{y}}_{b2} - \bar{\mathbf{y}}_{a4} - \bar{\mathbf{y}}_{b4}|, \dots, |\bar{\mathbf{y}}_{a2} + \bar{\mathbf{y}}_{b2} - \bar{\mathbf{y}}_{ak} - \bar{\mathbf{y}}_{bk}|, \\ &\quad \vdots \\ &\quad \left. |\bar{\mathbf{y}}_{a(k-1)} + \bar{\mathbf{y}}_{b(k-1)} - \bar{\mathbf{y}}_{ak} - \bar{\mathbf{y}}_{bk}| \right). \end{aligned} \quad (3.93)$$

Soit les changements de variables (dans l'ordre)

$$\begin{aligned} 1. \quad &\bar{\mathbf{q}}_a \doteq \bar{\mathbf{q}}_a + \bar{\mathbf{y}}_{a1} & 2. \quad &\bar{\mathbf{y}}_{a1} \doteq \bar{\mathbf{y}}_{a1} + \bar{\mathbf{y}}_{a2} & 3. \quad &\bar{\mathbf{y}}_{a2} \doteq \bar{\mathbf{y}}_{a2} + \bar{\mathbf{y}}_{a3} \\ &\bar{\mathbf{q}}_b \doteq \bar{\mathbf{q}}_b + \bar{\mathbf{y}}_{b1} & &\bar{\mathbf{y}}_{b1} \doteq \bar{\mathbf{y}}_{b1} + \bar{\mathbf{y}}_{b2} & &\bar{\mathbf{y}}_{b2} \doteq \bar{\mathbf{y}}_{b2} + \bar{\mathbf{y}}_{b3} \\ &\vdots & & & & \\ k. \quad &\bar{\mathbf{y}}_{a(k-1)} \doteq \bar{\mathbf{y}}_{a(k-1)} + \bar{\mathbf{y}}_{ak} & k+1. \quad &\bar{\mathbf{y}}_{ak} \doteq \bar{\mathbf{y}}_{ak} + \bar{\mathbf{y}}_{bk} & & \\ &\bar{\mathbf{y}}_{b(k-1)} \doteq \bar{\mathbf{y}}_{b(k-1)} + \bar{\mathbf{y}}_{bk} & & & & \end{aligned} \quad (3.94)$$

Ce dernier changement de variables permet d'éliminer la dépendance en  $\bar{y}_{bk}$  de l'intégrand. L'intégrale sur  $\bar{y}_{bk}$  se simplifie alors avec la limite thermodynamique  $\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2}$ . Soit ensuite le changement de variables

$$\begin{aligned} q_{b_1} &\doteq d - q_{b_1} \\ y_{b_{i_1}} &\doteq d - y_{b_{i_1}} \quad \forall i = 1, \dots, k \\ \Omega &= ] - \infty, 0] \subset \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Notons  $C_T^{s.i.}(\dots)$  la fonction de corrélation tronquée  $C_T^{\Lambda_a, \Lambda_b}(\dots)$  dans le système de référence après avoir effectué le changement de variables (3.95), alors en effectuant d'abord (3.94) puis (3.95) dans (3.92), en tenant compte de (3.93), on vérifie facilement que l'on obtient

$$\begin{aligned} f(d)_{\mathcal{O}(\beta^k)} &= \frac{(-\beta)^k}{k!} \int_{\Omega^{2 \times (k+1)}} dq_{a_1} dq_{b_1} dy_{a_{1_1}} dy_{b_{1_1}} \dots dy_{a_{k_1}} dy_{b_{k_1}} \\ &\int_{\mathbb{R}^{2 \times k}} d^2 \bar{\mathbf{q}}_a d^2 \bar{\mathbf{q}}_b d^2 \bar{\mathbf{y}}_{a_1} d^2 \bar{\mathbf{y}}_{b_1} \dots d^2 \bar{\mathbf{y}}_{a(k-1)} d^2 \bar{\mathbf{y}}_{b(k-1)} \\ &C_T^{s.i.} \left( q_{a_1}, q_{b_1}; y_{a_{1_1}}, y_{b_{1_1}}; \dots; y_{a_{k_1}}, y_{b_{k_1}}; \right. \\ &\quad \left| \bar{\mathbf{q}}_a + \bar{\mathbf{q}}_b, \left| \bar{\mathbf{q}}_a + \bar{\mathbf{q}}_b + \bar{\mathbf{y}}_{a_1} + \bar{\mathbf{y}}_{b_1} \right|, \dots, \left| \bar{\mathbf{q}}_a + \bar{\mathbf{q}}_b + \sum_{i=1}^{k-1} (\bar{\mathbf{y}}_{a_i} + \bar{\mathbf{y}}_{b_i}) \right| \right. \\ &\quad \left| \bar{\mathbf{y}}_{a_1} + \bar{\mathbf{y}}_{b_1}, \left| \bar{\mathbf{y}}_{a_1} + \bar{\mathbf{y}}_{b_1} + \bar{\mathbf{y}}_{a_2} + \bar{\mathbf{y}}_{b_2} \right|, \dots, \left| \bar{\mathbf{y}}_{a_1} + \bar{\mathbf{y}}_{b_1} + \sum_{i=2}^{k-1} (\bar{\mathbf{y}}_{a_i} + \bar{\mathbf{y}}_{b_i}) \right| \right. \\ &\quad \vdots \\ &\quad \left. \left. \left| \bar{\mathbf{y}}_{a(k-1)} + \bar{\mathbf{y}}_{b(k-1)} \right| \right) \right) \\ &\int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{y}}_{ak} V(|y_{ak_1} - y_{bk_1}|, |\bar{\mathbf{y}}_{ak}|) \prod_{j=1}^{k-1} V\left(|y_{a_{j_1}} - y_{b_{j_1}}|, \left| \sum_{i=j}^{k-1} (\bar{\mathbf{y}}_{a_i} - \bar{\mathbf{y}}_{b_i}) + \bar{\mathbf{y}}_{ak} \right| \right) \\ &\quad \mathbf{F} \left( q_{a_1} + q_{b_1} - d, \left| \bar{\mathbf{q}}_a - \bar{\mathbf{q}}_b + \sum_{i=1}^{k-1} (\bar{\mathbf{y}}_{a_i} - \bar{\mathbf{y}}_{b_i}) + \bar{\mathbf{y}}_{ak} \right| \right). \end{aligned} \quad (3.96)$$

### 3.4.3 Développement asymptotique $d \rightarrow \infty$

Pour simplifier l'expression (3.96), changeons de notations comme suit.

$$\begin{aligned}
 \int dz_k &\doteq \int_{\Omega^{2 \times (k+1)}} dq_{a_1} dq_{b_1} dy_{a_1} dy_{b_1} \dots dy_{a_k} dy_{b_k} \\
 &\int_{\mathbb{R}^{2 \times k}} d^2 \bar{q}_a d^2 \bar{q}_b d^2 \bar{y}_{a_1} d^2 \bar{y}_{b_1} \dots d^2 \bar{y}_{a(k-1)} d^2 \bar{y}_{b(k-1)} \\
 z_k &\doteq \left( q_{a_1}, q_{b_1}, y_{a_1}, y_{b_1}, \dots, y_{a(k-1)}, y_{b(k-1)}, \bar{q}_a, \bar{q}_b, \bar{y}_{a_1}, \bar{y}_{b_1}, \dots, \bar{y}_{a(k-1)}, \bar{y}_{b(k-1)} \right) \\
 \varphi_k(z_k) &\doteq \frac{(-\beta)^k}{k!} C_T^{\text{s.i.}} \left( q_{a_1}, q_{b_1}; y_{a_1}, y_{b_1}; \dots; y_{a_k}, y_{b_k} : \right. \\
 &\quad \left| \bar{q}_a + \bar{q}_b, \left| \bar{q}_a + \bar{q}_b + \bar{y}_{a_1} + \bar{y}_{b_1} \right|, \dots, \left| \bar{q}_a + \bar{q}_b + \sum_{i=1}^{k-1} (\bar{y}_{a_i} + \bar{y}_{b_i}) \right| \right. \\
 &\quad \left| \bar{y}_{a_1} + \bar{y}_{b_1}, \left| \bar{y}_{a_1} + \bar{y}_{b_1} + \bar{y}_{a_2} + \bar{y}_{b_2} \right|, \dots, \left| \bar{y}_{a_1} + \bar{y}_{b_1} + \sum_{i=2}^{k-1} (\bar{y}_{a_i} + \bar{y}_{b_i}) \right| \right. \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad \left. \left. \left| \bar{y}_{a(k-1)} + \bar{y}_{b(k-1)} \right| \right) \right) \\
 g_k(d, z_k) &\doteq \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{y}_{a_k} V(|y_{a_k} - y_{b_k}|, |\bar{y}_{a_k}|) \prod_{j=1}^{k-1} V \left( |y_{a_j} - y_{b_j}|, \left| \sum_{i=j}^{k-1} (\bar{y}_{a_i} - \bar{y}_{b_i}) + \bar{y}_{a_k} \right| \right) \\
 &\quad \mathbf{F} \left( q_{a_1} + q_{b_1} - d, \left| \bar{q}_a - \bar{q}_b + \sum_{i=1}^{k-1} (\bar{y}_{a_i} - \bar{y}_{b_i}) + \bar{y}_{a_k} \right| \right). \tag{3.97}
 \end{aligned}$$

Dans ces nouvelles notations, la force par unité de surface (3.96) prend la forme

$$f(d)_{\mathcal{O}(\beta^k)} = \int dz_k \varphi_k(z_k) g_k(d, z_k). \tag{3.98}$$

On suppose que  $g_k(d, z_k)$  admet un développement asymptotique en puissances de  $d^{-1}$  de la forme

$$g_k(d, z_k) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{d^j} g_{k,j}(z_k) \tag{3.99}$$

$$\Rightarrow f(d)_{\mathcal{O}(\beta^k)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{d^j} \underbrace{\int dz_k \varphi_k(z_k) g_{k,j}(z_k)}_{\doteq f_{k,j}}. \tag{3.100}$$

Les petits paramètres du problème sont

$$\begin{aligned}
 \frac{q_{a_1} + q_{b_1}}{d} &\doteq \mu & \frac{y_{a_{j_1}} + y_{b_{j_1}}}{d} &\doteq \nu_j & , j &= 1, \dots, k-1 \\
 \frac{q_{a_2} - q_{b_2}}{d} &\doteq \alpha & \frac{y_{a_{j_2}} - y_{b_{j_2}}}{d} &\doteq \gamma_j & , j &= 1, \dots, k-1 \\
 \frac{q_{a_3} - q_{b_3}}{d} &\doteq \beta & \frac{y_{a_{j_3}} - y_{b_{j_3}}}{d} &\doteq \delta_j & , j &= 1, \dots, k-1.
 \end{aligned} \tag{3.101}$$

Ainsi on vérifie aisément que

$$\begin{aligned}
 g_k(d, z_k) &= \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{y}}_{ak} \frac{q_{a_1} + q_{b_1} - d}{\left( (q_{a_1} + q_{b_1} - d)^2 + \left( \bar{\mathbf{q}}_a - \bar{\mathbf{q}}_b + \sum_{i=1}^{k-1} (\bar{\mathbf{y}}_{ai} - \bar{\mathbf{y}}_{bi}) + \bar{\mathbf{y}}_{ak} \right)^2 \right)^{3/2}} \\
 &\quad \frac{1}{\left( (y_{ak_1} + y_{bk_1} - d)^2 + |\bar{\mathbf{y}}_{ak}|^2 \right)^{1/2}} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\left( (y_{aj_1} + y_{bj_1} - d)^2 + \left| \sum_{i=j}^{k-1} (\bar{\mathbf{y}}_{ai} - \bar{\mathbf{y}}_{bi}) + \bar{\mathbf{y}}_{ak} \right|^2 \right)^{1/2}} \\
 &= \frac{1}{d^{k+2}} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{y}}_{ak} \frac{\mu - 1}{\left( (\mu - 1)^2 + \left( \alpha + \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_i + \frac{y_{ak_2}}{d} \right)^2 + \left( \beta + \sum_{i=1}^{k-1} \delta_i + \frac{y_{ak_3}}{d} \right)^2 \right)^{3/2}} \\
 &\quad \frac{1}{\left( (\nu_{k-1})^2 + \left( \frac{y_{ak_2}}{d} \right)^2 + \left( \frac{y_{ak_3}}{d} \right)^2 \right)^{1/2}} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\left( (\nu_j - 1)^2 + \left( \sum_{i=j}^{k-1} \gamma_i + \frac{y_{ak_2}}{d} \right)^2 + \left( \sum_{i=j}^{k-1} \delta_i + \frac{y_{ak_3}}{d} \right)^2 \right)^{1/2}}.
 \end{aligned}$$

Soit le changement de variables

$$\begin{aligned}
 x &\doteq \frac{y_{ak_2}}{d} \\
 y &\doteq \frac{y_{ak_3}}{d} \\
 J &= d^2 \mathbb{1},
 \end{aligned} \tag{3.102}$$

alors

$$\begin{aligned}
 g_k(d, z_k) &= \frac{1}{d^k} \int_{\mathbb{R}^2} dx dy \frac{\mu - 1}{\left( (\mu - 1)^2 + \left( \alpha + \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_i + x \right)^2 + \left( \beta + \sum_{i=1}^{k-1} \delta_i + y \right)^2 \right)^{3/2}} \\
 &\quad \frac{1}{\left( (\nu_{k-1})^2 + x^2 + y^2 \right)^{1/2}} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\left( (\nu_j - 1)^2 + \left( \sum_{i=j}^{k-1} \gamma_i + x \right)^2 + \left( \sum_{i=j}^{k-1} \delta_i + y \right)^2 \right)^{1/2}}. \tag{3.103}
 \end{aligned}$$

Il est possible à partir de (3.103) de calculer explicitement les  $g_{k,j}(z_k) \forall k, j$ . Néanmoins, ce calcul ne s'avère pas nécessaire pour achever notre preuve. En effet, soit  $\tilde{\mu} = d\mu$ ,  $\tilde{\nu}_j = d\nu_j$ ,  $\tilde{\alpha} = d\alpha$ ,  $\tilde{\gamma}_j = d\gamma_j$ ,  $\tilde{\beta} = d\beta$ ,  $\tilde{\delta}_j = d\delta_j$ , alors en observant (3.103) on en déduit facilement que

$g_{k,j}(z_k) = 0 \quad \forall j = 0, \dots, k-1 \quad ; k \geq 1$	(3.104)
$g_{k,k}(z_k) = \int_{\mathbb{R}^2} dx dy \frac{-1}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{1/2}} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{\frac{k-1}{2}}} = -\frac{2\pi}{1+k}$	
$g_{k,k+1}(z_k) = \mathcal{O}(\tilde{\mu}, \tilde{\nu}_j)$	
$g_{k,k+2}(z_k) = \mathcal{O}(\tilde{\mu}^2, \tilde{\nu}_j^2, \tilde{\alpha}^2, \tilde{\gamma}_j^2, \tilde{\beta}^2, \tilde{\delta}_j^2)$ .	

### 3.4.4 Calcul de la force par unité de surface en puissances de $d^{-1}$

Il n'est a priori pas évident que  $g_{k,k+1}(z_k)$  ne dépende pas des variables transverses  $\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}_j, \tilde{\beta}, \tilde{\delta}_j \forall j$ . Néanmoins, il est absolument essentiel de le constater, car cette indépendance dans les variables transverses va permettre d'affirmer que  $f_{k,k+1} = 0$ , par électroneutralité. La raison pour laquelle  $g_{k,k+1}(z_k)$  est indépendant de  $\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}_j, \tilde{\beta}, \tilde{\delta}_j \forall j$  provient du fait que dans l'expression (3.103) donnant  $g_k(d, z_k)$ , les variables transverses se trouvent toutes élevées au carré dans des expressions du type  $\left( \alpha + \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_i + x \right)^2$ ,  $\left( \beta + \sum_{i=1}^{k-1} \delta_i + y \right)^2$ ,  $\left( \sum_{i=j}^{k-1} \gamma_i + x \right)^2$  et  $\left( \sum_{i=j}^{k-1} \delta_i + y \right)^2$ . Ainsi, à l'ordre  $\mathcal{O}(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}_j, \tilde{\beta}, \tilde{\delta}_j)$ , ces variables transverses sont couplées à  $x$  ou  $y$ , c'est-à-dire multipliées linéairement par  $x$  ou  $y$  et par une fonction qui dépend de  $x^2 + y^2$  uniquement. Par suite, lors du passage en

coordonnées polaires pour effectuer l'intégration  $\int_{\mathbb{R}^2} dx dy$ , l'intégration sur l'angle polaire donne une contribution nulle pour ces variables transverses. Ceci explique l'indépendance de  $g_{k,k+1}(z_k)$  par rapport à ces variables transverses. Il en découle donc, par le même procédé que celui décrit dans la section 3.3.4 pour l'ordre quadratique  $k = 2$  dans le potentiel d'interaction, que

$$f_{k,k+1} = \underbrace{\int dz_k \varphi_k(z_k) \mathcal{O}(\tilde{\mu}, \tilde{\nu})}_{=0: \text{électronéutralité}} = 0. \quad (3.105)$$

De même

$$f_{k,k} = -\frac{2\pi}{1+k} \underbrace{\int dz_k \varphi_k(z_k)}_{=0: \text{électronéutralité}} = 0. \quad (3.106)$$

Par contre, les seconds moments donnent à nouveau une contribution non nulle à la force, à cause de l'existence de termes croisés dans  $g_{k,k+2}(z_k)$ .

$$f_{k,k+2} = \int dz_k \varphi_k(z_k) \mathcal{O}(\tilde{\mu}^2, \tilde{\nu}_j^2, \tilde{\alpha}^2, \tilde{\gamma}_j^2, \tilde{\beta}^2, \tilde{\delta}_j^2) \neq 0 \quad (3.107)$$

$$\boxed{f(d)_{\mathcal{O}(\beta^k)} = \frac{f_{k,k+2}}{d^{k+2}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{d^{k+3}}\right)} \quad (3.108)$$

### 3.4.5 Discussion

Nous avons donc montré qu'à l'ordre  $k \geq 1$  dans le potentiel d'interaction  $U(r_a, r_b)$ , le coefficient dominant de la force dans le régime asymptotique  $d \rightarrow \infty$  décroît selon  $d^{-(k+2)}$ , c'est-à-dire

$$f(d)_{\mathcal{O}(\beta^k)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f_{k,j}}{d^j} \quad (3.109)$$

$$f_{k,j} = \begin{cases} 0 & j < k+2 \\ \int dz_k \varphi_k(z_k) g_{k,j}(z_k) \neq 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.110)$$

avec  $f(d) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\tilde{f}_j}{d^j}$ ,  $\tilde{f}_j = \sum_{k=0}^{\infty} f_{k,j}$ . Ceci achève donc la preuve de la proposition 3.2, et par conséquent aussi la preuve du théorème 3.1.

## Chapitre 4

# Traitement semi-classique

Ce chapitre a pour but de démontrer la proposition suivante.

**Proposition 4.1** Soit  $C_T^{\text{s.i.}}(q_{a_1}; y_{a_1} : |\bar{\mathbf{y}}_a|)$  la fonction de corrélation tronquée de charge semi-classique du demi-espace plan  $\Lambda_a$  sans influence, alors le terme dominant du développement asymptotique  $d \rightarrow \infty$  de la force semi-classique  $f(d)$  est donné par

$$f(d) = \frac{2\pi\beta}{d^3} \left( \int_{-\infty}^0 dq_{a_1} \int_{-\infty}^0 dy_{a_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\bar{\mathbf{y}}_a y_{a_1} C_T^{\text{s.i.}}(q_{a_1}; y_{a_1} : |\bar{\mathbf{y}}_a|) \right)^2 \hat{\mathbf{e}}_1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{d^4}\right), \quad (4.1)$$

avec  $\lim_{\hbar \rightarrow 0} f(d) = f(d)^{\text{classique}}$ .

On utilise les résultats suivants du chapitre 2.

$$f(d) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{\Lambda_a} d^3\mathbf{q}_a \int_{\Lambda_b} d^3\mathbf{q}_b \mathbf{F}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b) C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b) \quad (4.2)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b) = \frac{q_{a_1} - q_{b_1}}{|\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b|^3} \quad (4.3)$$

$$\Lambda_a = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | x_1 \leq 0\}, \quad \Lambda_b = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | x_1 \geq d\} \quad (4.4)$$

À présent, la différence est de considérer des particules ponctuelles quantiques sans contrainte statistique (c'est-à-dire avec la statistique de Maxwell-Boltzmann). Soit  $\mathcal{H}$  l'espace de Hilbert décrivant le système,  $H$  l'hamiltonien décrivant la dynamique,  $dx$  la mesure de Lebesgue, alors

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^{2 \cdot 3 \cdot 2N}, dx) \quad (4.5)$$

$$H = T_a + T_b + U(r_a) + U(r_b) + U(r_a, r_b) \quad (4.6)$$

$$T_a = - \sum_{i=1}^N \frac{\hbar^2}{2m_{\alpha_i}} \Delta_i \quad (4.7)$$

$$T_b = - \sum_{i=1}^N \frac{\hbar^2}{2m_{\alpha_{i+N}}} \Delta_{i+N}, \quad (4.8)$$

tandis que les définitions de  $U(r_a)$ ,  $U(r_b)$  et  $U(r_a, r_b)$  sont identiques à celles de la section 2.2, en interprétant la position  $\mathbf{q}$  par un opérateur position agissant sur  $\mathcal{H}$ .

### 4.1 Formalisme des filaments

Le formalisme dit des filaments permet d'avoir une formulation semi-classique similaire à celle du cas classique. La différence réside dans un nouvel espace de phase élargi, celui des filaments



$\mathcal{F} = (\alpha, \mathbf{q}, \boldsymbol{\xi})$ , avec  $\alpha$  la charge de la particule,  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$  sa position dans le sens où dans la limite classique  $\hbar \rightarrow 0$  la particule devient localisée en  $\mathbf{q}$ , et  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3$  la forme du filament attaché à la particule, qui représente ses fluctuations quantiques. On revoie à l'annexe A.13 pour la présentation de la construction du formalisme des filaments.

On note aussi qu'il existe un formalisme similaire dans le cas du plasma purement quantique. Dans ce cas, on parle du formalisme des boucles  $\mathcal{L}$ , dont l'analogie formelle avec le cas classique découle d'une relation tout à fait remarquable, appelée "formule magique" (voir [MB] ou [Me2]).

### 4.1.1 Formalisme des filaments pour notre système

Soit  $\mathcal{F} = (\alpha, \mathbf{q}, \boldsymbol{\xi})$  l'espace de phase élargi des filaments,  $\alpha$  l'indice de charge,  $\mathbf{q}$  la position de la particule,  $\boldsymbol{\xi}$  la forme du filament. Soit  $\hat{A}$  une observable sur  $\mathcal{F}$ , alors notre système dans le formalisme des filaments est caractérisé par les grandeurs suivantes.

$$\langle \hat{A} \rangle = \frac{1}{Q} \int d\mathcal{F} e^{-\beta(U(\mathcal{F}_a) + U(\mathcal{F}_b))} e^{-\beta U(\mathcal{F}_a, \mathcal{F}_b)} \quad (4.9)$$

$$\int d\mathcal{F} = \sum_{\alpha_{a_1}=1}^S \sum_{\alpha_{b_1}=1}^S \int_{\Lambda_a^N} d^3 \mathbf{r}_{a_1} \dots d^3 \mathbf{r}_{a_N} \int_{\Lambda_b^N} d^3 \mathbf{r}_{b_1} \dots d^3 \mathbf{r}_{b_N} \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \alpha_{a_N}=1 \quad \alpha_{b_N}=1 \\ \int_{\Lambda_a^N} D[\boldsymbol{\xi}_{a_1}(\cdot)] \dots D[\boldsymbol{\xi}_{a_N}(\cdot)] \int_{\Lambda_b^N} D[\boldsymbol{\xi}_{b_1}(\cdot)] \dots D[\boldsymbol{\xi}_{b_N}(\cdot)] z(\mathcal{F}) \quad (4.10)$$

$$= \int d\mathcal{F}_a \int d\mathcal{F}_b, \quad (4.11)$$

avec

$$\int d\mathcal{F}_a = \sum_{\alpha_{a_1}=1}^S \int_{\Lambda_a^N} d^3 \mathbf{r}_{a_1} \dots d^3 \mathbf{r}_{a_N} \int_{\Lambda_a^N} D[\boldsymbol{\xi}_{a_1}(\cdot)] \dots D[\boldsymbol{\xi}_{a_N}(\cdot)] z(\mathcal{F}_a) \quad (4.12) \\ \vdots \\ \alpha_{a_N}=1$$

$$\int d\mathcal{F}_b = \sum_{\alpha_{b_1}=1}^S \int_{\Lambda_b^N} d^3 \mathbf{r}_{b_1} \dots d^3 \mathbf{r}_{b_N} \int_{\Lambda_b^N} D[\boldsymbol{\xi}_{b_1}(\cdot)] \dots D[\boldsymbol{\xi}_{b_N}(\cdot)] z(\mathcal{F}_b). \quad (4.13) \\ \vdots \\ \alpha_{b_N}=1$$

$D[\boldsymbol{\xi}(\cdot)]$  est la mesure normalisée de Wiener du pont brownien définie dans l'espace des chemins  $\boldsymbol{\xi}(\cdot)$  continus mais différentiables nulle part, tandis que  $d[\boldsymbol{\xi}(\cdot)]$  est une intégrale fonctionnelle conventionnelle. Soit  $D$  la constante de diffusion généralisée qui est égale à  $1/2$  dans notre cas (voir [Ma]), alors

$$D[\boldsymbol{\xi}_{ai}(\cdot)] = d[\boldsymbol{\xi}_{ai}(\cdot)] \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^1 ds \left| \frac{d\boldsymbol{\xi}_{ai}(s)}{ds} \right|^2\right) (2\pi)^{3/2} \quad (4.14)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} D[\boldsymbol{\xi}(\cdot)] \xi_i(s_1) \xi_j(s_2) = \delta_{ij} (\min(s_1, s_2) - s_1 s_2) \quad (4.15)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} D[\boldsymbol{\xi}(\cdot)] = \frac{1}{(4\pi D)^{3/2}}, \quad D = 1/2. \quad (4.16)$$

Soit  $z(\mathcal{F})$  l'activité,  $\sigma_{\alpha_{a_i}}$  le moment cinétique intrinsèque (spin) maximal de l'espèce correspondant à la particule  $i$  du volume  $\Lambda_a$ ,  $m_{\alpha_{a_i}}$  sa masse,  $\lambda_{\alpha_{a_i}}$  sa longueur d'onde thermique de de Broglie.

$$z(\mathcal{F}) = \prod_{i=1}^N \frac{2\sigma_{\alpha_{a_i}} + 1}{(2\pi\lambda_{\alpha_{a_i}}^2)^{3/2}} \frac{2\sigma_{\alpha_{b_i}} + 1}{(2\pi\lambda_{\alpha_{b_i}}^2)^{3/2}} = z(\mathcal{F}_a)z(\mathcal{F}_b) \quad (4.17)$$

$$\lambda_{\alpha_{a_i}} = \hbar\sqrt{\frac{\beta}{m_{\alpha_{a_i}}}}, \quad \lambda_{\alpha_{b_i}} = \hbar\sqrt{\frac{\beta}{m_{\alpha_{b_i}}}} \quad (4.18)$$

Les fonctions de corrélation de charge  $C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b)$  s'obtiennent par intégration sur les degrés de liberté internes des fonctions de corrélation de filaments  $C(\mathcal{F}_a, \mathcal{F}_b)$ . Les fonctions de corrélation se définissent, de façon similaire au cas classique, à partir des fonctions de densité de particules d'une certaine espèce.

$$C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b) = \sum_{\alpha_a=1}^S \sum_{\alpha_b=1}^S e_{\alpha_a} e_{\alpha_b} \rho_{\alpha_a \alpha_b}^{(2)}(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b) \quad (4.19)$$

$$\rho_{\alpha_a \alpha_b}^{(2)}(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b) = \int_{\Lambda_a} D[\xi_a(\cdot)] \int_{\Lambda_b} D[\xi_b(\cdot)] \rho_{\alpha_a \alpha_b}^{(2)}(\mathcal{F}_a, \mathcal{F}_b) \quad (4.20)$$

$$\rho_{\alpha_a \alpha_b}^{(2)}(\mathcal{F}_a, \mathcal{F}_b) = \langle \hat{\rho}_{\alpha_a}(\mathcal{F}_a) \hat{\rho}_{\alpha_b}(\mathcal{F}_b) \rangle \quad (4.21)$$

$$\hat{\rho}_{\alpha_a}(\mathcal{F}_a) = \sum_{i=1}^N \delta_{\alpha_a, \alpha_i} \delta(\mathbf{r}_{ai} - \mathbf{q}_a) \delta(\chi_{ai} - \xi_a) \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b) &= \int_{\Lambda_a} D[\xi_a(\cdot)] \int_{\Lambda_b} D[\xi_b(\cdot)] \underbrace{\left\langle \sum_{\alpha_a=1}^S \sum_{\alpha_b=1}^S e_{\alpha_a} e_{\alpha_b} \hat{\rho}_{\alpha_a}(\mathcal{F}_a) \hat{\rho}_{\alpha_b}(\mathcal{F}_b) \right\rangle}_{=\langle \hat{C}(\mathcal{F}_a) \hat{C}(\mathcal{F}_b) \rangle = C(\mathcal{F}_a, \mathcal{F}_b)} \quad (4.23) \end{aligned}$$

Soit  $\mathcal{X}_\Omega(\mathbf{x})$  la fonction indicatrice de  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ , alors les potentiels d'interaction entre filaments sont définis par

$$U(\mathcal{F}_a) = \sum_{1 \leq i < j \leq 2N} e_{\alpha_i} e_{\alpha_j} V_{\alpha_i \alpha_j}(\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j) \mathcal{X}_{\Lambda_a}(\mathbf{r}_i) \mathcal{X}_{\Lambda_a}(\mathbf{r}_j) \quad (4.24)$$

$$U(\mathcal{F}_b) = \sum_{1 \leq i < j \leq 2N} e_{\alpha_i} e_{\alpha_j} V_{\alpha_i \alpha_j}(\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j) \mathcal{X}_{\Lambda_b}(\mathbf{r}_i) \mathcal{X}_{\Lambda_b}(\mathbf{r}_j) \quad (4.25)$$

$$U(\mathcal{F}_a, \mathcal{F}_b) = \sum_{1 \leq i < j \leq 2N} e_{\alpha_i} e_{\alpha_j} V_{\alpha_i \alpha_j}(\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j) \mathcal{X}_{\Lambda_a}(\mathbf{r}_i) \mathcal{X}_{\Lambda_b}(\mathbf{r}_j) \quad (4.26)$$

$$V_{\alpha_i \alpha_j}(\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j) = \int_0^1 ds V(\mathbf{r}_i + \lambda_{\alpha_i} \xi_i(s) - \mathbf{r}_j - \lambda_{\alpha_j} \xi_j(s)) \quad (4.27)$$

$$V(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^{-1}. \quad (4.28)$$

Il est remarquable que, contrairement au cas classique, le potentiel d'interaction (4.27) dépend explicitement de l'espèce des particules par le biais de la longueur d'onde thermique de de Broglie  $\lambda_{\alpha_i}$ , et donc de la masse de la particule  $m_{\alpha_i}$ . Cette dépendance a des conséquences de calcul non négligeables. De plus, l'interaction entre filaments diffère d'une interaction de Coulomb classique entre filaments chargés. En effet, (4.27) révèle que l'interaction entre filaments est "bijective", c'est-à-dire que chaque point du filament  $\mathcal{F}_i$  n'interagit qu'avec un et un seul point du filament  $\mathcal{F}_j$ . Une interaction classique entre filaments serait telle que chaque point de  $\mathcal{F}_i$  interagit avec l'ensemble de  $\mathcal{F}_j$  (voir la figure 4.1).

Ainsi, étant donné que l'extension spatiale du filament dépend de l'espèce des particules, alors l'interaction entre filaments dépend aussi de l'espèce, par conséquent l'énergie d'interaction  $U(\mathcal{F}'_a, \mathcal{F}'_b)$

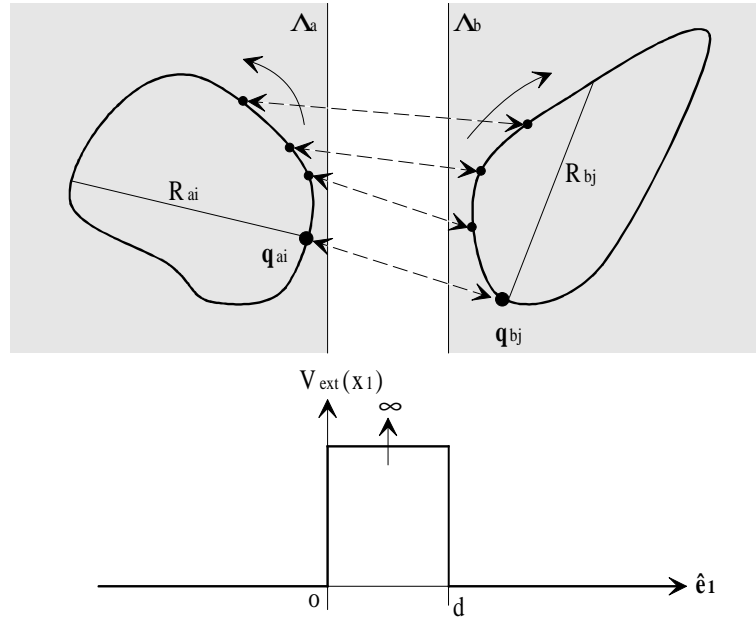


FIG. 4.1 – Interaction bijective entre filaments et contrainte sur leur extension spatiale

L'extension spatiale du filament vérifie  $R_{a_i} \sim \lambda_{\alpha_{a_i}} = \hbar \sqrt{\frac{\beta}{m_{\alpha_{b_i}}}}$ . Les filaments sont une manifestation des fluctuations quantiques, et dans la limite classique  $\hbar \rightarrow 0$ , ils se réduisent à un point, ce qui correspond au cas classique. Les flèches en traitillé représentent l'interaction bijective qui surgit dans le formalisme des filaments. Chaque point du filament de  $\Lambda_a$  n'interagit qu'avec un et un seul point du filament de  $\Lambda_b$ . Il est possible de modéliser la région interdite  $\mathbb{R}^3 \setminus \{\Lambda_a \cup \Lambda_b\}$  par un potentiel infini  $V_{\text{ext}}(x_1)$ .

entre  $\Lambda_a$  et  $\Lambda_b$  ne prend pas une forme factorisée similaire au cas classique (A.6). Soit  $\hat{C}(\mathcal{F}'_a)$  l'opérateur densité de charge dans  $\Lambda_a$  dû aux particules localisées en  $\mathbf{y}_a$  et de forme filamenteuse  $\chi(\cdot)$ . Soit  $\mathcal{F}'_a = (\alpha'_a, \mathbf{y}_a, \chi_a)$ , alors

$$U(\mathcal{F}'_a, \mathcal{F}'_b) = \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{y}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{y}_b \int_{\Lambda_a} D[\chi_a(\cdot)] \int_{\Lambda_b} D[\chi_b(\cdot)] \sum_{\alpha'_a=1}^S e_{\alpha'_a} \hat{\rho}_{\alpha'_a}(\mathcal{F}'_a) \sum_{\alpha'_b=1}^S e_{\alpha'_b} \hat{\rho}_{\alpha'_b}(\mathcal{F}'_b) V_{\alpha_i \alpha_j}(\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j). \quad (4.29)$$

Il apparaît ainsi que la dépendance du potentiel d'interaction en  $\alpha'_a$  et  $\alpha'_b$  empêche une factorisation dans (4.29), et donc rend impossible la mise en évidence des opérateurs de densité de charge  $\hat{C}(\mathcal{F}'_a)$  et  $\hat{C}(\mathcal{F}'_b)$ .

L'extension spatiale des filaments est sujette à une contrainte. La mesure de Wiener d'un filament issu d'un volume  $\Lambda_a$  ou  $\Lambda_b$  est restreinte à ce même volume. En effet, le filament représente les fluctuations quantiques de la particule, et a priori il peut s'étendre sur tout  $\mathbb{R}^3$ , c'est-à-dire que la particule quantique peut être localisée n'importe où dans l'espace. Néanmoins, la contrainte du volume interdit  $\mathbb{R}^3 \setminus \{\Lambda_a \cup \Lambda_b\}$  peut être modélisée par un potentiel extérieur  $V_{\text{ext}}(x_1)$  défini par

$$V_{\text{ext}}(x_1) = \delta(\mathcal{X}_{]0,d[}(x_1) - 1) = \begin{cases} 0 & \forall x_1 \in ]-\infty, 0[ \cup ]d, \infty[ \\ \infty & \forall x_1 \in ]0, d[. \end{cases} \quad (4.30)$$

Dans ce cas, on sait que la probabilité de présence d'une particule dans la zone de potentiel infini est nulle. La particule ne fluctue pas dans la région interdite, et par conséquent sa probabilité de présence doit y être nulle. Ainsi, les filaments issus de particules localisées dans  $\Lambda_a$  sont localisés dans  $\Lambda_a$ . Il en est de même pour ceux issus de  $\Lambda_b$ . On ne peut pas non plus accepter des filaments "cassés", dont une partie serait contenue dans  $\Lambda_a$ , et l'autre dans  $\Lambda_b$ . En effet, cette géométrie est à exclure car il n'existe pas d'effet tunnel pour une barrière de potentiel infinie. Le domaine d'intégration des

intégrales fonctionnelles est à interpréter comme une convention de notation, qui indique quelle est la contrainte spatiale à laquelle sont soumis les filaments. En effet, cette contrainte spatiale ne peut pas être interprétée comme de simples bornes d'intégration, étant donné que la forme du filament représente un degré de liberté interne de la particule.

Si le potentiel d'interaction entre filaments issus de  $\Lambda_a$  et  $\Lambda_b$  est nul,  $U(\mathcal{F}_a, \mathcal{F}_b) = 0$ , alors

$$\frac{1}{Q} \int d\mathcal{F} e^{-\beta(U(\mathcal{F}_a)+U(\mathcal{F}_b))} = \frac{1}{Q_{\Lambda_a}} \int d\mathcal{F}_a e^{-\beta U(\mathcal{F}_a)} \frac{1}{Q_{\Lambda_b}} \int d\mathcal{F}_b e^{-\beta U(\mathcal{F}_b)}. \quad (4.31)$$

La factorisation (4.31) va permettre, à l'instar du cas classique, de reformuler des moyennes d'observables du système sous influence en termes de moyennes sur les systèmes  $\Lambda_a$  et  $\Lambda_b$  sans interaction mutuelle.

## 4.2 Force à l'ordre linéaire dans le potentiel d'interaction

La présente section 4.2 consiste, en plus des interprétations physiques, à démontrer la proposition suivante.

**Proposition 4.2** Soit  $C_T^{s.i.}(q_{a_1}; y_{a_1} : |\bar{y}_a|)$  la fonction de corrélation tronquée de charge semi-classique du demi-espace plan  $\Lambda_a$  sans influence, alors le terme dominant du développement asymptotique  $d \rightarrow \infty$  de la force semi-classique  $f(d)_{\mathcal{O}(\beta)}$  à l'ordre linéaire dans le potentiel d'interaction  $U(\mathcal{F}'_a, \mathcal{F}'_b)$  est donné par

$$f(d)_{\mathcal{O}(\beta)} = \frac{2\pi\beta}{d^3} \left( \int_{-\infty}^0 dq_{a_1} \int_{-\infty}^0 dy_{a_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\bar{y}_a y_{a_1} C_T^{s.i.}(q_{a_1}; y_{a_1} : |\bar{y}_a|) \right)^2 \hat{\mathbf{e}}_1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{d^4}\right), \quad (4.32)$$

avec  $\lim_{\hbar \rightarrow 0} f(d)_{\mathcal{O}(\beta)} = f(d)_{\mathcal{O}(\beta)}^{\text{classique}}$ .

Les notations utilisées sont

$$\mathcal{F}_a = (\alpha_a, \mathbf{q}_a, \boldsymbol{\xi}_a), \quad \mathcal{F}_b = (\alpha_b, \mathbf{q}_b, \boldsymbol{\xi}_b) \quad (4.33)$$

$$\mathcal{F}'_a = (\alpha'_a, \mathbf{y}_a, \boldsymbol{\chi}_a), \quad \mathcal{F}'_b = (\alpha'_b, \mathbf{y}_b, \boldsymbol{\chi}_b) \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} \hat{C}(\mathcal{F}_a) &= \sum_{\alpha_a=1}^S e_{\alpha_a} \hat{\rho}_{\alpha_a}(\mathcal{F}_a) \\ &= \sum_{\alpha_a=1}^S e_{\alpha_a} \sum_{i=1}^N \delta(\mathcal{F}_a, \mathcal{F}_i) \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\delta(\mathcal{F}_a, \mathcal{F}_i) = \delta_{\alpha_a, \alpha_i} \delta(\mathbf{q}_a - \mathbf{r}_i) \delta(\boldsymbol{\xi}_a - \boldsymbol{\mu}_i), \quad (4.36)$$

avec donc

$$(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b, \mathbf{y}_a, \mathbf{y}_b, \mathbf{r}_i) \equiv \text{origine des filaments} \quad (4.37)$$

$$(\boldsymbol{\xi}_a, \boldsymbol{\xi}_b, \boldsymbol{\chi}_a, \boldsymbol{\chi}_b, \boldsymbol{\mu}_i) \equiv \text{forme des filaments (variables d'intégration fonctionnelle)}. \quad (4.38)$$

La moyenne  $\langle \cdot \rangle_{s.i., T}$  est donc une intégration sur l'espace de phase  $(\alpha, \mathbf{r}, \boldsymbol{\mu})$  donnée par

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha_{a_1}=1}^S \sum_{\alpha_{b_1}=1}^S \int_{\Lambda_a^N} d^3\mathbf{r}_{a_1} \dots d^3\mathbf{r}_{a_N} \int_{\Lambda_b^N} d^3\mathbf{r}_{b_1} \dots d^3\mathbf{r}_{b_N} \\ &\quad \vdots \\ &\quad \alpha_{a_N}=1 \quad \alpha_{b_N}=1 \\ &\int_{\Lambda_a^N} D[\boldsymbol{\mu}_{a_1}(\cdot)] \dots D[\boldsymbol{\mu}_{a_N}(\cdot)] \int_{\Lambda_b^N} D[\boldsymbol{\mu}_{b_1}(\cdot)] \dots D[\boldsymbol{\mu}_{b_N}(\cdot)] z(\mathcal{F}_a) z(\mathcal{F}_b), \end{aligned} \quad (4.39)$$

avec  $(\boldsymbol{\mu}_1, \dots, \boldsymbol{\mu}_N, \boldsymbol{\mu}_{N+1}, \dots, \boldsymbol{\mu}_{2N}) \doteq (\boldsymbol{\mu}_{a1}, \dots, \boldsymbol{\mu}_{aN}, \boldsymbol{\mu}_{b1}, \dots, \boldsymbol{\mu}_{bN})$ ,  $\mu_a \doteq (\boldsymbol{\mu}_{a1}, \dots, \boldsymbol{\mu}_{aN})$ ,  $\mu_b \doteq (\boldsymbol{\mu}_{b1}, \dots, \boldsymbol{\mu}_{bN})$ .

Il est clair que la force entre  $\Lambda_a$  et  $\Lambda_b$  est nulle à l'ordre zéro dans le potentiel d'interaction, car dans ce cas il n'existe pas d'interaction entre les systèmes. En effet, à cet ordre,  $C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b)_{\mathcal{O}(\beta^0)} = C_{\Lambda_a}(q_{a1})C_{\Lambda_b}(q_{b1})$ , et en remplaçant dans l'expression de la force (4.2) on trouve bien une contribution nulle par l'hypothèse 3 de neutralité macroscopique.

### 4.2.1 Expression des fonctions de corrélation

L'annexe A.14 fournit l'expression de la fonction de corrélation semi-classique à un ordre quelconque dans le potentiel d'interaction  $U(\mathcal{F}'_a, \mathcal{F}'_b)$ . Néanmoins, pour des raisons pédagogiques, on décide à nouveau de faire la même mise en évidence  $f(d) = f_{cc}(d) + f_T(d)$  que dans le cas classique. Les fonctions de corrélation  $C(\mathbf{q}_a)_{\mathcal{O}(\beta)}C(\mathbf{q}_b)_{\mathcal{O}(\beta)}$  et  $C_T(\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b)_{\mathcal{O}(\beta)}$  s'obtiennent de façon similaire, leurs expressions étant identiques à la différence des intégrations supplémentaire sur la forme des filaments  $\boldsymbol{\xi}_a$  et  $\boldsymbol{\xi}_b$ , ainsi que sur  $\boldsymbol{\chi}_a$  et  $\boldsymbol{\chi}_b$  chaque fois que dans les expressions classiques apparaissent une intégrale sur  $\mathbf{y}_a$  et  $\mathbf{y}_b$  respectivement. Finalement, on ne peut pas factoriser certains termes qui forment les densités de charge  $C_{\Lambda_a}(\mathbf{y}_a)$ ,  $C_{\Lambda_b}(\mathbf{y}_b)$ ,  $C_{\Lambda_a}(\mathbf{q}_a, \mathbf{y}_a)$  et  $C_{\Lambda_b}(\mathbf{q}_b, \mathbf{y}_b)$  à cause de la dépendance en  $\alpha'_a$  et  $\alpha'_b$  du potentiel d'interaction  $V_{\alpha'_a \alpha'_b}(\mathcal{F}'_a, \mathcal{F}'_b)$ . Ces considérations permettent directement d'obtenir de (3.15) et (3.16) les relations cherchées.

$$\begin{aligned}
C(\mathbf{q}_a)C(\mathbf{q}_b) = & C_{\Lambda_a}(\mathbf{q}_a)C_{\Lambda_b}(\mathbf{q}_b) \\
& + 2\beta C_{\Lambda_a}(\mathbf{q}_a)C_{\Lambda_b}(\mathbf{q}_b) \int_{\Lambda_a} \mathcal{D}[\boldsymbol{\xi}_a(\cdot)] \int_{\Lambda_b} \mathcal{D}[\boldsymbol{\xi}_b(\cdot)] \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{y}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{y}_b \int_{\Lambda_a} \mathcal{D}[\boldsymbol{\chi}_a(\cdot)] \\
& \int_{\Lambda_b} \mathcal{D}[\boldsymbol{\chi}_b(\cdot)] \sum_{\alpha'_a=1}^S \sum_{\alpha'_b=1}^S e_{\alpha'_a} e_{\alpha'_b} \rho_{\alpha'_a}^{\Lambda_a}(\mathcal{F}'_a) \rho_{\alpha'_b}^{\Lambda_b}(\mathcal{F}'_b) V_{\alpha'_a \alpha'_b}(\mathcal{F}'_a, \mathcal{F}'_b) \\
& - \beta C_{\Lambda_a}(\mathbf{q}_a) \int_{\Lambda_a} \mathcal{D}[\boldsymbol{\xi}_a(\cdot)] \int_{\Lambda_b} \mathcal{D}[\boldsymbol{\xi}_b(\cdot)] \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{y}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{y}_b \int_{\Lambda_a} \mathcal{D}[\boldsymbol{\chi}_a(\cdot)] \int_{\Lambda_b} \mathcal{D}[\boldsymbol{\chi}_b(\cdot)] \\
& \sum_{\alpha'_a=1}^S \sum_{\alpha'_b=1}^S e_{\alpha'_a} e_{\alpha'_b} e_{\alpha'_a} e_{\alpha'_b} \rho_{\alpha'_a}^{\Lambda_a}(\mathcal{F}'_a) \rho_{\alpha'_b}^{\Lambda_b}(\mathcal{F}'_b) V_{\alpha'_a \alpha'_b}(\mathcal{F}'_a, \mathcal{F}'_b) \\
& - \beta C_{\Lambda_b}(\mathbf{q}_b) \int_{\Lambda_a} \mathcal{D}[\boldsymbol{\xi}_a(\cdot)] \int_{\Lambda_b} \mathcal{D}[\boldsymbol{\xi}_b(\cdot)] \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{y}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{y}_b \int_{\Lambda_a} \mathcal{D}[\boldsymbol{\chi}_a(\cdot)] \int_{\Lambda_b} \mathcal{D}[\boldsymbol{\chi}_b(\cdot)] \\
& \sum_{\alpha'_a=1}^S \sum_{\alpha'_b=1}^S e_{\alpha'_a} e_{\alpha'_a} e_{\alpha'_b} e_{\alpha'_b} \rho_{\alpha'_a}^{\Lambda_a}(\mathcal{F}'_a, \mathcal{F}'_a) \rho_{\alpha'_b}^{\Lambda_b}(\mathcal{F}'_b) V_{\alpha'_a \alpha'_b}(\mathcal{F}'_a, \mathcal{F}'_b) \\
& + \mathcal{O}(\beta^2)
\end{aligned} \tag{4.40}$$

$$\begin{aligned}
C_T(\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b) = & -\beta \int_{\Lambda_a} \mathcal{D}[\boldsymbol{\xi}_a(\cdot)] \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{y}_a \int_{\Lambda_a} \mathcal{D}[\boldsymbol{\chi}_a(\cdot)] \sum_{\alpha'_a=1}^S e_{\alpha'_a} e_{\alpha'_a} \rho_{\alpha'_a}^{\Lambda_a}; T(\mathcal{F}'_a, \mathcal{F}'_a) \\
& \int_{\Lambda_b} \mathcal{D}[\boldsymbol{\xi}_b(\cdot)] \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{y}_b \int_{\Lambda_b} \mathcal{D}[\boldsymbol{\chi}_b(\cdot)] \sum_{\alpha'_b=1}^S e_{\alpha'_b} e_{\alpha'_b} \rho_{\alpha'_b}^{\Lambda_b}; T(\mathcal{F}'_b, \mathcal{F}'_b) \\
& V_{\alpha'_a \alpha'_b}(\mathcal{F}'_a, \mathcal{F}'_b) \\
& + \mathcal{O}(\beta^2)
\end{aligned} \tag{4.41}$$

### 4.2.2 Expression de la force par unité de surface $f(d)$

Nous avons

$$f(d) = f_{cc}(d) + f_T(d) \quad (4.42)$$

$$f_{cc}(d) \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{q}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{q}_b \mathbf{F}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b) C(\mathbf{q}_a) C(\mathbf{q}_b) \quad (4.43)$$

$$f_T(d) \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{q}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{q}_b \mathbf{F}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b) C_T(\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b) \quad (4.44)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b) = \frac{q_{a1} - q_{b1}}{|\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b|^3}. \quad (4.45)$$

**Lemme 4.1** À l'ordre linéaire en  $U(\mathcal{F}'_a, \mathcal{F}'_b)$ , la contribution semi-classique de  $f_{cc}(d)_{\mathcal{O}(\beta^1)}$  est nulle.

**Preuve.** À nouveau, ce lemme est une conséquence directe de l'électronéutralité, mais nous désirons réaliser la vérification explicite. La preuve est similaire à celle du cas classique. En insérant (4.40) dans (4.43), on obtient

$$\begin{aligned} f_{cc}(d) = & \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{q}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{q}_b \mathbf{F}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b) C_{\Lambda_a}(\mathbf{q}_a) C_{\Lambda_b}(\mathbf{q}_b) \\ & + 2\beta \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{q}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{q}_b \mathbf{F}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b) C_{\Lambda_a}(\mathbf{q}_a) C_{\Lambda_b}(\mathbf{q}_b) \\ & \int_{\Lambda_a} D[\xi_a(\cdot)] \int_{\Lambda_b} D[\xi_b(\cdot)] \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{y}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{y}_b \int_{\Lambda_a} D[\chi_a(\cdot)] \int_{\Lambda_b} D[\chi_b(\cdot)] \\ & \sum_{\alpha'_a=1}^S \sum_{\alpha'_b=1}^S e_{\alpha'_a} e_{\alpha'_b} \rho_{\alpha'_a}^{\Lambda_a}(\mathcal{F}'_a) \rho_{\alpha'_b}^{\Lambda_b}(\mathcal{F}'_b) V_{\alpha'_a \alpha'_b}(\mathcal{F}'_a, \mathcal{F}'_b) \\ & - \beta \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{q}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{q}_b \mathbf{F}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b) C_{\Lambda_a}(\mathbf{q}_a) \\ & \int_{\Lambda_a} D[\xi_a(\cdot)] \int_{\Lambda_b} D[\xi_b(\cdot)] \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{y}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{y}_b \int_{\Lambda_a} D[\chi_a(\cdot)] \int_{\Lambda_b} D[\chi_b(\cdot)] \\ & \sum_{\alpha'_a=1}^S \sum_{\alpha'_b=1}^S e_{\alpha'_a} e_{\alpha'_b} e_{\alpha'_a} \rho_{\alpha'_a}^{\Lambda_a}(\mathcal{F}'_a) \rho_{\alpha'_b}^{\Lambda_b}(\mathcal{F}'_b) V_{\alpha'_a \alpha'_b}(\mathcal{F}'_a, \mathcal{F}'_b) \\ & - \beta \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{q}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{q}_b \mathbf{F}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b) C_{\Lambda_b}(\mathbf{q}_b) \\ & \int_{\Lambda_a} D[\xi_a(\cdot)] \int_{\Lambda_b} D[\xi_b(\cdot)] \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{y}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{y}_b \int_{\Lambda_a} D[\chi_a(\cdot)] \int_{\Lambda_b} D[\chi_b(\cdot)] \\ & \sum_{\alpha'_a=1}^S \sum_{\alpha'_b=1}^S e_{\alpha'_a} e_{\alpha'_b} e_{\alpha'_b} \rho_{\alpha'_a}^{\Lambda_a}(\mathcal{F}'_a, \mathcal{F}'_a) \rho_{\alpha'_b}^{\Lambda_b}(\mathcal{F}'_b) V_{\alpha'_a \alpha'_b}(\mathcal{F}'_a, \mathcal{F}'_b) \\ & + \mathcal{O}(\beta^2). \end{aligned} \quad (4.46)$$

On voit que tous les termes de l'expression précédente montrent une dépendance dans les variables  $\mathbf{q}_a$  et  $\mathbf{q}_b$  similaire à celle de l'expression obtenue lors de la preuve du cas classique (3.17) de la page 25. Ainsi, il suffit de reprendre les arguments de la preuve classique et de les appliquer à notre cas pour achever la démonstration.  $\blacksquare$

Grâce au lemme précédent, l'expression de la force à l'ordre linéaire est

$$\begin{aligned}
 f(d)_{\mathcal{O}(\beta)} &= f_T(d)_{\mathcal{O}(\beta)} \\
 &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{-\infty}^0 dq_{a_1} \int_d^\infty dq_{b_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_a \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_b \mathbf{F}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b) C_T(\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b)_{\mathcal{O}(\beta)} \\
 &= -\beta \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{-\infty}^0 dq_{a_1} \int_d^\infty dq_{b_1} \int_{-\infty}^0 dy_{a_1} \int_d^\infty dy_{b_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_a \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_b \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{y}}_a \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{y}}_b \\
 &\quad \int_0^1 ds \int_{\Lambda_a} D[\boldsymbol{\xi}_a(\cdot)] \int_{\Lambda_b} D[\boldsymbol{\xi}_b(\cdot)] \int_{\Lambda_a} D[\boldsymbol{\chi}_a(\cdot)] \int_{\Lambda_b} D[\boldsymbol{\chi}_b(\cdot)] \\
 &\quad \sum_{\substack{\alpha_a=1 \\ \alpha'_a=1}}^S \sum_{\substack{\alpha_b=1 \\ \alpha'_b=1}}^S e_{\alpha_a} e_{\alpha'_a} e_{\alpha_b} e_{\alpha'_b} V\left(|y_{a_1} - y_{b_1} + \lambda_{\alpha'_a} \chi_{a_1}(\cdot) - \lambda_{\alpha'_b} \chi_{b_1}(\cdot)|, |\bar{\mathbf{y}}_a - \bar{\mathbf{y}}_b + \lambda_{\alpha'_a} \boldsymbol{\chi}_a(\cdot) - \lambda_{\alpha'_b} \boldsymbol{\chi}_b(\cdot)|\right) \\
 &\quad \rho_{\alpha_a \alpha'_a; T}^{\Lambda_a}\left(q_{a_1}, \lambda_{\alpha_a} \boldsymbol{\xi}_a(\cdot); y_{a_1}, \lambda_{\alpha'_a} \boldsymbol{\chi}_a(\cdot); |\bar{\mathbf{q}}_a - \bar{\mathbf{y}}_a|\right) \rho_{\alpha_b \alpha'_b; T}^{\Lambda_b}\left(q_{b_1}, \lambda_{\alpha_b} \boldsymbol{\xi}_b(\cdot); y_{b_1}, \lambda_{\alpha'_b} \boldsymbol{\chi}_b(\cdot); |\bar{\mathbf{q}}_b - \bar{\mathbf{y}}_b|\right) \\
 &\quad \mathbf{F}(q_{a_1} - q_{b_1}, |\bar{\mathbf{q}}_a - \bar{\mathbf{q}}_b|). \tag{4.47}
 \end{aligned}$$

Les arguments des fonctions de corrélation tronquées de densité de particules méritent un commentaire. Dans le cas classique, grâce à l'invariance par translation dans le plan transverse engendré par  $\hat{e}_2$  et  $\hat{e}_3$ , les arguments de la fonction de corrélation sont  $(q_{a_1}; y_{a_1} : |\bar{\mathbf{q}}_a - \bar{\mathbf{y}}_a|)$ . Dans le cas semi-classique, il n'est pas correct de dire, par simple analogie, que les arguments de la fonction de corrélation tronquée sont  $(q_{a_1}, \xi_{a_1}(\cdot); y_{a_1}, \chi_{a_1}(\cdot) : |\bar{\mathbf{q}}_a - \bar{\mathbf{y}}_a|, |\bar{\boldsymbol{\xi}}_a - \bar{\boldsymbol{\chi}}_a|)$ . En effet, les filaments représentent une propriété intrinsèque de la particule (ses fluctuations quantiques, qui sont un degré de liberté *interne*, comme l'est par exemple le spin), propriété indépendante des symétries spatiales du problème.

Soit les changements de variables (dans l'ordre)

1.  $\bar{\mathbf{q}}_a \doteq \bar{\mathbf{q}}_a + \bar{\mathbf{y}}_a$   
 $\bar{\mathbf{q}}_b \doteq \bar{\mathbf{q}}_b + \bar{\mathbf{y}}_b$
2.  $\bar{\mathbf{y}}_a \doteq \bar{\mathbf{y}}_a + \bar{\mathbf{y}}_b$ ,

alors conformément à l'hypothèse 8, le facteur  $L^{-2}$  se simplifie lors de l'intégration sur  $\bar{\mathbf{y}}_b$ , et

$$\begin{aligned}
 f(d)_{\mathcal{O}(\beta)} &= \\
 &= -\beta \int_{-\infty}^0 dq_{a_1} \int_d^\infty dq_{b_1} \int_{-\infty}^0 dy_{a_1} \int_d^\infty dy_{b_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_a \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_b \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{y}}_a \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{y}}_b \\
 &\quad \int_0^1 ds \int_{\Lambda_a} D[\boldsymbol{\xi}_a(\cdot)] \int_{\Lambda_b} D[\boldsymbol{\xi}_b(\cdot)] \int_{\Lambda_a} D[\boldsymbol{\chi}_a(\cdot)] \int_{\Lambda_b} D[\boldsymbol{\chi}_b(\cdot)] \\
 &\quad \sum_{\substack{\alpha_a=1 \\ \alpha'_a=1}}^S \sum_{\substack{\alpha_b=1 \\ \alpha'_b=1}}^S e_{\alpha_a} e_{\alpha'_a} e_{\alpha_b} e_{\alpha'_b} V\left(|y_{a_1} - y_{b_1} + \lambda_{\alpha'_a} \chi_{a_1}(\cdot) - \lambda_{\alpha'_b} \chi_{b_1}(\cdot)|, |\bar{\mathbf{y}}_a + \lambda_{\alpha'_a} \boldsymbol{\chi}_a(\cdot) - \lambda_{\alpha'_b} \boldsymbol{\chi}_b(\cdot)|\right) \\
 &\quad \rho_{\alpha_a \alpha'_a; T}^{\Lambda_a}\left(q_{a_1}, \lambda_{\alpha_a} \boldsymbol{\xi}_a(\cdot); y_{a_1}, \lambda_{\alpha'_a} \boldsymbol{\chi}_a(\cdot); |\bar{\mathbf{q}}_a|\right) \rho_{\alpha_b \alpha'_b; T}^{\Lambda_b}\left(q_{b_1}, \lambda_{\alpha_b} \boldsymbol{\xi}_b(\cdot); y_{b_1}, \lambda_{\alpha'_b} \boldsymbol{\chi}_b(\cdot); |\bar{\mathbf{q}}_b|\right) \\
 &\quad \mathbf{F}(q_{a_1} - q_{b_1}, |\bar{\mathbf{q}}_a - \bar{\mathbf{q}}_b + \bar{\mathbf{y}}_a|). \tag{4.48}
 \end{aligned}$$

Soit le changement de variables

$$\begin{aligned}
 q_{b_1} &\doteq d - q_{b_1} \\
 y_{b_1} &\doteq d - y_{b_1}. \tag{4.49}
 \end{aligned}$$

Quel est l'effet de ce dernier changement de variables sur la contrainte de localisation spatiale du degré de liberté interne qu'est le filament? En appliquant simplement le même changement de variables  $q_{b_1} \doteq d - q_{b_1}$  sur le domaine de contrainte spatiale du filament, le nouveau domaine  $\Lambda'_b(\mathbf{q}_b)$  ainsi obtenu est complexe, dans le sens où il dépend de la position de chaque particule initialement dans

$\Lambda_b$ . Soit  $\mathbf{q}_b$  la position de la particule avant le changement de variables, alors

$$\Lambda'_b(\mathbf{q}_b) = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \in [-2(q_{b_1} - d), \infty[, (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2]\}. \quad (4.50)$$

Néanmoins, pour établir (4.50), on a supposé que l'opération d'inversion spatiale n'a aucune incidence sur le degré de liberté interne, ce qui n'est pas correct. En effet, l'inversion s'applique aussi sur les filaments (voir la figure 4.2), et par conséquent

$$\Lambda'_b(\mathbf{q}_b, \xi_{b_1} \doteq -\xi_{b_1}) = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \in ]-\infty, 0], (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2\} = \Lambda_a. \quad (4.51)$$

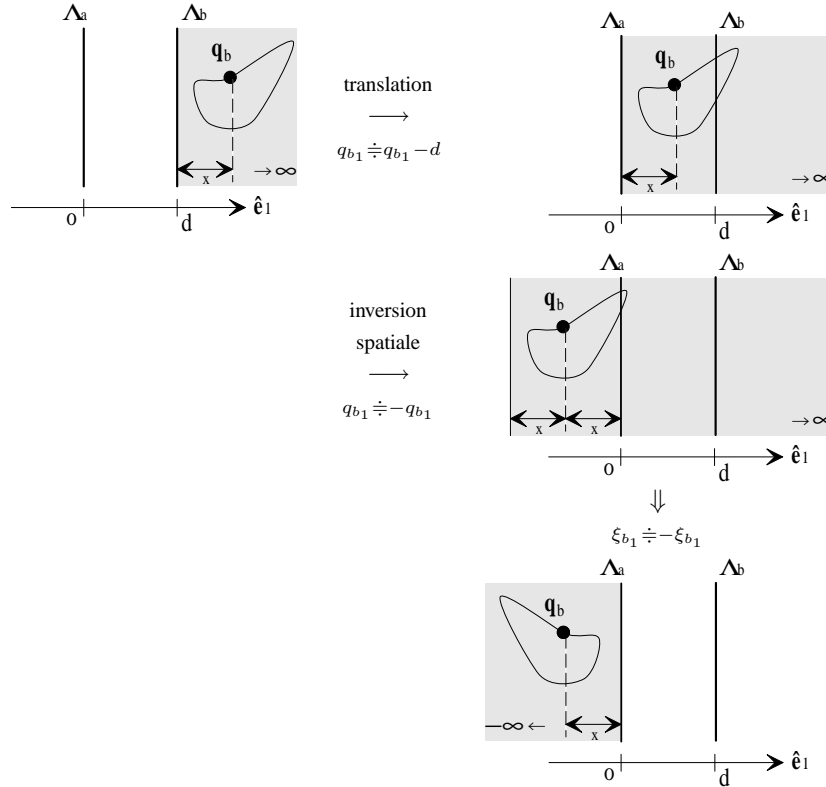


FIG. 4.2 – Effet de l'inversion d'espace sur les filaments

La zone de couleur plus sombre représente la contrainte de localisation spatiale d'un filament issu de  $\Lambda_b$ . Étant donné que les filaments représentent un degré de liberté interne, les translations ne modifient pas la forme des filaments. Par contre, si  $\hat{\mathbf{I}}$  est l'opérateur vectoriel d'inversion d'espace, alors  $\hat{\mathbf{I}}^{-1}\boldsymbol{\xi}(\cdot)\hat{\mathbf{I}} = -\boldsymbol{\xi}(\cdot)$ , et pour l'inversion dans la direction  $\hat{\mathbf{e}}_i$  on a  $\hat{I}_i^{-1}\boldsymbol{\xi}(\cdot)\hat{I}_i = \sum_{j=1}^3 (-1)^{\delta_{i,j}} \xi_j(\cdot)\hat{\mathbf{e}}_j$ .

Soit  $G(q_{b_1}, \xi_{b_1}, \psi)$  une fonction quelconque de  $q_{b_1}$ ,  $\xi_{b_1}$ , et d'autres variables  $\psi$  invariantes sous le changement de variables envisagé, alors étant donné que la mesure de Wiener est invariante sous le changement de variables  $\boldsymbol{\xi} \doteq -\boldsymbol{\xi}$ , la formalisation des idées précédentes donne

$$\int_{\Lambda_b} d^3\mathbf{q}_b \int_{\Lambda_b} D[\boldsymbol{\xi}_b(\cdot)] G(q_{b_1}, \xi_{b_1}, \psi) = \int_{\Lambda_a} d^3\mathbf{q}_b \int_{\Lambda_a} D[\boldsymbol{\xi}_b(\cdot)] G(d - q_{b_1}, -\xi_{b_1}, \psi). \quad (4.52)$$

Il faut cependant toujours interpréter les domaines d'intégration des intégrales fonctionnelles de façon symbolique. En effet, étant donné que les filaments représentent un degré de liberté interne, alors les domaines  $\Lambda_b - d$  et  $\Lambda'_b(\mathbf{q}_b)$  sont exactement les mêmes dans le sens où ils doivent être interprétés relativement à la localisation de la particule, et non par rapport au choix du repère.<sup>1</sup>

1. On remarque que la pertinence du changement de variables  $\xi_{b_1} \doteq -\xi_{b_1}$  sur le degré de liberté interne est confirmée par (4.53). En effet, en posant  $\mathbf{y}_a = \mathbf{y}_b = \boldsymbol{\chi}_a = \boldsymbol{\chi}_b = 0$ , on obtient  $V(|d|, 0)$ , ce qui correspond bien à la distance minimale



Soit  $\Omega = ]-\infty, 0]$ , alors en utilisant le fait que les corrélations à n'importe quel ordre sont in-variantes sous un changement de variables de l'ensemble des arguments (voir (3.29)), et en notant  $\rho_{\alpha_a \alpha'_a; T}^{s.i.}(\dots)$  la fonction de corrélation tronquée de densité de particules dans le système de référence  $\Lambda_a$  sans influence, on obtient

$$\begin{aligned}
 f(d)_{\mathcal{O}(\beta)} = & -\beta \int_{\Omega^4} dq_{a_1} dq_{b_1} dy_{a_1} dy_{b_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_a \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_b \\
 & \int_0^1 ds \int_{\Lambda_a^4} D[\xi_a(\cdot)] D[\xi_b(\cdot)] D[\chi_a(\cdot)] D[\chi_b(\cdot)] \\
 & \sum_{\alpha'_a=1}^S \sum_{\alpha_b=1}^S e_{\alpha_a} e_{\alpha'_a} e_{\alpha_b} e_{\alpha'_b} \rho_{\alpha_a \alpha'_a; T}^{s.i.}(q_{a_1}, \lambda_{\alpha_a} \xi_a(\cdot); y_{a_1}, \lambda_{\alpha'_a} \chi_a(\cdot) : |\bar{\mathbf{q}}_a|) \\
 & \rho_{\alpha_b \alpha'_b; T}^{s.i.}(q_{b_1}, \lambda_{\alpha_b} \xi_b(\cdot); y_{b_1}, \lambda_{\alpha'_b} \chi_b(\cdot) : |\bar{\mathbf{q}}_b|) \\
 & \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{y}}_a V(|y_{a_1} + y_{b_1} + \lambda_{\alpha'_a} \chi_{a_1}(\cdot) + \lambda_{\alpha'_b} \chi_{b_1}(\cdot)|, |\bar{\mathbf{y}}_a + \lambda_{\alpha'_a} \chi_a(\cdot) - \lambda_{\alpha'_b} \chi_b(\cdot)|) \\
 & \mathbf{F}(q_{a_1} + q_{b_1}, |\bar{\mathbf{q}}_a - \bar{\mathbf{q}}_b + \bar{\mathbf{y}}_a|).
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

L'annexe A.15 consiste à démontrer un lemme qui affirme que dans la limite  $\hbar \rightarrow 0$ , c'est-à-dire lorsque les particules ne fluctuent pas et sont localisées en un point donné de l'espace, la force  $f(d)$  semi-classique donne le résultat classique obtenu au chapitre 3.

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} f(d)_{\mathcal{O}(\beta)} = f(d)_{\mathcal{O}(\beta)}^{\text{classique}} \tag{4.54}$$

Ce lemme très intuitif est important car il permet de vérifier l'exactitude des calculs à toutes les étapes, en comparant les résultats obtenus dans la limite  $\hbar \rightarrow 0$  avec les expressions classiques.

### 4.2.3 Développement asymptotique $d \rightarrow \infty$

Pour alléger l'expression de  $f(d)_{\mathcal{O}(\beta)}$ , adoptons les notations suivantes.

$$\int dz_1 \doteq \int_{\Omega^4} dq_{a_1} dq_{b_1} dy_{a_1} dy_{b_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_a \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_b \tag{4.55}$$

$$\int d\chi_1 \doteq \int_0^1 ds \int_{\Lambda_a^4} D[\xi_a(\cdot)] D[\xi_b(\cdot)] D[\chi_a(\cdot)] D[\chi_b(\cdot)] \tag{4.56}$$

$$z_1 \doteq (q_{a_1}, q_{b_1}, y_{a_1}, y_{b_1}, \bar{\mathbf{q}}_a, \bar{\mathbf{q}}_b) \tag{4.57}$$

$$\chi_1 \doteq (\xi_a(\cdot), \xi_b(\cdot), \chi_a(\cdot), \chi_b(\cdot)) \tag{4.58}$$

$$\varphi_1(z_1, \chi_1) \doteq -\beta \sum_{\substack{\alpha_a=1 \\ \alpha'_a=1}}^S \sum_{\substack{\alpha_b=1 \\ \alpha'_b=1}}^S e_{\alpha_a} e_{\alpha'_a} e_{\alpha_b} e_{\alpha'_b} \rho_{\alpha_a \alpha'_a; T}^{s.i.}(q_{a_1}, \lambda_{\alpha_a} \xi_a(\cdot); y_{a_1}, \lambda_{\alpha'_a} \chi_a(\cdot) : |\bar{\mathbf{q}}_a|) \\
 \rho_{\alpha_b \alpha'_b; T}^{s.i.}(q_{b_1}, \lambda_{\alpha_b} \xi_b(\cdot); y_{b_1}, \lambda_{\alpha'_b} \chi_b(\cdot) : |\bar{\mathbf{q}}_b|) \tag{4.59}$$

$$g_1(d, z_1, \chi_1) \doteq \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{y}}_a \mathbf{F}(q_{a_1} + q_{b_1}, |\bar{\mathbf{q}}_a - \bar{\mathbf{q}}_b + \bar{\mathbf{y}}_a|) \\
 V(|y_{a_1} + y_{b_1} + \lambda_{\alpha'_a} \chi_{a_1}(\cdot) + \lambda_{\alpha'_b} \chi_{b_1}(\cdot)|, |\bar{\mathbf{y}}_a + \lambda_{\alpha'_a} \chi_a(\cdot) - \lambda_{\alpha'_b} \chi_b(\cdot)|) \tag{4.60}$$

Soit  $\varphi_1^c(z_1)$  et  $g_1^c(d, z_1)$  les fonctions classiques définies dans la section 3.2.3, alors dans ces nouvelles notations, la limite  $\hbar \rightarrow 0$  s'énonce

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \int d\chi_1 \varphi_1(z_1, \chi_1) = \varphi_1^c(z_1) \tag{4.61}$$

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} g_1(d, z_1, \chi_1) = g_1^c(d, z_1). \tag{4.62}$$

d'interaction autorisée par notre modèle. Par contre, sans inversion spatiale des filaments apparaissent des divergences du potentiel de Coulomb.

L'expression de la force  $f(d)_{\mathcal{O}(\beta)}$  devient

$$f(d)_{\mathcal{O}(\beta)} = \int dz_1 \int d\chi_1 \varphi_1(z_1, \chi_1) g_1(d, z_1, \chi_1) \quad (4.63)$$

$$g_1(d, z_1, \chi_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{d^k} g_{1,k}(z_1, \chi_1) \quad (4.64)$$

$$\Rightarrow f(d)_{\mathcal{O}(\beta)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{d^k} \underbrace{\int dz_1 \int d\chi_1 \varphi_1(z_1, \chi_1) g_{1,k}(z_1, \chi_1)}_{\doteq f_{1,k}}. \quad (4.65)$$

Il faut bien réaliser qu'à la différence du cas classique,  $\varphi_1(z_1, \chi_1)$  est un opérateur qui agit sur  $g_{1,k}(z_1, \chi_1)$  par sommation sur  $\alpha_a, \alpha'_a, \alpha_b, \alpha'_b$ . Uniquement dans le cas de particules de même masses  $m_{\alpha_{a_i}} = m_{\alpha_{b_j}} \doteq m \forall ij$ ,  $\varphi_1(z_1, \chi_1)$  devient un multiple de l'identité, car les longueurs d'ondes thermiques de de Broglie  $\lambda_\alpha$  sont alors toutes égales. En effet, on a dans ce cas particulier  $\varphi_1(z_1, \chi_1) = -\beta C_T^{s.i.}(q_{a_1}, \lambda \xi_a(\cdot); y_{a_1}, \lambda \chi_a(\cdot) : |\bar{\mathbf{q}}_a|) C_T^{s.i.}(q_{b_1}, \lambda \xi_b(\cdot); y_{b_1}, \lambda \chi_b(\cdot) : |\bar{\mathbf{q}}_b|)$ . Les problèmes de convergence sont absents car les variables sont intégrées par rapport à la mesure de Wiener du pont brownien, qui est une mesure gaussienne faisant converger n'importe quelle puissance des variables semi-classiques. Le choix des petits paramètres est guidé par le but qui consiste à mettre en évidence l'origine classique ou semi-classique des différentes contributions.

$$\begin{aligned} \mu &\doteq \frac{q_{a_1} + q_{b_1}}{d} & \nu_\lambda &\doteq \frac{\lambda_{\alpha'_a} \chi_{a_1}(\cdot) + \lambda_{\alpha'_b} \chi_{b_1}(\cdot)}{d} \\ \nu &\doteq \frac{y_{a_1} + y_{b_1}}{d} & \gamma_\lambda &\doteq \frac{\lambda_{\alpha'_a} \chi_{a_2}(\cdot) + \lambda_{\alpha'_b} \chi_{b_2}(\cdot)}{d} \\ \alpha &\doteq \frac{q_{a_2} - q_{b_2}}{d} & \delta_\lambda &\doteq \frac{\lambda_{\alpha'_a} \chi_{a_3}(\cdot) + \lambda_{\alpha'_b} \chi_{b_3}(\cdot)}{d} \\ \beta &\doteq \frac{q_{a_3} - q_{b_3}}{d} \end{aligned} \quad (4.66)$$

On a bien entendu  $\lim_{\hbar \rightarrow 0} \nu_\lambda = \lim_{\hbar \rightarrow 0} \gamma_\lambda = \lim_{\hbar \rightarrow 0} \delta_\lambda = 0$ . Les petits paramètres sur  $\chi(\cdot)$  se comprennent dans le sens où les fluctuations quantiques sont faibles par rapport à la grandeur macroscopique  $d$ , ou bien de façon mathématique la mesure étant de Wiener, elle décroît de façon exponentielle lorsque  $|\chi(\cdot)|$  augmente. Soit  $\tilde{\mu} = \mu d, \tilde{\nu} = \nu d, \tilde{\alpha} = \alpha d, \tilde{\beta} = \beta d, \tilde{\nu}_\lambda = \nu_\lambda d, \tilde{\gamma}_\lambda = \gamma_\lambda d, \tilde{\delta}_\lambda = \delta_\lambda d$ , alors après quelques calculs il vient

$$\begin{aligned} g_{1,1}(z_1, \chi_1) &= -\pi \hat{\mathbf{e}}_1 \\ g_{1,2}(z_1, \chi_1) &= g_{1,2}^c(z_1) + g_{1,2}^q(\chi_1) \\ g_{1,3}(z_1, \chi_1) &= g_{1,3}^{cc}(z_1) + g_{1,3}^{qq}(\chi_1) + g_{1,3}^{cq}(z_1, \chi_1) \end{aligned} \quad (4.67)$$

$$\begin{aligned} g_{1,2}^c(z_1) &= -\frac{\pi}{2} (\tilde{\mu} + \tilde{\nu}) \hat{\mathbf{e}}_1 \\ g_{1,2}^q(\chi_1) &= -\frac{\pi}{2} \tilde{\nu}_\lambda \hat{\mathbf{e}}_1 \\ g_{1,3}^{cc}(z_1) &= \frac{\pi}{8} (\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2) \hat{\mathbf{e}}_1 - \frac{\pi}{4} (\tilde{\mu} + \tilde{\nu})^2 \hat{\mathbf{e}}_1 \\ g_{1,3}^{qq}(\chi_1) &= \frac{\pi}{8} (\tilde{\gamma}_\lambda^2 + \tilde{\delta}_\lambda^2 - 2\tilde{\nu}_\lambda^2) \hat{\mathbf{e}}_1 \\ g_{1,3}^{cq}(z_1, \chi_1) &= -\frac{\pi}{4} (\tilde{\alpha} \tilde{\gamma}_\lambda + \tilde{\beta} \tilde{\delta}_\lambda + 2\tilde{\nu} \tilde{\nu}_\lambda + 2\tilde{\mu} \tilde{\nu}_\lambda) \hat{\mathbf{e}}_1. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Dans les expressions précédentes, on a choisi de séparer les moments  $\tilde{\mu}, \tilde{\nu}, \tilde{\alpha}$  et  $\tilde{\beta}$  issus de variables classiques des moments  $\tilde{\nu}_\lambda, \tilde{\gamma}_\lambda$  et  $\tilde{\delta}_\lambda$  issus de variables quantiques, d'où les notations pour les fonctions  $g_{1,k}^{c,q}(\dots)$ . Plus précisément,  $g_{1,3}^{cq}(z_1, \chi_1)$  représente la contribution à  $g_{1,3}(z_1, \chi_1)$  formée d'une somme de produits entre une variable d'origine classique et l'autre d'origine quantique. Ces termes représentent l'interaction entre un dipôle classique dû à l'effet des parois, et un dipôle quantique dû aux fluctuations. En effet, la force est obtenue par intégration sur les  $g_{1,k}(\dots)$  avec comme

pois la fonction de corrélation tronquée de charge, et par conséquent on obtient des moments de densité de charge, c'est-à-dire des multipôles. On a bien entendu  $\lim_{\hbar \rightarrow 0} g_{1,k}^{q\cdots}(\cdots) = 0$ , ce qui permet d'obtenir les expressions établies dans la section 3.2.3.

#### 4.2.4 Calcul de la force par unité de surface en puissances de $d^{-1}$

Connaissant les  $g_{1,k}(z_1, \chi_1)$ ,  $k = 0, \dots, 3$ , la procédure de calcul de la force aux ordres  $d^{-k}$  est bien définie grâce à (4.65). Ainsi

$$f_{1,0} = 0 \quad (4.69)$$

$$\begin{aligned} f_{1,1} &= \int dz_1 \int d\chi_1 \varphi_1(z_1, \chi_1) g_{1,1}(z_1, \chi_1) \\ &= -\pi \int dz_1 \int d\chi_1 \varphi_1(z_1, \chi_1) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.70)$$

La nullité de la dernière relation est la conséquence de l'électronéutralité, toujours valable dans le cas semi-classique.

$$\begin{aligned} f_{1,2} &= \int dz_1 \int d\chi_1 \varphi_1(z_1, \chi_1) g_{1,2}(z_1, \chi_1) \\ &= \int dz_1 \underbrace{\int d\chi_1 \varphi_1(z_1, \chi_1) g_{1,2}^c(z_1)}_{=\varphi_1(z_1)} + \int dz_1 \int d\chi_1 \varphi_1(z_1, \chi_1) g_{1,2}^q(\chi_1) \end{aligned} \quad (4.71)$$

Il ne faut pas confondre  $\varphi_1(z_1) = \int d\chi_1 \varphi_1(z_1, \chi_1)$  avec l'expression classique  $\varphi_1^c(z_1)$ . En effet, il y a égalité seulement dans la limite  $\hbar \rightarrow 0$ . Remarquons que la règle d'électronéutralité  $\int_{\Omega} dq_{a_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\bar{\mathbf{q}}_a C_T^{\text{s.i.}}(q_{a_1}; y_{a_1} : |\bar{\mathbf{q}}_a|) = 0$  est toujours valable pour une fonction de corrélation tronquée de charge semi-classique. Néanmoins, il est nécessaire d'utiliser la règle d'électronéutralité plus générale suivante (voir l'annexe A.16 pour la démonstration)

$$\int_{\Omega} dq_{a_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\bar{\mathbf{q}}_a \int_{\Lambda_a} D[\xi_a(\cdot)] \sum_{\alpha_a=1}^S e_{\alpha_a} \rho_{\alpha_a \alpha'_a; T}^{\text{s.i.}}(q_{a_1}, \lambda_{\alpha_a} \xi_a; y_{a_1}, \lambda_{\alpha'_a} \chi_a : |\bar{\mathbf{q}}_a|) = 0. \quad (4.72)$$

Cette dernière relation mérite quelques commentaires, présentés à la fin de l'annexe A.16. En utilisant (4.72), on obtient

$$\begin{aligned} f_{1,2} &= \frac{\pi}{2} \beta \hat{e}_1 \int_{\Omega^4} dq_{a_1} dq_{b_1} dy_{a_1} dy_{b_1} \int_{\mathbb{R}^{2 \times 2}} d^2\bar{\mathbf{q}}_a d^2\bar{\mathbf{q}}_b \\ &\quad C_T^{\text{s.i.}}(q_{a_1}; y_{a_1} : |\bar{\mathbf{q}}_a|) C_T^{\text{s.i.}}(q_{b_1}; y_{b_1} : |\bar{\mathbf{q}}_b|) (q_{a_1} + q_{b_1} + y_{a_1} + y_{b_1}) \\ &\quad + \frac{\pi}{2} \beta \hat{e}_1 \int_{\Omega^4} dq_{a_1} dq_{b_1} dy_{a_1} dy_{b_1} \int_{\mathbb{R}^{2 \times 2}} d^2\bar{\mathbf{q}}_a d^2\bar{\mathbf{q}}_b \int_0^1 ds \int_{\Lambda_a^4} D[\xi_a(\cdot)] D[\xi_b(\cdot)] D[\chi_a(\cdot)] D[\chi_b(\cdot)] \\ &\quad \sum_{\substack{\alpha_a=1 \\ \alpha'_a=1}}^S \sum_{\substack{\alpha_b=1 \\ \alpha'_b=1}}^S e_{\alpha_a} e_{\alpha'_a} e_{\alpha_b} e_{\alpha'_b} \rho_{\alpha_a \alpha'_a; T}^{\text{s.i.}}(q_{a_1}, \lambda_{\alpha_a} \xi_a(\cdot); y_{a_1}, \lambda_{\alpha'_a} \chi_a(\cdot) : |\bar{\mathbf{q}}_a|) \\ &\quad \rho_{\alpha_b \alpha'_b; T}^{\text{s.i.}}(q_{b_1}, \lambda_{\alpha_b} \xi_b(\cdot); y_{b_1}, \lambda_{\alpha'_b} \chi_b(\cdot) : |\bar{\mathbf{q}}_b|) \\ &\quad (\lambda_{\alpha'_a} \xi_{a_1}(\cdot) + \lambda_{\alpha'_b} \xi_{b_1}(\cdot)) \end{aligned} \quad (4.73)$$

Le premier terme de  $f_{1,2}$  est nul car en appliquant l'opérateur  $\sum_{\alpha'_a=1}^S e_{\alpha'_a} D[\xi_b(\cdot)]$  sur (4.72) on retrouve la même relation d'électronéutralité que celle utilisée dans le cas classique, valable cette fois pour une fonction de corrélation tronquée de charge semi-classique. Ainsi, les mêmes mécanismes

que ceux expliqués lors du traitement classique entraînent la nullité de ce terme. Par conséquent

$$\begin{aligned}
 f_{1,2} &= \frac{\pi}{2} \beta \hat{\mathbf{e}}_1 \int_{\Omega^3} dq_{b_1} dy_{a_1} dy_{b_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_b \int_0^1 ds \int_{\Lambda_a^3} D[\boldsymbol{\xi}_b(\cdot)] D[\boldsymbol{\chi}_a(\cdot)] D[\boldsymbol{\chi}_b(\cdot)] \sum_{\alpha'_a=1}^S e_{\alpha'_a} \lambda_{\alpha'_a} \boldsymbol{\chi}_{a_1}(\cdot) \\
 &\quad \underbrace{\int_{\Omega} dq_{a_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_a \int_{\Lambda_a} D[\boldsymbol{\xi}_a(\cdot)] \sum_{\alpha_a=1}^S e_{\alpha_a} \rho_{\alpha_a \alpha'_a; T}^{\text{s.i.}}(q_{a_1}, \lambda_{\alpha_a} \boldsymbol{\xi}_a(\cdot); y_{a_1}, \lambda_{\alpha'_a} \boldsymbol{\chi}_a(\cdot) : |\bar{\mathbf{q}}_a|)}_{\stackrel{(4.72)}{=} 0 : \text{électronneutralité}} \\
 &\quad \sum_{\substack{\alpha_b=1 \\ \alpha'_b=1}}^S e_{\alpha_b} e_{\alpha'_b} \rho_{\alpha_b \alpha'_b; T}^{\text{s.i.}}(q_{b_1}, \lambda_{\alpha_b} \boldsymbol{\xi}_b(\cdot); y_{b_1}, \lambda_{\alpha'_b} \boldsymbol{\chi}_b(\cdot) : |\bar{\mathbf{q}}_b|) \\
 &+ \frac{\pi}{2} \beta \hat{\mathbf{e}}_1 \int_{\Omega^3} dq_{a_1} dy_{a_1} dy_{b_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_a \int_0^1 ds \int_{\Lambda_a^3} D[\boldsymbol{\xi}_a(\cdot)] D[\boldsymbol{\chi}_a(\cdot)] D[\boldsymbol{\chi}_b(\cdot)] \sum_{\alpha'_b=1}^S e_{\alpha'_b} \lambda_{\alpha'_b} \boldsymbol{\chi}_{b_1}(\cdot) \\
 &\quad \sum_{\substack{\alpha_a=1 \\ \alpha'_a=1}}^S e_{\alpha_a} e_{\alpha'_a} \rho_{\alpha_a \alpha'_a; T}^{\text{s.i.}}(q_{a_1}, \lambda_{\alpha_a} \boldsymbol{\xi}_a(\cdot); y_{a_1}, \lambda_{\alpha'_a} \boldsymbol{\chi}_a(\cdot) : |\bar{\mathbf{q}}_a|) \\
 &\quad \underbrace{\int_{\Omega} dq_{b_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_b \int_{\Lambda_b} D[\boldsymbol{\xi}_b(\cdot)] \sum_{\alpha_b=1}^S e_{\alpha_b} \rho_{\alpha_b \alpha'_b; T}^{\text{s.i.}}(q_{b_1}, \lambda_{\alpha_b} \boldsymbol{\xi}_b(\cdot); y_{b_1}, \lambda_{\alpha'_b} \boldsymbol{\chi}_b(\cdot) : |\bar{\mathbf{q}}_b|)}_{\stackrel{(4.72)}{=} 0 : \text{électronneutralité}} \\
 &= 0. \tag{4.74}
 \end{aligned}$$

Le calcul de  $f_{1,3}$  donne

$$\begin{aligned}
 f_{1,3} &= \int dz_1 \int d\chi_1 \varphi_1(z_1, \chi_1) g_{1,3}(z_1, \chi_1) \\
 &= \underbrace{\int dz_1 \int d\chi_1 \varphi_1(z_1, \chi_1) g_{1,3}^{cc}(z_1)}_{\doteq f_{1,3}^{cc}} + \underbrace{\int dz_1 \int d\chi_1 \varphi_1(z_1, \chi_1) g_{1,3}^{qq}(z_1)}_{\doteq f_{1,3}^{qq}} \\
 &\quad + \underbrace{\int dz_1 \int d\chi_1 \varphi_1(z_1, \chi_1) g_{1,3}^{cq}(z_1, \chi_1)}_{\doteq f_{1,3}^{cq}}, \tag{4.75}
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 f_{1,3}^{cc} &= \int dz_1 g_{1,3}^{cc}(z_1) \int d\chi_1 \varphi_1(z_1, \chi_1) \\
 &= -\beta \int dz_1 g_{1,3}^{cc}(z_1) C_T^{\text{s.i.}}(q_{a_1}; y_{a_1} : |\bar{\mathbf{q}}_a|) C_T^{\text{s.i.}}(q_{b_1}; y_{b_1} : |\bar{\mathbf{q}}_b|) \hat{\mathbf{e}}_1 \\
 &= -\beta \int dz_1 \left( -\frac{\pi}{4} (2 + 2 + 2 + 2) \right) y_{a_1} y_{b_1} C_T^{\text{s.i.}}(q_{a_1}; y_{a_1} : |\bar{\mathbf{q}}_a|) C_T^{\text{s.i.}}(q_{b_1}; y_{b_1} : |\bar{\mathbf{q}}_b|) \hat{\mathbf{e}}_1 \\
 &= 2\pi\beta \underbrace{\left( \int_{-\infty}^0 dq_{a_1} \int_{-\infty}^0 dy_{a_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{y}}_a y_{a_1} C_T^{\text{s.i.}}(q_{a_1}; y_{a_1} : |\bar{\mathbf{y}}_a|) \right)^2}_{\doteq \mathcal{P}} \hat{\mathbf{e}}_1. \tag{4.76}
 \end{aligned}$$

Pour établir l'expression précédente, on utilise exactement les mêmes arguments que dans le cas classique. On a bien entendu  $\lim_{\hbar \rightarrow 0} \mathcal{P} = \mathcal{P}^{\text{classique}} = -\frac{1}{4\pi\beta}$  (voir l'annexe A.15).

$$\begin{aligned}
 f_{1,3}^{qq} &= \int dz_1 \int d\chi_1 \varphi_1(z_1, \chi_1) g_{1,3}^{qq}(\chi_1) \\
 &= \int dz_1 \int d\chi_1 \varphi_1(z_1, \chi_1) \frac{\pi}{8} \left( \lambda_{\alpha'_a}^2 \chi_{a_2}(\cdot)^2 + \lambda_{\alpha'_b}^2 \chi_{b_2}(\cdot)^2 + 2\lambda_{\alpha'_a} \lambda_{\alpha'_b} \chi_{a_2}(\cdot) \chi_{b_2}(\cdot) \right. \\
 &\quad \left. + \lambda_{\alpha'_a}^2 \chi_{a_3}(\cdot)^2 + \lambda_{\alpha'_b}^2 \chi_{b_3}(\cdot)^2 + 2\lambda_{\alpha'_a} \lambda_{\alpha'_b} \chi_{a_3}(\cdot) \chi_{b_3}(\cdot) \right. \\
 &\quad \left. - 2\lambda_{\alpha'_a}^2 \chi_{a_1}(\cdot)^2 - 2\lambda_{\alpha'_b}^2 \chi_{b_1}(\cdot)^2 - 4\lambda_{\alpha'_a} \lambda_{\alpha'_b} \chi_{a_1}(\cdot) \chi_{b_1}(\cdot) \right) \hat{e}_1. \quad (4.77)
 \end{aligned}$$

En utilisant les mêmes arguments que dans le cas classique, les termes non croisés  $\chi_{a_i}(\cdot)^2$  et  $\chi_{b_i}(\cdot)^2$ ,  $i = 1, \dots, 3$ , donnent une contribution nulle par électroneutralité, ainsi (4.77) devient par arrangement judicieux de l'ordre des sommes et des intégrales

$$\begin{aligned}
 f_{1,3}^{qq} &= -\frac{\pi}{4} \beta \hat{e}_1 \int_{\Omega^2} dy_{a_1} dy_{b_1} \int_0^1 ds \int_{\Lambda_a^2} D[\chi_a(\cdot)] D[\chi_b(\cdot)] \sum_{n=2}^3 \sum_{\alpha'_a=1}^S e_{\alpha'_a} \lambda_{\alpha'_a} \chi_{a_n}(\cdot) \sum_{\alpha'_b=1}^S e_{\alpha'_b} \lambda_{\alpha'_b} \chi_{b_n}(\cdot) \\
 &\quad \underbrace{\int_{\Omega} dq_{a_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_a \int_{\Lambda_a} D[\xi_a(\cdot)] \sum_{\alpha_a=1}^S e_{\alpha_a} \rho_{\alpha_a \alpha'_a; T}^{\text{s.i.}}(q_{a_1}, \lambda_{\alpha_a} \xi_a(\cdot); y_{a_1}, \lambda_{\alpha'_a} \chi_a(\cdot) : |\bar{\mathbf{q}}_a|)}_{\stackrel{(4.72)}{=} 0 : \text{électroneutralité}} \\
 &\quad \underbrace{\int_{\Omega} dq_{b_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_b \int_{\Lambda_b} D[\xi_b(\cdot)] \sum_{\alpha_b=1}^S e_{\alpha_b} \rho_{\alpha_b \alpha'_b; T}^{\text{s.i.}}(q_{b_1}, \lambda_{\alpha_b} \xi_b(\cdot); y_{b_1}, \lambda_{\alpha'_b} \chi_b(\cdot) : |\bar{\mathbf{q}}_b|)}_{\stackrel{(4.72)}{=} 0 : \text{électroneutralité}} \\
 &+ \frac{\pi}{2} \beta \hat{e}_1 \int_{\Omega^2} dy_{a_1} dy_{b_1} \int_0^1 ds \int_{\Lambda_a^2} D[\chi_a(\cdot)] D[\chi_b(\cdot)] \sum_{\alpha'_a=1}^S e_{\alpha'_a} \lambda_{\alpha'_a} \chi_{a_1}(\cdot) \sum_{\alpha'_b=1}^S e_{\alpha'_b} \lambda_{\alpha'_b} \chi_{b_1}(\cdot) \\
 &\quad \underbrace{\int_{\Omega} dq_{a_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_a \int_{\Lambda_a} D[\xi_a(\cdot)] \sum_{\alpha_a=1}^S e_{\alpha_a} \rho_{\alpha_a \alpha'_a; T}^{\text{s.i.}}(q_{a_1}, \lambda_{\alpha_a} \xi_a(\cdot); y_{a_1}, \lambda_{\alpha'_a} \chi_a(\cdot) : |\bar{\mathbf{q}}_a|)}_{\stackrel{(4.72)}{=} 0 : \text{électroneutralité}} \\
 &\quad \underbrace{\int_{\Omega} dq_{b_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_b \int_{\Lambda_b} D[\xi_b(\cdot)] \sum_{\alpha_b=1}^S e_{\alpha_b} \rho_{\alpha_b \alpha'_b; T}^{\text{s.i.}}(q_{b_1}, \lambda_{\alpha_b} \xi_b(\cdot); y_{b_1}, \lambda_{\alpha'_b} \chi_b(\cdot) : |\bar{\mathbf{q}}_b|)}_{\stackrel{(4.72)}{=} 0 : \text{électroneutralité}} \\
 &= 0. \quad (4.78)
 \end{aligned}$$

La nullité de  $f_{1,3}^{qq}$  signifie que la force résultant de l'interaction entre dipôles issus des fluctuations quantiques est nulle. La force issue de l'interaction entre dipôles d'origine classique et quantique est

donnée par

$$\begin{aligned}
 f_{1,3}^{cq} &= \int dz_1 \int d\chi_1 \varphi_1(z_1, \chi_1) g_{1,3}^{cq}(z_1, \chi_1) \\
 &= -\frac{\pi}{4} \hat{\mathbf{e}}_1 \int dz_1 \int d\chi_1 \varphi_1(z_1, \chi_1) \left( (q_{a_2} - q_{b_2}) (\lambda_{\alpha'_a} \chi_{a_2}(\cdot) + \lambda_{\alpha'_b} \chi_{b_2}(\cdot)) \right. \\
 &\quad \left. + (q_{a_3} - q_{b_3}) (\lambda_{\alpha'_a} \chi_{a_3}(\cdot) + \lambda_{\alpha'_b} \chi_{b_3}(\cdot)) \right) \\
 &\quad - \frac{\pi}{2} \hat{\mathbf{e}}_1 \int dz_1 \int d\chi_1 \varphi_1(z_1, \chi_1) \left( (y_{a_1} + y_{b_1}) (\lambda_{\alpha'_a} \chi_{a_1}(\cdot) + \lambda_{\alpha'_b} \chi_{b_1}(\cdot)) \right. \\
 &\quad \left. + (q_{a_1} + q_{b_1}) (\lambda_{\alpha'_a} \chi_{a_1}(\cdot) + \lambda_{\alpha'_b} \chi_{b_1}(\cdot)) \right) \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.79}$$

En effet, la symétrie du problème dans le plan transverse entraîne la nullité du premier terme lors de l'intégration sur les premiers moments transverses  $q_{a_2}, q_{b_2}, q_{a_3}, q_{b_3}$ . Le second terme est aussi nul car il est possible de mettre en évidence les variables  $y_{a_1}, y_{b_1}, q_{a_1}, q_{b_1}, \chi_{a_1}, \chi_{b_1}$  pour permettre, de la même façon que lors du calcul de  $f_{1,3}^{qq}$ , d'utiliser la relation d'électroneutralité (4.72). La nullité de  $f_{1,3}^{cq}$  nous enseigne que la force résultant de l'interaction entre un dipôle classique et quantique est nulle. En guise de résumé, nous avons montré que

$$f(d)_{\mathcal{O}(\beta)} = \frac{1}{d^3} f_{1,3} = \frac{1}{d^3} \left( \underbrace{f_{1,3}^{cc}}_{=0} + \underbrace{f_{1,3}^{qq}}_{=0} + \underbrace{f_{1,3}^{cq}}_{=0} \right) = \frac{1}{d^3} f_{1,3}^{cc} = \frac{2\pi\beta}{d^3} \mathcal{P}^2 \hat{\mathbf{e}}_1. \tag{4.80}$$

Selon le même mécanisme que celui exposé pour le cas classique, la contribution dégagée à l'ordre linéaire dans le potentiel d'interaction  $U(\mathcal{F}'_a, \mathcal{F}'_b)$  est la contribution dominante dans le régime asymptotique  $d \rightarrow \infty$  pour tout ordre en  $U(\mathcal{F}'_a, \mathcal{F}'_b)$ . La preuve de  $f(d)_{\mathcal{O}(\beta^k)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{d^{k+2}}\right)$  est similaire à celle du cas classique, en utilisant l'expression semi-classique de  $C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b)$  donnée dans l'annexe A.14. Ainsi

$$\boxed{f(d) = \frac{2\pi\beta}{d^3} \left( \int_{-\infty}^0 dq_{a_1} \int_{-\infty}^0 dy_{a_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\bar{\mathbf{y}}_a y_{a_1} C_T^{\text{s.i.}}(q_{a_1}; y_{a_1} : |\bar{\mathbf{y}}_a|) \right)^2 \hat{\mathbf{e}}_1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{d^4}\right)}, \tag{4.81}$$

avec  $C_T^{\text{s.i.}}(q_{a_1}; y_{a_1} : |\bar{\mathbf{y}}_a|)$  la fonction de corrélation tronquée de charge semi-classique.

## 4.2.5 Discussion

Étant donné que  $\lim_{\hbar \rightarrow 0} C_T^{\text{s.i.}}(\dots) = C_T^{\text{s.i. classique}}(\dots)$ , alors dans cette limite la règle de somme classique donnant la valeur du moment dipolaire  $\mathcal{P}$  est valable, et on retrouve bien la force classique  $\lim_{\hbar \rightarrow 0} f(d) = \frac{1}{8} \frac{1}{\pi\beta} \frac{1}{d^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{d^4}\right)$  obtenue dans la section 3.2.4.

Nous avons éludé la discussion d'un nouveau problème de convergence conséquent aux fluctuations quantiques. En effet, il est bien connu que ces dernières détruisent l'écran exponentiel, de sorte que les corrélations décroissent algébriquement en  $|\mathbf{x}|^{-6}$ , avec  $|\mathbf{x}|$  une distance relative. Ainsi,  $\varphi_1(z_1, \chi_1)$  ne décroît plus aussi rapidement que dans le cas classique, et par conséquent il n'est plus aussi facile de conclure sur la finitude des moments supérieurs.

Le résultat non trivial est que ni les dipôles d'origine purement quantique ni l'interaction d'un dipôle classique avec un dipôle quantique ne contribuent à la force. On peut schématiser ce résultat

par le développement multipolaire microscopique suivant.

$$\begin{aligned}
 f(d) &= \left[ \text{Diagram: Two vertical lines } \Lambda_a \text{ and } \Lambda_b \text{ separated by distance } d \right] \\
 &= \underbrace{\left[ \text{Diagram: } \Lambda_a, \Lambda_b \text{ with } q_a, q_b \text{ and } V(q_a - q_b) \right]}_{= \frac{\tilde{f}_1}{d} = 0} + \underbrace{\left[ \text{Diagram: } \Lambda_a, \Lambda_b \text{ with } q_a, q_b, y_a \text{ and } \frac{f_{1,2}^c}{d^2} \right]}_{= \frac{1}{2} \frac{f_{1,2}^c}{d^2} = 0} + \underbrace{\left[ \text{Diagram: } \Lambda_a, \Lambda_b \text{ with } q_a, q_b, y_b \text{ and } \frac{f_{1,2}^c}{d^2} \right]}_{= \frac{1}{2} \frac{f_{1,2}^c}{d^2} = 0} \\
 &+ \underbrace{\left[ \text{Diagram: } \Lambda_a, \Lambda_b \text{ with } q_a, q_b, y_a \text{ and } \frac{f_{1,2}^q}{d^2} \right]}_{= \frac{1}{2} \frac{f_{1,2}^q}{d^2} = 0} + \underbrace{\left[ \text{Diagram: } \Lambda_a, \Lambda_b \text{ with } q_a, q_b, y_b \text{ and } \frac{f_{1,2}^q}{d^2} \right]}_{= \frac{1}{2} \frac{f_{1,2}^q}{d^2} = 0} \\
 &+ \left[ \text{Diagram: } \Lambda_a, \Lambda_b \text{ with } q_a, q_b, y_a, y_b \text{ and } \frac{f_{1,2}^q}{d^2} \right]
 \end{aligned}$$

## Chapitre 5

# Conclusion

### 5.1 Résultats obtenus

Le résultat principal du travail, est d'avoir trouvé, par une approche microscopique, une expression de la force par unité de surface entre deux demi-espaces plans remplis d'un conducteur parfait, dans le régime des hautes températures, sans rayonnement ni conditions de bord particulières (parois isolantes), et ceci aussi bien selon une approche microscopique classique que semi-classique (c'est-à-dire en utilisant la mécanique statistique quantique sans contrainte bosonique ou fermionique). Soit  $C_T^{\text{s.i.}}(q_{a_1}; y_{a_1} : |\bar{\mathbf{y}}_a|)$  la fonction de corrélation tronquée de charge semi-classique du demi-espace plan  $\Lambda_a$  sans influence, alors le développement asymptotique  $d \rightarrow \infty$  de la force  $f(d)$  est donné par

$$f(d) = \frac{2\pi\beta}{d^3} \left( \int_{-\infty}^0 dq_{a_1} \int_{-\infty}^0 dy_{a_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\bar{\mathbf{y}}_a y_{a_1} C_T^{\text{s.i.}}(q_{a_1}; y_{a_1} : |\bar{\mathbf{y}}_a|) \right)^2 \hat{\mathbf{e}}_1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{d^4}\right). \quad (5.1)$$

Dans la limite classique  $\hbar \rightarrow 0$ , on obtient

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} f(d) = f(d)^{\text{classique}} = \frac{1}{8} \frac{1}{\pi\beta} \frac{1}{d^3} \hat{\mathbf{e}}_1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{d^4}\right). \quad (5.2)$$

Ce dernier résultat est à considérer comme une extension au niveau microscopique pour des parois isolantes de l'expression bien connue de la force entre deux conducteurs parfaits énoncée pour la première fois en 1956 par E.M. Lifshitz  $f(d) = \frac{\zeta(3)}{8} \frac{1}{\pi\beta} \frac{1}{d^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{d^4}\right)$ , avec  $\zeta(3) = 1.202\dots$  la valeur de la fonction zeta de Riemann (voir [Li]). Cette relation, maintes fois établie dans la littérature, est valable pour des parois ayant les propriétés d'un conducteur parfait (conditions de bord de Dirichlet) ou d'un diélectrique idéal, alors que nous établissons l'absence du facteur  $\zeta(3)$  pour des parois isolantes et une approche microscopique. Nous avons aussi montré que la force  $f_a(d)$  entre deux plaques d'épaisseur  $a$  est, dans la limite  $a \rightarrow \infty$ , 4 fois supérieure à celle de deux demi-espaces plans.

Pour établir (5.1) et (5.2), il a fallu donner une expression des fonctions de corrélation de charge à deux points classique et semi-classique à un ordre quelconque dans le potentiel d'interaction  $U$ . Pour le cas classique, nous avons prouvé explicitement que le terme dominant de la force est en  $d^{-3}$ , la démarche étant similaire pour le cas semi-classique. De façon annexe, nous avons établi l'expression de la fonction de corrélation tronquée de charge à deux points pour tout ordre dans le potentiel d'interaction  $U(r_a, r_b)$ .

### 5.2 Perspectives

Si ce travail apporte un résultat intéressant et nouveau, il soulève néanmoins plusieurs autres questions, que nous classons par ordre d'intérêt et de priorité relative au travail accompli.

1. Pour totalement valider et rendre crédible notre résultat, il est nécessaire d'investir plus de



- temps pour étudier la littérature établissant l'expression avec le facteur  $\zeta(3)$ , et les différents systèmes étudiés. Il serait instructif de trouver l'explication du mécanisme physique qui engendre ce facteur numérique, lorsque les parois ont les propriétés de conducteurs parfaits (conditions de bord de Dirichlet) ou de diélectriques idéaux.
2. Les corrélations au sein d'un gaz de Coulomb semi-classique ou quantique décroissant algébriquement, il est nécessaire de justifier le développement en puissances des petits paramètres. En effet, il n'est pas évident que tous les moments soient finis, et par conséquent que l'on obtienne une série convergente.
  3. Le formalisme développé permet aisément de généraliser notre résultat à un système de dimension  $D \geq 3$ .
  4. L'expression classique de la force a pu être obtenue grâce à la connaissance d'une règle de somme. Cependant, nous n'en connaissons pas l'équivalent pour la fonction de corrélation tronquée de charge semi-classique. Il serait donc intéressant d'essayer de trouver cette règle de somme, en appliquant la théorie de la réponse linéaire quantique (voir l'annexe A.12).
  5. S'il n'est pas possible d'établir cette règle de somme, il est par contre envisageable de réaliser un développement semi-classique des fonctions de densité de particules tronquées  $\rho_T(\dots)$  en puissances de  $\hbar$  de la forme  $\rho_T(\dots) = \sum_{k \geq 0} \hbar^k \rho_T^{(k)}(\dots)$ . Un tel développement nécessite la régularisation du potentiel de Coulomb à l'origine.
  6. La physique des surfaces et interfaces est complexe, et ne saurait être reproduite fidèlement par notre paroi isolante singulière. Comme discuté dans l'image 2.2 à la page 13, on peut envisager de confiner les particules à l'aide d'un potentiel doux phénoménologique, dont l'expression serait donné par l'expérience ou une théorie adéquate.
  7. Soit  $\mathcal{P}(a) = \int_{-a}^0 dq_1 \int_{-a}^0 dy_1 \int_{\mathbb{R}^2} d^2\bar{y} y_1 C_{a;T}^{s,i}(q_1; y_1 : |\bar{y}|)$  le moment dipolaire de charge d'une plaque, alors si le système considéré est formé de deux plaques planes d'épaisseur  $a$ , on suppose que les limites  $a \rightarrow \infty$  et  $d \rightarrow \infty$  ne commutent pas, c'est-à-dire  $\lim_{a \rightarrow \infty} \mathcal{P}(a) = 2\mathcal{P} = -\frac{1}{2\pi\beta}$ . Néanmoins, la preuve n'a pas été réalisée de façon tout à fait rigoureuse (voir la page 32).
  8. Finalement, nous n'avons pas étudié le plasma quantique. Grâce au formalisme dit des boucles, il est possible d'étudier l'effet des statistiques quantiques selon une démarche similaire à celle des cas semi-classique et classique. Néanmoins, les développements formels sont légèrement plus compliqués car la fonction de corrélation à deux boucles est formée de deux termes. Le premier tient compte de deux points appartenant à des boucles différentes, et le second de deux points d'une même boucle. Il est intéressant de connaître l'effet des statistiques quantiques sur la force, dans le régime  $d \rightarrow \infty$ . De plus, pour un tel plasma quantique, nous savons qu'il existe un régime de températures pour lequel il y a formation de matière, de molécules. Par conséquent, la force entre de telles molécules est de type Van der Waals, donc la force résultante est en  $d^{-3}$ .

## Annexe A

# Appendices

### A.1 Aspects de l'écran dans les systèmes semi-infinis

On présente une phénomène non trivial relatif à l'écran dans des systèmes semi-infinis. La discussion subtile intervient dans le cas du système infini selon  $\hat{e}_1$ , ce qui est la situation qui nous occupe (voir l'hypothèse 6). Il est clair que si l'interaction  $U(r_a, r_b)$  entre  $\Lambda_a$  et  $\Lambda_b$  est nulle, (A.1) sera nul. Néanmoins, l'existence d'interactions dans le système infini rend la physique plus complexe.

$$\text{Sans interaction } U = 0: \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{q}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{q}_b \frac{1}{Q} \int d\omega \hat{C}(\mathbf{q}_a) \hat{C}(\mathbf{q}_b) e^{-\beta(U(r_a) + U(r_b))} = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\text{Avec interaction } U \neq 0: \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{q}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{q}_b \frac{1}{Q} \int d\omega \hat{C}(\mathbf{q}_a) \hat{C}(\mathbf{q}_b) e^{-\beta(U(r_a) + U(r_b))} e^{-\beta U(r_a, r_b)} \neq 0$$

En effet, les expressions ci-dessus montrent que le poids statistique en présence d'interaction diffère, donc que l'intégration sur la fonction de corrélation en présence d'interaction doit être différente de zéro. Une représentation visuelle de la problématique est schématisée par la figure A.1.

Supposons avoir une charge négative près du bord de  $\Lambda_a$ , alors elle subit un écran par des charges positives, mais pas de façon parfaitement sphérique au sein de  $\Lambda_a$ . Le nuage d'écran peut être interprété comme la probabilité conditionnelle de trouver des charges positives en un point de l'espace sachant qu'une charge négative est localisée en un point donné, donc il s'agit d'une fonction de corrélation à deux points divisée par une densité. En effet, en termes purement probabilistes,  $\rho_{\alpha_a \alpha_b}(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b) \rho_{\alpha_a}(\mathbf{q}_a)^{-1}$  est la probabilité conditionnelle d'avoir une particule de charge  $e_{\alpha_b}$  en  $\mathbf{q}_b$  sachant qu'il y a une particule de charge  $e_{\alpha_a}$  en  $\mathbf{q}_a$ , et par conséquent  $\int d^3 \mathbf{q}_b \sum_{\alpha_b=1}^S e_{\alpha_b} \rho_{\alpha_a \alpha_b}(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b) \rho_{\alpha_a}(\mathbf{q}_a)^{-1}$  est la charge du nuage d'écran autour de  $\mathbf{q}_a$ . Le nuage d'écran s'étend donc à  $\Lambda_b$ , le tout formant des multipôles. L'excès de charges négatives dans  $\Lambda_a$  est alors renvoyé à l'infini, "plus loin" que ne peut aller  $q_{a_1}$  lors de l'intégration.

Soit  $C^{\Lambda_a(L)}(q_{a_1})$  la densité de charge du cube d'arête  $L$  défini par  $\Lambda_a = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |x_i| \leq L \forall i = 1, \dots, 3\}$ ,  $C^a(q_{a_1})$  la densité de charge de  $\Lambda_a = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |x_1| \leq a, x_i \in \mathbb{R} \forall i = 2, 3\}$ , alors on a les

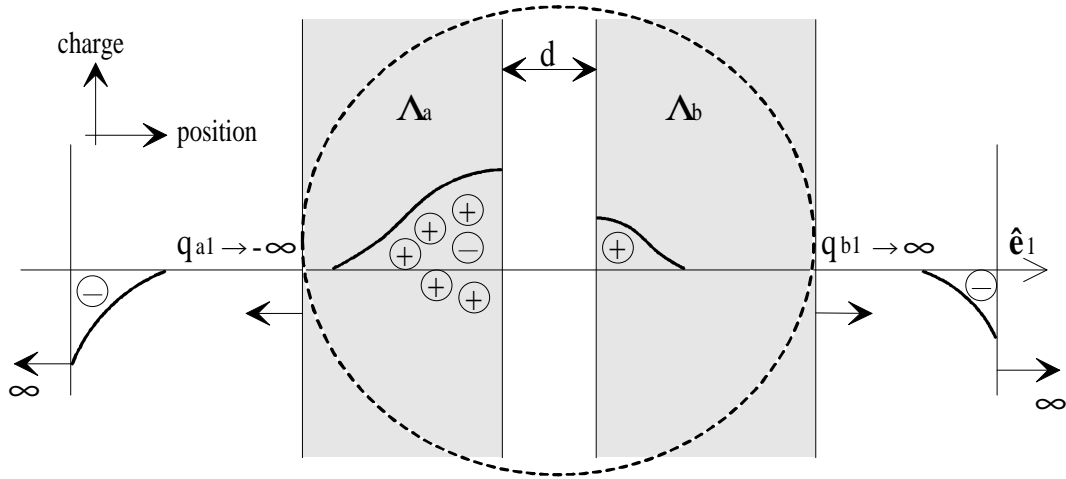


FIG. A.1 – Écran dans les systèmes semi-infinis

Le trait continu en gras représente la charge totale du système réduit unidimensionnel, à distance  $q_{a1}$  ou  $q_{b1}$ . Le cercle en traitillé est un exemple visuel de la portion du système décrite dans notre formalisme. Le nuage d'écran autour d'une charge dans  $\Lambda_a$  s'étend à  $\Lambda_b$ , aussi longtemps que  $d < \infty$ . Remarquons que la présence du nuage d'écran autour d'une charge donnée est équivalent à la probabilité conditionnelle de trouver des charges positives en un certain point de l'espace sachant qu'une charge négative est en un point donné, donc ce graphique est à interpréter en termes de fonctions de corrélation à deux points. Pour un système infini dans la direction  $\hat{e}_1$ , l'excès de charge résultant de l'écran est envoyé à l'infini, encore plus loin que la portion du système considérée en limite thermodynamique  $q_{a1} \rightarrow -\infty$  et  $q_{b1} \rightarrow +\infty$ .

relations suivantes

$$\int_{-\infty}^0 dq_{a1} C(q_{a1}) = \int_{-\infty}^0 dq_{a1} \lim_{a \rightarrow \infty} C^a(q_{a1}) \neq \lim_{a \rightarrow \infty} \underbrace{\int_{-a}^0 dq_{a1} C^a(q_{a1})}_{=0} = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda_a(L=\infty)} d^3 \mathbf{q}_a \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} C^{\Lambda_a(L)}(\mathbf{q}_a) &= \int_{\Lambda_a(L=\infty)} d^3 \mathbf{q}_a C(q_{a1}) \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \\ &= \int_{-\infty}^0 dq_{a1} C(q_{a1}) \\ &\neq \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \underbrace{\int_{\Lambda_a(L)} d^3 \mathbf{q}_a C^{\Lambda_a(L)}(\mathbf{q}_a)}_{=0} = 0. \quad (\text{A.3}) \end{aligned}$$

Ces relations montrent à quel point il est important de bien clarifier le choix d'un développement asymptotique  $d \rightarrow \infty$  en système fini ou infini.

## A.2 Densités de charge $C(\mathbf{q}_a)C(\mathbf{q}_b)$ à l'ordre quadratique

Comme décrit dans la section 3.2.1, l'idée est d'effectuer un développement asymptotique pour  $d \rightarrow \infty$ . Le petit paramètre du problème est alors le potentiel d'interaction  $U(r_a, r_b)$ , car  $\lim_{d \rightarrow \infty} U(r_a, r_b) = 0$ . En effet, les particules décrites par  $r_a$  sont contraintes à rester dans  $\Lambda_a$  qui est indépendant de  $d$ , alors que les particules décrites par  $r_b$  sont confinées dans  $\Lambda_b$  qui dépend de  $d$ , et donc  $\lim_{d \rightarrow \infty} |\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b| = \infty$ , ce qui entraîne la nullité du potentiel d'interaction dans cette même limite. Il apparaît alors

naturel de développer  $e^{-\beta U(r_a, r_b)} = 1 - \beta U(r_a, r_b) + \frac{\beta^2}{2} U(r_a, r_b)^2 + \mathcal{O}(U(r_a, r_b)^2)$ , et d'exprimer les fonctions de corrélation du système en interaction en termes des fonctions de corrélation des systèmes  $\Lambda_a$  et  $\Lambda_b$  sans interaction, sur lesquelles on connaît des règles de somme.

La démarche exposée ici va permettre, dans l'annexe A.5, d'établir une expression des fonctions de corrélation tronquées à un ordre quelconque dans le potentiel d'interaction  $U(r_a, r_b)$ . Néanmoins, une démarche légèrement différente, présentée dans l'annexe A.6, réalise un regroupement différent de certains termes, permettant d'établir l'expression des corrélations  $C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b)$  à un ordre quelconque en  $U(r_a, r_b)$ , ce qui est la clef de la généralisation de la section 3.4 des résultats de l'ordre linéaire à un ordre quelconque.

Nous reprenons les notations exposées au début du chapitre 3.

$$\begin{aligned} C(\mathbf{q}_a) &= \frac{1}{Q} \int d\omega \hat{C}(\mathbf{q}_a) e^{-\beta(U(r_a) + U(r_b))} e^{-\beta U(r_a, r_b)} \\ &= \frac{\int d\omega \hat{C}(\mathbf{q}_a) e^{-\beta(U(r_a) + U(r_b))} \left(1 - \beta U(r_a, r_b) + \frac{\beta^2}{2} U(r_a, r_b)^2\right)}{\int d\omega e^{-\beta(U(r_a) + U(r_b))} \left(1 - \beta U(r_a, r_b) + \frac{\beta^2}{2} U(r_a, r_b)^2\right)} + \mathcal{O}(\beta^3) \\ &= \frac{1}{Q_{\Lambda_a} Q_{\Lambda_b}} \frac{\int d\omega \hat{C}(\mathbf{q}_a) e^{-\beta(U(r_a) + U(r_b))} \left(1 - \beta U(r_a, r_b) + \frac{\beta^2}{2} U(r_a, r_b)^2\right)}{1 - \beta \frac{\int d\omega e^{-\beta(U(r_a) + U(r_b))} U(r_a, r_b)}{Q_{\Lambda_a} Q_{\Lambda_b}} + \frac{\beta^2}{2} \frac{\int d\omega e^{-\beta(U(r_a) + U(r_b))} U(r_a, r_b)^2}{Q_{\Lambda_a} Q_{\Lambda_b}}} + \mathcal{O}(\beta^3) \end{aligned}$$

On utilise

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\prod_{i=0}^{n-1} (\alpha-i)}{n!} x^n + \mathcal{O}(x^{n+1}) \quad , \alpha \in \mathbb{R} \quad (\text{A.4})$$

pour collecter les termes en puissances de  $\beta$ , et obtenir

$$\begin{aligned} C(\mathbf{q}_a) &= C_{\Lambda_a}(\mathbf{q}_a) \\ &\quad - \beta \frac{\int d\omega e^{-\beta(U(r_a) + U(r_b))} \hat{C}(\mathbf{q}_a)}{Q_{\Lambda_a} Q_{\Lambda_b}} + \beta C_{\Lambda_a}(\mathbf{q}_a) \frac{\int d\omega e^{-\beta(U(r_a) + U(r_b))} U(r_a, r_b)}{Q_{\Lambda_a} Q_{\Lambda_b}} \\ &\quad + \frac{\beta^2}{2} \frac{\int d\omega e^{-\beta(U(r_a) + U(r_b))} \hat{C}(\mathbf{q}_a) U(r_a, r_b)^2}{Q_{\Lambda_a} Q_{\Lambda_b}} \\ &\quad - \beta^2 \frac{\int d\omega e^{-\beta(U(r_a) + U(r_b))} \hat{C}(\mathbf{q}_a) U(r_a, r_b)}{Q_{\Lambda_a} Q_{\Lambda_b}} \frac{\int d\omega e^{-\beta(U(r_a) + U(r_b))} U(r_a, r_b)}{Q_{\Lambda_a} Q_{\Lambda_b}} \\ &\quad - \frac{\beta^2}{2} C_{\Lambda_a}(\mathbf{q}_a) \frac{\int d\omega e^{-\beta(U(r_a) + U(r_b))} U(r_a, r_b)^2}{Q_{\Lambda_a} Q_{\Lambda_b}} \\ &\quad + \beta^2 C_{\Lambda_a}(\mathbf{q}_a) \left( \frac{\int d\omega e^{-\beta(U(r_a) + U(r_b))} U(r_a, r_b)}{Q_{\Lambda_a} Q_{\Lambda_b}} \right)^2 + \mathcal{O}(\beta^3). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

L'idée est à présent d'exprimer  $U(r_a, r_b)$  en fonction de l'observable de densité de charge  $\hat{C}(\mathbf{q})$ .

$$U(r_a, r_b) = \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{y}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{y}_b \hat{C}(\mathbf{y}_a) \hat{C}(\mathbf{y}_b) V(\mathbf{y}_a - \mathbf{y}_b) \quad (\text{A.6})$$

$$\hat{C}(\mathbf{q}_a) = \sum_{i=1}^N e_{\alpha_i} \delta(\mathbf{y}_a - \mathbf{r}_i) \quad (\text{A.7})$$

$$\hat{C}(\mathbf{q}_b) = \sum_{i=1}^N e_{\alpha_{i+N}} \delta(\mathbf{y}_b - \mathbf{r}_{i+N}) \quad (\text{A.8})$$

On remarque que (A.6) ne contient pas la soustraction du terme de self-énergie, ni le facteur  $1/2$ , d'habitude présent pour éviter le double comptage de l'interaction entre chaque paire de particules.

Pour ce qui est de la self-énergie, il n'est pas nécessaire de la soustraire car  $\mathbf{y}_a \in \Lambda_a$ ,  $\mathbf{y}_b \in \Lambda_b$  et  $\Lambda_a \cap \Lambda_b = \emptyset$ , donc  $\mathbf{y}_a$  est toujours différent de  $\mathbf{y}_b$ . De plus, étant donné cette contrainte de non recouvrement entre  $\Lambda_a$  et  $\Lambda_b$ , l'interaction de chaque paire de particules n'est comptée qu'une et une seule fois,<sup>1</sup> ce qui explique l'absence du facteur 1/2. En remplaçant (A.6) dans (A.5), et en utilisant la notation condensée présentée à la fin de la section 3.1, les expressions finales de  $C(\mathbf{q}_a)$  et  $C(\mathbf{q}_b)$  sont les suivantes.

$$\begin{aligned}
C(\mathbf{q}_a) = & (\mathbf{q}_a) \\
& + \beta \left( (\mathbf{q}_a)(\mathbf{y}_a)(\mathbf{y}_b) - (\mathbf{y}_b)(\mathbf{q}_a, \mathbf{y}_a) \right) \\
& + \frac{\beta^2}{2} \left( (\mathbf{y}_b, \mathbf{z}_b)(\mathbf{q}_a, \mathbf{y}_a, \mathbf{z}_a) - (\mathbf{q}_a)(\mathbf{y}_a, \mathbf{z}_a)(\mathbf{y}_b, \mathbf{z}_b) \right. \\
& \quad \left. - 2(\mathbf{y}_a)(\mathbf{y}_b)(\mathbf{z}_b)(\mathbf{q}_a, \mathbf{z}_a) + 2(\mathbf{q}_a)(\mathbf{y}_a)(\mathbf{y}_b)(\mathbf{z}_a)(\mathbf{z}_b) \right) \\
& + \mathcal{O}(\beta^3)
\end{aligned} \tag{A.9}$$

$$\begin{aligned}
C(\mathbf{q}_b) = & (\mathbf{q}_b) \\
& + \beta \left( (\mathbf{q}_b)(\mathbf{y}_a)(\mathbf{y}_b) - (\mathbf{y}_a)(\mathbf{q}_b, \mathbf{y}_b) \right) \\
& + \frac{\beta^2}{2} \left( (\mathbf{y}_a, \mathbf{z}_a)(\mathbf{q}_b, \mathbf{y}_b, \mathbf{z}_b) - (\mathbf{q}_b)(\mathbf{y}_a, \mathbf{z}_a)(\mathbf{y}_b, \mathbf{z}_b) \right. \\
& \quad \left. - 2(\mathbf{y}_a)(\mathbf{y}_b)(\mathbf{z}_a)(\mathbf{q}_b, \mathbf{z}_b) + 2(\mathbf{q}_b)(\mathbf{y}_a)(\mathbf{y}_b)(\mathbf{z}_a)(\mathbf{z}_b) \right) \\
& + \mathcal{O}(\beta^3)
\end{aligned} \tag{A.10}$$

### A.3 Fonction de corrélation $C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b)$ à l'ordre quadratique

Par définition

$$C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b) = \frac{1}{Q} \int d\omega \hat{C}(\mathbf{q}_a) \hat{C}(\mathbf{q}_b) e^{-\beta(U(r_a) + U(r_b))} e^{-\beta U(r_a, r_b)}. \tag{A.11}$$

En procédant selon la même démarche que celle de l'annexe A.2, on obtient après quelques calculs l'expression de  $C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b)$  dans la notation présentée à la fin de la section 3.1.

$$\begin{aligned}
C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b) = & (\mathbf{q}_a)(\mathbf{q}_b) \\
& + \beta \left( (\mathbf{q}_a)(\mathbf{q}_b)(\mathbf{y}_a)(\mathbf{y}_b) - (\mathbf{q}_a, \mathbf{y}_a)(\mathbf{q}_b, \mathbf{y}_b) \right) \\
& + \frac{\beta^2}{2} \left( (\mathbf{q}_a, \mathbf{y}_a, \mathbf{z}_a)(\mathbf{q}_b, \mathbf{y}_b, \mathbf{z}_b) - (\mathbf{q}_a)(\mathbf{q}_b)(\mathbf{y}_a, \mathbf{z}_a)(\mathbf{y}_b, \mathbf{z}_b) \right. \\
& \quad \left. - 2(\mathbf{z}_a)(\mathbf{z}_b)(\mathbf{q}_a, \mathbf{y}_a)(\mathbf{q}_b, \mathbf{y}_b) + 2(\mathbf{q}_a)(\mathbf{q}_b)(\mathbf{y}_a)(\mathbf{y}_b)(\mathbf{z}_a)(\mathbf{z}_b) \right) \\
& + \mathcal{O}(\beta^3)
\end{aligned} \tag{A.12}$$

1. Le lecteur peut facilement s'en convaincre par un dessin.

## A.4 Fonction de corrélation tronquée $C_T(\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b)$ à l'ordre quadratique

Avec les équations (A.9) et (A.10), en collectant les termes d'ordre inférieur à  $\beta^3$ , on obtient l'expression de  $C(\mathbf{q}_a)C(\mathbf{q}_b)$  dans la notation présentée à la fin de la section 3.1.

$$\begin{aligned}
C(\mathbf{q}_a)C(\mathbf{q}_b) = & (\mathbf{q}_a)(\mathbf{q}_b) \\
& + \beta \left( 2(\mathbf{q}_a)(\mathbf{q}_b)(\mathbf{y}_a)(\mathbf{y}_b) - (\mathbf{q}_a)(\mathbf{y}_a)(\mathbf{q}_b, \mathbf{y}_b) - (\mathbf{q}_b)(\mathbf{y}_b)(\mathbf{q}_a, \mathbf{y}_a) \right) \\
& + \frac{\beta^2}{2} \left( (\mathbf{q}_a)(\mathbf{y}_a, \mathbf{z}_a)(\mathbf{q}_b, \mathbf{y}_b, \mathbf{z}_b) + (\mathbf{q}_b)(\mathbf{y}_b, \mathbf{z}_b)(\mathbf{q}_a, \mathbf{y}_a, \mathbf{z}_a) \right. \\
& \quad - 2(\mathbf{q}_a)(\mathbf{q}_b)(\mathbf{y}_a, \mathbf{z}_a)(\mathbf{y}_b, \mathbf{z}_b) + 2(\mathbf{y}_b)(\mathbf{z}_b)(\mathbf{q}_a, \mathbf{y}_a)(\mathbf{q}_b, \mathbf{z}_b) \\
& \quad - 4(\mathbf{q}_a)(\mathbf{y}_a)(\mathbf{z}_a)(\mathbf{z}_b)(\mathbf{q}_b, \mathbf{y}_b) - 4(\mathbf{q}_b)(\mathbf{y}_b)(\mathbf{z}_a)(\mathbf{z}_b)(\mathbf{q}_a, \mathbf{y}_a) \\
& \quad \left. + 6(\mathbf{q}_a)(\mathbf{q}_b)(\mathbf{y}_a)(\mathbf{y}_b)(\mathbf{z}_a)(\mathbf{z}_b) \right) \\
& + \mathcal{O}(\beta^3)
\end{aligned} \tag{A.13}$$

(A.12) et (A.13) permettent d'obtenir  $C_T(\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b) = C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b) - C(\mathbf{q}_a)C(\mathbf{q}_b)$ .

$$\begin{aligned}
C_T(\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b) = & -\beta(\mathbf{q}_a; \mathbf{y}_a)_T(\mathbf{q}_b; \mathbf{y}_b)_T \\
& + \frac{\beta^2}{2} \left( (\mathbf{q}_a, \mathbf{y}_a, \mathbf{z}_a)(\mathbf{q}_b, \mathbf{y}_b, \mathbf{z}_b) - (\mathbf{q}_a)(\mathbf{y}_a, \mathbf{z}_a)(\mathbf{q}_b, \mathbf{y}_b, \mathbf{z}_b) \right. \\
& \quad - (\mathbf{q}_b)(\mathbf{y}_b, \mathbf{z}_b)(\mathbf{q}_a, \mathbf{y}_a, \mathbf{z}_a) + (\mathbf{q}_a)(\mathbf{q}_b)(\mathbf{y}_a, \mathbf{z}_a)(\mathbf{y}_b, \mathbf{z}_b) \\
& \quad - 2(\mathbf{z}_a)(\mathbf{z}_b)(\mathbf{q}_a, \mathbf{y}_a)(\mathbf{q}_b, \mathbf{y}_b) - 2(\mathbf{y}_b)(\mathbf{z}_a)(\mathbf{q}_a, \mathbf{y}_a)(\mathbf{q}_b, \mathbf{z}_b) \\
& \quad + 4(\mathbf{q}_a)(\mathbf{y}_a)(\mathbf{z}_a)(\mathbf{z}_b)(\mathbf{q}_b, \mathbf{y}_b) + 4(\mathbf{q}_b)(\mathbf{y}_b)(\mathbf{z}_a)(\mathbf{z}_b)(\mathbf{q}_a, \mathbf{y}_a) \\
& \quad \left. - 4(\mathbf{q}_a)(\mathbf{q}_b)(\mathbf{y}_a)(\mathbf{y}_b)(\mathbf{z}_a)(\mathbf{z}_b) \right) \\
& + \mathcal{O}(\beta^3)
\end{aligned} \tag{A.14}$$

Néanmoins, on désire obtenir une expression totalement symétrique dans les variables  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{z}$ , ce qui n'est pas le cas de la relation (A.14). On vérifie alors les relations qui suivent.

$$-2(\mathbf{z}_a)(\mathbf{z}_b)(\mathbf{q}_a, \mathbf{y}_a)(\mathbf{q}_b, \mathbf{y}_b) = -(\mathbf{z}_a)(\mathbf{z}_b)(\mathbf{q}_a, \mathbf{y}_a)(\mathbf{q}_b, \mathbf{y}_b) - \underbrace{(\mathbf{z}_a)(\mathbf{z}_b)(\mathbf{q}_a, \mathbf{y}_a)(\mathbf{q}_b, \mathbf{y}_b)}_{=(\mathbf{y}_a)(\mathbf{y}_b)(\mathbf{q}_a, \mathbf{z}_a)(\mathbf{q}_b, \mathbf{z}_b)} \tag{A.15}$$

$$4(\mathbf{q}_a)(\mathbf{y}_a)(\mathbf{z}_a)(\mathbf{z}_b)(\mathbf{q}_b, \mathbf{y}_b) = 2(\mathbf{q}_a)(\mathbf{y}_a)(\mathbf{z}_a)(\mathbf{z}_b)(\mathbf{q}_b, \mathbf{y}_b) + 2 \underbrace{(\mathbf{q}_a)(\mathbf{y}_a)(\mathbf{z}_a)(\mathbf{z}_b)(\mathbf{q}_b, \mathbf{y}_b)}_{=(\mathbf{q}_a)(\mathbf{y}_a)(\mathbf{y}_b)(\mathbf{z}_a)(\mathbf{q}_b, \mathbf{z}_b)} \tag{A.16}$$

$$4(\mathbf{q}_b)(\mathbf{y}_b)(\mathbf{z}_a)(\mathbf{z}_b)(\mathbf{q}_a, \mathbf{y}_a) = 2(\mathbf{q}_b)(\mathbf{y}_b)(\mathbf{z}_a)(\mathbf{z}_b)(\mathbf{q}_a, \mathbf{y}_a) + 2 \underbrace{(\mathbf{q}_b)(\mathbf{y}_b)(\mathbf{z}_a)(\mathbf{z}_b)(\mathbf{q}_a, \mathbf{y}_a)}_{=(\mathbf{q}_b)(\mathbf{y}_a)(\mathbf{y}_b)(\mathbf{z}_b)(\mathbf{q}_a, \mathbf{z}_a)} \tag{A.17}$$

En insérant (A.15), (A.16) et (A.17) dans (A.14), on obtient finalement l'expression symétrique de  $C_T(\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b)$ .

$$\begin{aligned}
C_T(\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b) &= -\beta(\mathbf{q}_a; \mathbf{y}_a)_T(\mathbf{q}_b; \mathbf{y}_b)_T \\
&\quad + \frac{\beta^2}{2} \left( (\mathbf{q}_a; \mathbf{y}_a, \mathbf{z}_a)_T(\mathbf{q}_b; \mathbf{y}_b, \mathbf{z}_b)_T \right. \\
&\quad \quad - (\mathbf{q}_a; \mathbf{y}_a)_T(\mathbf{q}_b; \mathbf{y}_b)_T(\mathbf{z}_a)(\mathbf{z}_b) \\
&\quad \quad - (\mathbf{q}_a; \mathbf{y}_a)_T(\mathbf{q}_b; \mathbf{z}_b)_T(\mathbf{z}_a)(\mathbf{y}_b) \\
&\quad \quad - (\mathbf{q}_a; \mathbf{z}_a)_T(\mathbf{q}_b; \mathbf{y}_b)_T(\mathbf{y}_a)(\mathbf{z}_b) \\
&\quad \quad \left. - (\mathbf{q}_a; \mathbf{z}_a)_T(\mathbf{q}_b; \mathbf{z}_b)_T(\mathbf{y}_a)(\mathbf{y}_b) \right) \\
&\quad + \mathcal{O}(\beta^3)
\end{aligned} \tag{A.18}$$

On vérifie bien que dès que l'on éloigne à l'infini n'importe quelle particule  $\mathbf{q}_a$ ,  $\mathbf{q}_b$ ,  $\mathbf{y}_a$ ,  $\mathbf{y}_b$ ,  $\mathbf{z}_a$  ou finalement  $\mathbf{z}_b$ , alors la fonction de corrélation (A.18) tend bien vers zéro de façon à assurer l'intégrabilité de la force par unité de surface (2.45).

$$\lim_{|\mathbf{q}_a| \rightarrow \infty} C_T(\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b) \stackrel{(A.18)}{=} \lim_{|\mathbf{q}_b| \rightarrow \infty} C_T(\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b) \stackrel{(A.18)}{=} 0 \tag{A.19}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{|\mathbf{y}_a| \rightarrow \infty} C_T(\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b) &\stackrel{(A.18)}{=} \frac{\beta^2}{2} \lim_{|\mathbf{y}_a| \rightarrow \infty} \underbrace{(\mathbf{y}_a)(\mathbf{q}_a; \mathbf{z}_a)_T}_{\substack{\text{lemme A.1} \\ \stackrel{A.1}{=} 0}} \left( (\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b, \mathbf{z}_b)_T - (\mathbf{q}_b; \mathbf{y}_b)_T(\mathbf{z}_b) - (\mathbf{q}_b; \mathbf{z}_b)_T(\mathbf{y}_b) \right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{A.20}$$

**Lemme A.1** La limite  $\lim_{q_{a_1} \rightarrow -\infty} C(\mathbf{q}_a)$  est nulle dans le système infini.

**Preuve.** La nullité de la limite  $\lim_{q_{a_1} \rightarrow -\infty} C(\mathbf{q}_a)$  est une conséquence de l'électronéutralité du système infini et de l'absence de divergences. Supposons que  $q_{a_1} \rightarrow -\infty$  ou  $q_{b_1} \rightarrow \infty$ , alors l'effet des parois se fait négligeable, et l'état devient invariant par translation. Soit  $C \in \mathbb{R}$  une constante,  $\rho_\alpha(\mathbf{q}_a)$  la densité de particules de l'espèce  $\alpha$ , alors

$$\lim_{q_{a_1} \rightarrow -\infty} C(\mathbf{q}_a) = C \tag{A.21}$$

$$\lim_{q_{a_1} \rightarrow -\infty} \rho_\alpha(\mathbf{q}_a) = \rho_\alpha^{\text{homogène}} \tag{A.22}$$

$$\Rightarrow \lim_{q_{a_1} \rightarrow -\infty} C(\mathbf{q}_a) = \lim_{q_{a_1} \rightarrow -\infty} \sum_{\alpha=1}^S e_\alpha \rho_\alpha(\mathbf{q}_a) \stackrel{(A.22)}{=} \sum_{\alpha=1}^S e_\alpha \rho_\alpha^{\text{homogène}} \stackrel{(*)}{=} 0 \tag{A.23}$$

$$\stackrel{(A.21)}{\Rightarrow} C \stackrel{(A.23)}{=} 0. \tag{A.24}$$

En effet,  $(*)$  doit être vrai par électronéutralité, ce qui entraîne que  $C = 0$ . Un autre raisonnement permet de trouver ce résultat plus rapidement. Supposons par l'absurde que  $C \neq 0$ , alors la densité de charge par unité de surface tend vers une constante non nulle dans la partie volumique du système, ce qui mène à une divergence de la charge totale. Ainsi il faut que  $C = 0$ , ce qui achève la preuve. ■

## A.5 Fonction de corrélation tronquée $C_T(\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b)$ à un ordre quelconque

Pour trouver l'expression de  $C_T(\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b)$  à un ordre quelconque dans le potentiel d'interaction  $U(r_a, r_b)$ , on ne procédera pas à une preuve rigoureuse, mais plutôt à une représentation graphique et extrapolation des résultats aux ordres supérieurs.

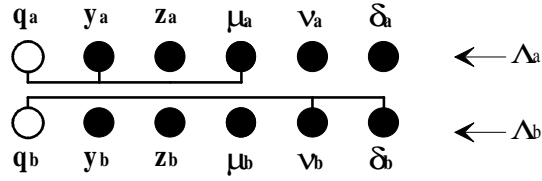


FIG. A.2 – Représentation diagrammatique des corrélations tronquées

Adoptant la même représentation que dans le formalisme des graphes des expansions diagrammatiques, on associe un cercle blanc  $\circ$  à une variable sur laquelle il n'y a pas d'intégration (en l'occurrence  $\mathbf{q}_a$  et  $\mathbf{q}_b$ ), tandis que les points noirs  $\bullet$  représentent les variables sur lesquelles il y a intégration, avec poids  $V(\mathbf{y}_a - \mathbf{y}_b)V(\mathbf{z}_a - \mathbf{z}_b) \dots$ . La ligne supérieure représente les variables du système  $\Lambda_a$ , tandis que la ligne inférieure celles de  $\Lambda_b$ . Des cercles reliés entre eux représentent une corrélation tronquée entre la variable symbolisée par le cercle blanc  $\circ$  et le groupement de variables représenté par l'ensemble des autres points noirs  $\bullet$  reliés entre eux, sur une même ligne. Un graphe composé de la ligne supérieure et inférieure doit être interprété comme le produit de la fonction de corrélation tronquée de la ligne supérieure par celle de la ligne inférieure. Par exemple, la traduction en notation condensée (notation expliquée à la fin de la section 3.1) de ce graphique est  $(\mathbf{q}_a; \mathbf{y}_a, \boldsymbol{\mu}_a)_T(\mathbf{q}_b; \boldsymbol{\nu}_b, \boldsymbol{\delta}_b)_T$ .

Une telle représentation graphique de la corrélation tronquée  $C_T(\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b)$  de (A.18) donne, dans la notation présentée à la fin de la section 3.1,

$$\begin{aligned}
C_T(\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b) &= -\beta(\mathbf{q}_a; \mathbf{y}_a)_T(\mathbf{q}_b; \mathbf{y}_b)_T \\
&+ \frac{\beta^2}{2} \left( (\mathbf{q}_a; \mathbf{y}_a, \mathbf{z}_a)_T(\mathbf{q}_b; \mathbf{y}_b, \mathbf{z}_b)_T \right. \\
&\quad - (\mathbf{q}_a; \mathbf{y}_a)_T(\mathbf{q}_b; \mathbf{y}_b)_T(\mathbf{z}_a)(\mathbf{z}_b) - (\mathbf{q}_a; \mathbf{y}_a)_T(\mathbf{q}_b; \mathbf{z}_b)_T(\mathbf{z}_a)(\mathbf{y}_b) \\
&\quad \left. - (\mathbf{q}_a; \mathbf{z}_a)_T(\mathbf{q}_b; \mathbf{y}_b)_T(\mathbf{y}_a)(\mathbf{z}_b) - (\mathbf{q}_a; \mathbf{z}_a)_T(\mathbf{q}_b; \mathbf{z}_b)_T(\mathbf{y}_a)(\mathbf{y}_b) \right) \\
&+ \mathcal{O}(\beta^3) \\
&= -\beta \begin{array}{c} \circ \bullet \\ \circ \bullet \end{array} \\
&+ \frac{\beta^2}{2} \left( \begin{array}{c} \circ \bullet \bullet \\ \circ \bullet \bullet \end{array} - \begin{array}{c} \circ \bullet \bullet \bullet \\ \circ \bullet \bullet \bullet \end{array} - \begin{array}{c} \circ \bullet \bullet \bullet \\ \circ \bullet \bullet \bullet \end{array} - \begin{array}{c} \circ \bullet \bullet \bullet \\ \circ \bullet \bullet \bullet \end{array} - \begin{array}{c} \circ \bullet \bullet \bullet \\ \circ \bullet \bullet \bullet \end{array} \right) \\
&+ \mathcal{O}(\beta^3). \tag{A.25}
\end{aligned}$$

Le préfacteur en puissances de  $\beta$  peut facilement être trouvé à l'ordre  $k$ . En effet, le plus grand dénominateur provient du terme du développement de Taylor  $\frac{(-\beta U(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b))^k}{k!}$ , ainsi ce préfacteur est  $\frac{(\beta)^k}{k!}$ .

**Proposition A.1** Soit  $x_a = (\mathbf{y}_a, \mathbf{z}_a, \dots) = (\mathbf{x}_{a_i})_{i=1}^k$ ,  $x_b = (\mathbf{y}_b, \mathbf{z}_b, \dots) = (\mathbf{x}_{b_i})_{i=1}^k$ , alors

$$C_T(\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b) = \sum_{j=1}^k \frac{\beta^j}{j!} \sum_{\substack{p=1 \\ l_1, \dots, l_j \in \{1, \dots, j\} \\ m_1, \dots, m_j \in \{1, \dots, j\} \\ l_1 \neq l_2 \neq \dots \neq l_j \\ m_1 \neq m_2 \neq \dots \neq m_j}}^j \frac{(-1)^p}{(p!)^2} (\mathbf{q}_a; \mathbf{x}_{a_{l_1}}, \dots, \mathbf{x}_{a_{l_p}})_T(\mathbf{x}_{a_{l_{p+1}}}) \dots (\mathbf{x}_{a_{l_j}}) + \mathcal{O}(\beta^{k+1}) \\ \times (\mathbf{q}_b; \mathbf{x}_{b_{m_1}}, \dots, \mathbf{x}_{b_{m_p}})_T(\mathbf{x}_{b_{m_{p+1}}}) \dots (\mathbf{x}_{b_{m_j}}) \tag{A.26}$$

avec la notation condensée dans laquelle il y a intégration sur  $(\mathbf{x}_{a_i})_{i=1}^j$  et  $(\mathbf{x}_{b_i})_{i=1}^j$  avec un poids  $\prod_{i=1}^j V(\mathbf{x}_{a_i} - \mathbf{x}_{b_i})$ .

La somme de (A.26) qui fait apparaître de nombreuses contraintes, est une somme sur toutes les partitions de  $\{1, \dots, j\} \times \{1, \dots, j\}$ . Le facteur  $\frac{1}{(p!)^2}$  qui apparaît dans (A.26) joue un rôle dès que



$p > 1$ . Son origine provient du fait que, dans la somme sur  $p$ , apparaissent plusieurs termes d'origine combinatoire différente, mais dont la valeur numérique est identique. Par exemple, pour  $p = 2$ , la somme engendre les  $(2!)^2 = 4$  termes de même valeur numérique

$$\begin{aligned} & (\mathbf{q}_a; \mathbf{x}_{a_1}, \mathbf{x}_{a_2})_T (\mathbf{q}_b; \mathbf{x}_{b_1}, \mathbf{x}_{b_2})_T + (\mathbf{q}_a; \mathbf{x}_{a_1}, \mathbf{x}_{a_2})_T (\mathbf{q}_b; \mathbf{x}_{b_2}, \mathbf{x}_{b_1})_T \\ & + (\mathbf{q}_a; \mathbf{x}_{a_2}, \mathbf{x}_{a_1})_T (\mathbf{q}_b; \mathbf{x}_{b_1}, \mathbf{x}_{b_2})_T + (\mathbf{q}_a; \mathbf{x}_{a_2}, \mathbf{x}_{a_1})_T (\mathbf{q}_b; \mathbf{x}_{b_2}, \mathbf{x}_{b_1})_T \\ & = (2!)^2 (\mathbf{q}_a; \mathbf{x}_{a_1}, \mathbf{x}_{a_2})_T (\mathbf{q}_b; \mathbf{x}_{b_1}, \mathbf{x}_{b_2})_T. \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Comme il y a  $p!$  arrangements équivalents aussi bien pour les variables décrivant  $\Lambda_a$  que pour celles décrivant  $\Lambda_b$ , alors il y a au total  $(p!)^2$  termes de même valeur numérique, ce qui explique la présence du facteur  $\frac{1}{(p!)^2}$ .

À titre d'illustration, la relation (A.26) à l'ordre  $k = 3$  donne les graphes suivants, déterminant de façon univoque  $C_T(\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b)$ .

$$\begin{aligned} C_T(\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b)_{\mathcal{O}(\beta^3)} = & \frac{\beta^3}{6} \left( \begin{array}{c} \text{---} \circ \bullet \bullet \bullet \text{---} \\ \text{---} \circ \bullet \bullet \bullet \text{---} \end{array} \right. \\ & + \begin{array}{c} \text{---} \circ \bullet \bullet \bullet \text{---} \\ \text{---} \circ \bullet \bullet \bullet \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \circ \bullet \bullet \bullet \text{---} \\ \text{---} \circ \bullet \bullet \bullet \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \circ \bullet \bullet \bullet \text{---} \\ \text{---} \circ \bullet \bullet \bullet \text{---} \end{array} \\ & + \begin{array}{c} \text{---} \circ \bullet \bullet \bullet \text{---} \\ \text{---} \circ \bullet \bullet \bullet \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \circ \bullet \bullet \bullet \text{---} \\ \text{---} \circ \bullet \bullet \bullet \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \circ \bullet \bullet \bullet \text{---} \\ \text{---} \circ \bullet \bullet \bullet \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \circ \bullet \bullet \bullet \text{---} \\ \text{---} \circ \bullet \bullet \bullet \text{---} \end{array} \\ & + \begin{array}{c} \text{---} \circ \bullet \bullet \bullet \text{---} \\ \text{---} \circ \bullet \bullet \bullet \text{---} \end{array} \\ & - \begin{array}{c} \text{---} \circ \bullet \bullet \bullet \text{---} \\ \text{---} \circ \bullet \bullet \bullet \text{---} \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \circ \bullet \bullet \bullet \text{---} \\ \text{---} \circ \bullet \bullet \bullet \text{---} \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \circ \bullet \bullet \bullet \text{---} \\ \text{---} \circ \bullet \bullet \bullet \text{---} \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \circ \bullet \bullet \bullet \text{---} \\ \text{---} \circ \bullet \bullet \bullet \text{---} \end{array} \\ & - \begin{array}{c} \text{---} \circ \bullet \bullet \bullet \text{---} \\ \text{---} \circ \bullet \bullet \bullet \text{---} \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \circ \bullet \bullet \bullet \text{---} \\ \text{---} \circ \bullet \bullet \bullet \text{---} \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \circ \bullet \bullet \bullet \text{---} \\ \text{---} \circ \bullet \bullet \bullet \text{---} \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \circ \bullet \bullet \bullet \text{---} \\ \text{---} \circ \bullet \bullet \bullet \text{---} \end{array} \\ & \left. - \begin{array}{c} \text{---} \circ \bullet \bullet \bullet \text{---} \\ \text{---} \circ \bullet \bullet \bullet \text{---} \end{array} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

## A.6 Fonction de corrélation $C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b)$ à un ordre quelconque

De même que pour la fonction de corrélation tronquée  $C_T(\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b)$  de la section A.5, nous ne démontrons pas la relation obtenue de façon rigoureuse, mais plutôt vérifions qu'elle est bien correcte pour les premiers ordres en  $U(r_a, r_b)$ , et supposons qu'elle l'est encore à tous les ordres.

**Proposition A.2** Soit  $\hat{\theta} = \hat{C}(\mathbf{q}_a) \hat{C}(\mathbf{q}_b)$ ;  $\hat{A}(\mathbf{y}_a, \mathbf{y}_b) = \hat{C}(\mathbf{y}_a) \hat{C}(\mathbf{y}_b)$ ;  $H_0 = U(r_a) + U(r_b)$ ;  $W = U(r_a, r_b)$ ;  $\mathbf{y}_{ai}, \mathbf{y}_{bi} \in \mathbb{R}^3 \forall i = 1, \dots, k$ ;  $\langle \cdot \rangle_{\text{s.i.}}$  la moyenne sur le système sans interaction  $U(r_a, r_b) = 0$ . Soit  $C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b)_{\mathcal{O}(\beta^k)}$  la fonction de corrélation à l'ordre  $k$  dans le potentiel d'interaction  $U(r_a, r_b)$ , alors

$$C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b)_{\mathcal{O}(\beta^k)} = \frac{(-\beta)^k}{k!} \int_{\Lambda_a^k} d^3 \mathbf{y}_{a1} \dots d^3 \mathbf{y}_{ak} \int_{\Lambda_b^k} d^3 \mathbf{y}_{b1} \dots d^3 \mathbf{y}_{bk} \prod_{i=1}^k V(\mathbf{y}_{ai} - \mathbf{y}_{bi}) \left\langle \hat{\theta} \prod_{j=1}^k \hat{A}(\mathbf{y}_{aj}, \mathbf{y}_{bj}) \right\rangle_{\text{s.i., } T} \quad (\text{A.29})$$

Si  $k = 0$ , alors trivialement  $C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b)_{\mathcal{O}(\beta^0)} = \langle \hat{\theta} \rangle_{\text{s.i., } T} = C_{\Lambda_a}(\mathbf{q}_a) C_{\Lambda_b}(\mathbf{q}_b)$ .

**Preuve.** La démarche est très similaire à celle exposée dans la section A.2, avec de nouvelles

notations qui permettent un regroupement judicieux de certaines observables. Nous rappelons qu'il ne s'agit pas d'une preuve à tous les ordres, mais uniquement d'une vérification aux ordres  $k \leq 2$ .

$$\begin{aligned}
C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b) &= \frac{1}{Q} \int d\omega \hat{\theta} e^{-\beta(H_0+W)} \\
&= \frac{\int d\omega \hat{\theta} e^{-\beta H_0} \left(1 - \beta W + \frac{\beta^2}{2} W^2\right)}{\int d\omega e^{-\beta H_0} \left(1 - \beta W + \frac{\beta^2}{2} W^2\right)} + \mathcal{O}(\beta^3) \\
&= \frac{1}{Q_{\Lambda_a} Q_{\Lambda_b}} \frac{\int d\omega \hat{\theta} e^{-\beta H_0} \left(1 - \beta W + \frac{\beta^2}{2} W^2\right)}{1 - \beta \frac{\int d\omega e^{-\beta H_0} W}{Q_{\Lambda_a} Q_{\Lambda_b}} + \frac{\beta^2}{2} \frac{\int d\omega e^{-\beta H_0} W^2}{Q_{\Lambda_a} Q_{\Lambda_b}}} + \mathcal{O}(\beta^3) \quad (\text{A.30})
\end{aligned}$$

On utilise la relation

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\prod_{i=0}^{n-1} (\alpha-i)}{n!} x^n + \mathcal{O}(x^{n+1}) \quad , \alpha \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.31})$$

En insérant (A.31) dans (A.30), et en collectant les ordres en  $\beta$  on obtient aisément

$$\begin{aligned}
C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b) &= \left\langle \hat{\theta} \right\rangle_{\text{s.i.}} \\
&\quad - \beta \left( \left\langle \hat{\theta} W \right\rangle_{\text{s.i.}} - \left\langle \hat{\theta} \right\rangle_{\text{s.i.}} \left\langle W \right\rangle_{\text{s.i.}} \right) \\
&\quad + \frac{\beta^2}{2} \left( \left\langle \hat{\theta} W^2 \right\rangle_{\text{s.i.}} - \left\langle \hat{\theta} \right\rangle_{\text{s.i.}} \left\langle W^2 \right\rangle_{\text{s.i.}} - 2 \left\langle \hat{\theta} W \right\rangle_{\text{s.i.}} \left\langle W \right\rangle_{\text{s.i.}} + 2 \left\langle \hat{\theta} \right\rangle_{\text{s.i.}} \left\langle W \right\rangle_{\text{s.i.}}^2 \right) \\
&\quad + \mathcal{O}(\beta^3). \quad (\text{A.32})
\end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned}
W &= \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{y}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{y}_b \hat{C}(\mathbf{y}_a) \hat{C}(\mathbf{y}_b) V(\mathbf{y}_a - \mathbf{y}_b) \\
&= \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{y}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{y}_b \hat{A}(\mathbf{y}_a, \mathbf{y}_b) V(\mathbf{y}_a - \mathbf{y}_b) \quad (\text{A.33})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W^2 &= \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{y}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{y}_b \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{z}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{z}_b \hat{C}(\mathbf{y}_a) \hat{C}(\mathbf{y}_b) \hat{C}(\mathbf{z}_a) \hat{C}(\mathbf{z}_b) V(\mathbf{y}_a - \mathbf{y}_b) V(\mathbf{z}_a - \mathbf{z}_b) \\
&= \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{y}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{y}_b \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{z}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{z}_b \hat{A}(\mathbf{y}_a, \mathbf{y}_b) \hat{A}(\mathbf{z}_a, \mathbf{z}_b) V(\mathbf{y}_a - \mathbf{y}_b) V(\mathbf{z}_a - \mathbf{z}_b). \quad (\text{A.34})
\end{aligned}$$

L'insertion de (A.33) et (A.34) dans (A.32) permet d'établir

$$\begin{aligned}
C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b) &= \left\langle \hat{\theta} \right\rangle_{\text{s.i.}} \\
&\quad - \beta \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{y}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{y}_b V(\mathbf{y}_a - \mathbf{y}_b) \underbrace{\left( \left\langle \hat{\theta} \hat{A}(\mathbf{y}_a, \mathbf{y}_b) \right\rangle_{\text{s.i.}} - \left\langle \hat{\theta} \right\rangle_{\text{s.i.}} \left\langle \hat{A}(\mathbf{y}_a, \mathbf{y}_b) \right\rangle_{\text{s.i.}} \right)}_{= \left\langle \hat{\theta}; \hat{A}(\mathbf{y}_a, \mathbf{y}_b) \right\rangle_{\text{s.i., T}}} \\
&\quad + \frac{\beta^2}{2} \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{y}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{y}_b \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{z}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{z}_b V(\mathbf{y}_a - \mathbf{y}_b) V(\mathbf{z}_a - \mathbf{z}_b) \\
&\quad \left( \left\langle \hat{\theta} \hat{A}(\mathbf{y}_a, \mathbf{y}_b) \hat{A}(\mathbf{z}_a, \mathbf{z}_b) \right\rangle_{\text{s.i.}} - \left\langle \hat{\theta} \right\rangle_{\text{s.i.}} \left\langle \hat{A}(\mathbf{y}_a, \mathbf{y}_b) \hat{A}(\mathbf{z}_a, \mathbf{z}_b) \right\rangle_{\text{s.i.}} \right. \\
&\quad \left. - \left\langle \hat{\theta} \hat{A}(\mathbf{y}_a, \mathbf{y}_b) \right\rangle_{\text{s.i.}} \left\langle \hat{A}(\mathbf{z}_a, \mathbf{z}_b) \right\rangle_{\text{s.i.}} - \left\langle \hat{\theta} \hat{A}(\mathbf{z}_a, \mathbf{z}_b) \right\rangle_{\text{s.i.}} \left\langle \hat{A}(\mathbf{y}_a, \mathbf{y}_b) \right\rangle_{\text{s.i.}} \right. \\
&\quad \left. + 2 \left\langle \hat{\theta} \right\rangle_{\text{s.i.}} \left\langle \hat{A}(\mathbf{y}_a, \mathbf{y}_b) \right\rangle_{\text{s.i.}} \left\langle \hat{A}(\mathbf{z}_a, \mathbf{z}_b) \right\rangle_{\text{s.i.}} \right) \\
&\quad + \mathcal{O}(\beta^3). \quad (\text{A.35})
\end{aligned}$$

Or, l'expression d'une fonction de corrélation tronquée à 3 points  $\{1,2,3\}$  est

$$C_T(1; 2; 3) = C(1,2,3) - C(1)C(2,3) - C(2)C(1,3) - C(3)C(1,2) + 2C(1)C(2)C(3), \quad (\text{A.36})$$

ce qui permet de simplifier (A.35), pour finalement obtenir

$$\begin{aligned} C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b) &= \left\langle \hat{\theta} \right\rangle_{\text{s.i.}} \\ &\quad - \beta \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{y}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{y}_b V(\mathbf{y}_a - \mathbf{y}_b) \left\langle \hat{\theta}; \hat{A}(\mathbf{y}_a, \mathbf{y}_b) \right\rangle_{\text{s.i., } T} \\ &\quad + \frac{\beta^2}{2} \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{y}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{y}_b \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{z}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{z}_b V(\mathbf{y}_a - \mathbf{y}_b) V(\mathbf{z}_a - \mathbf{z}_b) \left\langle \hat{\theta}; \hat{A}(\mathbf{y}_a, \mathbf{y}_b); \hat{A}(\mathbf{z}_a, \mathbf{z}_b) \right\rangle_{\text{s.i., } T} \\ &\quad + \mathcal{O}(\beta^3). \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

On voit bien que (A.37) reproduit les termes  $k = 0, \dots, 2$  de la relation générale (A.29). Nous supposons qu'il en est de même pour les ordres  $k \geq 3$ . ■

### A.6.1 Équivalence des notations des sections A.6 et A.3

Il est évident que l'expression (A.12) de  $C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b)$  trouvée dans la section A.3 doit être égale à celle (A.29) pour l'ordre  $k = 2$  trouvée dans la section A.6. Néanmoins, cette égalité n'est actuellement qu'implicite, à cause des différentes notations adoptées. Nous désirons montrer l'égalité explicite.

**Preuve.** Pour montrer l'égalité, nous partons de (A.12) pour aboutir à (A.29) avec  $k = 2$ .

$$\begin{aligned} C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b)_{\mathcal{O}(\beta^2)} &\stackrel{(\text{A.12})}{=} \frac{\beta^2}{2} \left( (\mathbf{q}_a, \mathbf{y}_a, \mathbf{z}_a)(\mathbf{q}_b, \mathbf{y}_b, \mathbf{z}_b) - (\mathbf{q}_a)(\mathbf{q}_b)(\mathbf{y}_a, \mathbf{z}_a)(\mathbf{y}_b, \mathbf{z}_b) \right. \\ &\quad \left. - 2(\mathbf{z}_a)(\mathbf{z}_b)(\mathbf{q}_a, \mathbf{y}_a)(\mathbf{q}_b, \mathbf{y}_b) + 2(\mathbf{q}_a)(\mathbf{q}_b)(\mathbf{y}_a)(\mathbf{y}_b)(\mathbf{z}_a)(\mathbf{z}_b) \right) \\ &= \frac{\beta^2}{2} \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{y}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{y}_b \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{z}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{z}_b V(\mathbf{y}_a - \mathbf{y}_b) V(\mathbf{z}_a - \mathbf{z}_b) \\ &\quad \left( C_{\Lambda_a}(\mathbf{q}_a, \mathbf{y}_a, \mathbf{z}_a) C_{\Lambda_b}(\mathbf{q}_b, \mathbf{y}_b, \mathbf{z}_b) \right. \\ &\quad - C_{\Lambda_a}(\mathbf{q}_a) C_{\Lambda_b}(\mathbf{q}_b) C_{\Lambda_a}(\mathbf{y}_a, \mathbf{z}_a) C_{\Lambda_b}(\mathbf{y}_b, \mathbf{z}_b) \\ &\quad - C_{\Lambda_a}(\mathbf{z}_a) C_{\Lambda_b}(\mathbf{z}_b) C_{\Lambda_a}(\mathbf{q}_a, \mathbf{y}_a) C_{\Lambda_b}(\mathbf{q}_b, \mathbf{y}_b) \\ &\quad - C_{\Lambda_a}(\mathbf{y}_a) C_{\Lambda_b}(\mathbf{y}_b) C_{\Lambda_a}(\mathbf{q}_a, \mathbf{z}_a) C_{\Lambda_b}(\mathbf{q}_b, \mathbf{z}_b) \\ &\quad \left. + 2C_{\Lambda_a}(\mathbf{q}_a) C_{\Lambda_b}(\mathbf{q}_b) C_{\Lambda_a}(\mathbf{y}_a) C_{\Lambda_b}(\mathbf{y}_b) C_{\Lambda_a}(\mathbf{z}_a) C_{\Lambda_b}(\mathbf{z}_b) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

En insérant

$$C_{\Lambda_a}(\mathbf{q}_a, \mathbf{y}_a, \mathbf{z}_a) = \frac{1}{Q_{\Lambda_a}} \int d\omega_a e^{-\beta H_0} \hat{C}(\mathbf{q}_a) \hat{C}(\mathbf{y}_a) \hat{C}(\mathbf{z}_a) \quad (\text{A.39})$$

$$C_{\Lambda_b}(\mathbf{q}_b, \mathbf{y}_b, \mathbf{z}_b) = \frac{1}{Q_{\Lambda_b}} \int d\omega_b e^{-\beta H_0} \hat{C}(\mathbf{q}_b) \hat{C}(\mathbf{y}_b) \hat{C}(\mathbf{z}_b) \quad (\text{A.40})$$

$$C_{\Lambda_a}(\mathbf{q}_a, \mathbf{y}_a) = \frac{1}{Q_{\Lambda_a}} \int d\omega_a e^{-\beta H_0} \hat{C}(\mathbf{q}_a) \hat{C}(\mathbf{y}_a) \quad (\text{A.41})$$

$$C_{\Lambda_b}(\mathbf{q}_b, \mathbf{y}_b) = \frac{1}{Q_{\Lambda_b}} \int d\omega_b e^{-\beta H_0} \hat{C}(\mathbf{q}_b) \hat{C}(\mathbf{y}_b) \quad (\text{A.42})$$

$$C_{\Lambda_a}(\mathbf{q}_a) = \frac{1}{Q_{\Lambda_a}} \int d\omega_a e^{-\beta H_0} \hat{C}(\mathbf{q}_a) \quad (\text{A.43})$$

$$C_{\Lambda_b}(\mathbf{q}_b) = \frac{1}{Q_{\Lambda_b}} \int d\omega_b e^{-\beta H_0} \hat{C}(\mathbf{q}_b) \quad (\text{A.44})$$

dans (A.38), on obtient

$$\begin{aligned}
C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b)_{\mathcal{O}(\beta^2)} &= \frac{\beta^2}{2} \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{y}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{y}_b \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{z}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{z}_b V(\mathbf{y}_a - \mathbf{y}_b) V(\mathbf{z}_a - \mathbf{z}_b) \\
&\quad \left( \left\langle \hat{C}(\mathbf{q}_a) \hat{C}(\mathbf{q}_b) \hat{C}(\mathbf{y}_a) \hat{C}(\mathbf{y}_b) \hat{C}(\mathbf{z}_a) \hat{C}(\mathbf{z}_b) \right\rangle_{\text{s.i.}} \right. \\
&\quad - \left\langle \hat{C}(\mathbf{q}_a) \hat{C}(\mathbf{q}_b) \right\rangle_{\text{s.i.}} \left\langle \hat{C}(\mathbf{y}_a) \hat{C}(\mathbf{y}_b) \hat{C}(\mathbf{z}_a) \hat{C}(\mathbf{z}_b) \right\rangle_{\text{s.i.}} \\
&\quad - \left\langle \hat{C}(\mathbf{q}_a) \hat{C}(\mathbf{q}_b) \hat{C}(\mathbf{y}_a) \hat{C}(\mathbf{y}_b) \right\rangle_{\text{s.i.}} \left\langle \hat{C}(\mathbf{z}_a) \hat{C}(\mathbf{z}_b) \right\rangle_{\text{s.i.}} \\
&\quad - \left\langle \hat{C}(\mathbf{q}_a) \hat{C}(\mathbf{q}_b) \hat{C}(\mathbf{z}_a) \hat{C}(\mathbf{z}_b) \right\rangle_{\text{s.i.}} \left\langle \hat{C}(\mathbf{y}_a) \hat{C}(\mathbf{y}_b) \right\rangle_{\text{s.i.}} \\
&\quad \left. + 2 \left\langle \hat{C}(\mathbf{q}_a) \hat{C}(\mathbf{q}_b) \right\rangle_{\text{s.i.}} \left\langle \hat{C}(\mathbf{y}_a) \hat{C}(\mathbf{y}_b) \right\rangle_{\text{s.i.}} \left\langle \hat{C}(\mathbf{z}_a) \hat{C}(\mathbf{z}_b) \right\rangle_{\text{s.i.}} \right). \quad (\text{A.45})
\end{aligned}$$

Soit

$$\hat{\theta} \doteq \hat{C}(\mathbf{q}_a) \hat{C}(\mathbf{q}_b) \quad (\text{A.46})$$

$$\hat{A}(\mathbf{y}_a, \mathbf{y}_b) \doteq \hat{C}(\mathbf{y}_a) \hat{C}(\mathbf{y}_b) \quad (\text{A.47})$$

$$\hat{A}(\mathbf{z}_a, \mathbf{z}_b) \doteq \hat{C}(\mathbf{z}_a) \hat{C}(\mathbf{z}_b), \quad (\text{A.48})$$

alors en insérant ces dernières expressions dans (A.45), on vérifie aisément que l'on obtient exactement les terme d'ordre  $\beta^2$  de (A.35), qui est le cas particulier  $k = 2$  de (A.29). ■

## A.7 Méthode de dérivation fonctionnelle pour le traitement asymptotique des corrélations de charge

La méthode présentée dans cet appendice est équivalente au développement en perturbations du potentiel d'interaction  $U(r_a, r_b)$  utilisé dans notre travail pour obtenir les expressions de  $C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b)$ ,  $C_T(\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b)$  et  $C(\mathbf{q}_a)C(\mathbf{q}_b)$ . La méthode de perturbation utilisée est plus directe et intuitive. Néanmoins, on trouve parfois dans la littérature des approches similaires à celle que nous présentons dans cet appendice. Soit  $\langle \cdot \rangle_{\text{s.i.}}$  la moyenne statistique prise sur le système sans interaction  $U(r_a, r_b) = 0$ ,

alors

$$\begin{aligned}
C_T(\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b) &= C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b) - C(\mathbf{q}_a)C(\mathbf{q}_b) \\
&= \frac{1}{Q} \int d\omega \hat{C}(\mathbf{q}_a) \hat{C}(\mathbf{q}_b) e^{-\beta(U(r_a)+U(r_b))} e^{-\beta U(r_a, r_b)} \\
&\quad - \frac{1}{Q} \int d\omega \hat{C}(\mathbf{q}_a) e^{-\beta(U(r_a)+U(r_b))} e^{-\beta U(r_a, r_b)} \frac{1}{Q} \int d\omega \hat{C}(\mathbf{q}_b) e^{-\beta(U(r_a)+U(r_b))} e^{-\beta U(r_a, r_b)} \\
&= \left\langle \hat{C}(\mathbf{q}_a) \hat{C}(\mathbf{q}_b) e^{-\beta U(r_a, r_b)} \right\rangle_{\text{s.i.}} - \left\langle \hat{C}(\mathbf{q}_a) e^{-\beta U(r_a, r_b)} \right\rangle_{\text{s.i.}} \left\langle \hat{C}(\mathbf{q}_b) e^{-\beta U(r_a, r_b)} \right\rangle_{\text{s.i.}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^k}{k!} \left\langle \hat{C}(\mathbf{q}_a) \hat{C}(\mathbf{q}_b) U(r_a, r_b)^k \right\rangle_{\text{s.i.}} \\
&\quad - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^m}{m!} \left\langle \hat{C}(\mathbf{q}_a) U(r_a, r_b)^m \right\rangle_{\text{s.i.}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n}{n!} \left\langle \hat{C}(\mathbf{q}_b) U(r_a, r_b)^n \right\rangle_{\text{s.i.}} \\
&= C_T(\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b)_{\text{s.i.}} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\beta)^k}{k!} \left( \left\langle \hat{C}(\mathbf{q}_a) \hat{C}(\mathbf{q}_b) U(r_a, r_b)^k \right\rangle_{\text{s.i.}} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{l=0}^{\infty} \left( \left\langle \hat{C}(\mathbf{q}_a) U(r_a, r_b)^l \right\rangle_{\text{s.i.}} \left\langle \hat{C}(\mathbf{q}_b) U(r_a, r_b)^k \right\rangle_{\text{s.i.}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left\langle \hat{C}(\mathbf{q}_a) U(r_a, r_b)^k \right\rangle_{\text{s.i.}} \left\langle \hat{C}(\mathbf{q}_b) U(r_a, r_b)^l \right\rangle_{\text{s.i.}} \right) \right). \quad (\text{A.49})
\end{aligned}$$

Nous désirons à présent montrer rigoureusement, dans le cadre de notre formalisme, que  $C_T(\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b)_{\text{s.i.}} = 0$ . En fait, ce dernier résultat est une trivialité physique dans le sens suivant. Étant donné que  $C_T(\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b)_{\text{s.i.}}$  est une moyenne prise sur l'ensemble statistique sans interaction, alors les systèmes  $\Lambda_a$  et  $\Lambda_b$  ne se "voient" pas dans le sens où ils n'interagissent pas entre eux. Ainsi, il n'existe aucune corrélation entre  $\Lambda_a$  et  $\Lambda_b$ , ce qui entraîne la nullité de  $C_T(\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b)_{\text{s.i.}}$ . La preuve rigoureuse de cette évidence physique va nous permettre d'obtenir une relation pour la fonction de partition  $Q$ , relation qui sera utile par la suite. On définit

$$Q = \int d\omega e^{-\beta H} = \int d\omega e^{-\beta H'} \Big|_{\phi(\mathbf{r}_j)=0 \forall j} \quad (\text{A.50})$$

$$H' = H + \sum_{j=1}^{2N} e_{\alpha_j} \phi(\mathbf{r}_j). \quad (\text{A.51})$$

Grâce à cette nouvelle définition, il est possible d'obtenir une relation pour  $C(\mathbf{q}_a)$  (voir (A.52)) et  $C_T(\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b)$  (voir (A.53)) par dérivation fonctionnelle de  $\ln(Q)$ .

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\beta} \frac{\delta}{\delta \phi(\mathbf{q}_a)} \ln(Q) \Big|_{\phi=0} &= -\frac{1}{\beta} \frac{1}{Q} \int d\omega e^{-\beta H'} (-\beta) \frac{\delta}{\delta \phi(\mathbf{q}_a)} \sum_{j=1}^{2N} e_{\alpha_j} \phi(\mathbf{r}_j) \Big|_{\phi=0} \\
&= \frac{1}{Q} \int d\omega e^{-\beta H'} \left( \sum_{j=1}^N e_{\alpha_j} \underbrace{\frac{\delta \phi(\mathbf{r}_j)}{\delta \phi(\mathbf{q}_a)}}_{=\delta(\mathbf{q}_a - \mathbf{r}_j)} + \sum_{j=1}^N e_{\alpha_{j+N}} \underbrace{\frac{\delta \phi(\mathbf{r}_{j+N})}{\delta \phi(\mathbf{q}_a)}}_{=\delta(\mathbf{q}_a - \mathbf{r}_{j+N})} \right) \Big|_{\phi=0}
\end{aligned}$$

L'égalité  $\delta(\mathbf{q}_a - \mathbf{r}_{j+N}) = 0$  découle du fait que  $\mathbf{q}_a \in \Lambda_a$ ,  $\mathbf{r}_{j+N} \in \Lambda_b$ , et  $\Lambda_a \cap \Lambda_b = \emptyset$ .

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\beta} \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{q}_a)} \ln(Q) \Big|_{\phi=0} &= \frac{1}{Q} \int d\omega e^{-\beta H'} \underbrace{\sum_{j=1}^N e_{\alpha_j} \delta(\mathbf{r}_j - \mathbf{q}_a)}_{\substack{= \hat{\rho}(\mathbf{q}_a) \\ \hat{C}(\mathbf{q}_a)}} \Big|_{\phi=0} \\
&= \sum_{\alpha_a=1}^S e_{\alpha_a} \underbrace{\sum_{j=1}^N \delta_{\alpha_a, \alpha_j} \delta(\mathbf{r}_j - \mathbf{q}_a)}_{\hat{C}(\mathbf{q}_a)} \\
&= \frac{1}{Q} \int d\omega e^{-\beta H'} \hat{C}(\mathbf{q}_a) \\
&= C(\mathbf{q}_a)
\end{aligned} \tag{A.52}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\beta^2} \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{q}_a)} \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{q}_b)} &= -\frac{1}{\beta} \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{q}_b)} \frac{1}{Q} \int d\omega e^{-\beta H'} \hat{C}(\mathbf{q}_a) \Big|_{\phi=0} \\
&= \frac{1}{\beta} \frac{1}{Q^2} \left( \frac{\delta Q}{\delta\phi(\mathbf{q}_b)} \right) \int d\omega \hat{C}(\mathbf{q}_a) e^{-\beta(u(\mathbf{r}_a) + u(\mathbf{r}_b))} e^{-\beta u(\mathbf{r}_a; \mathbf{r}_b)} \Big|_{\phi=0} \\
&\quad + \frac{1}{Q} \int d\omega e^{-\beta H'} \hat{C}(\mathbf{q}_a) \underbrace{\frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{q}_b)} \sum_{j=1}^{2N} e_{\alpha_j} \phi(\mathbf{r}_j)}_{=\hat{C}(\mathbf{q}_b)} \Big|_{\phi=0} \\
&= \langle \hat{C}(\mathbf{q}_a) \hat{C}(\mathbf{q}_b) \rangle - \langle \hat{C}(\mathbf{q}_a) \rangle \frac{1}{Q} \int d\omega e^{-\beta H'} \underbrace{\frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{q}_b)} \sum_{j=1}^{2N} e_{\alpha_j} \phi(\mathbf{r}_j)}_{=\hat{C}(\mathbf{q}_b)} \Big|_{\phi=0} \\
&= \langle \hat{C}(\mathbf{q}_a) \hat{C}(\mathbf{q}_b) \rangle - \langle \hat{C}(\mathbf{q}_a) \rangle \langle \hat{C}(\mathbf{q}_b) \rangle \\
&= C_T(\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b)
\end{aligned} \tag{A.53}$$

Nous cherchons à présent une expression pour la fonction de partition  $Q$  qui mette en évidence les termes correspondant à l'absence d'interaction  $U(r_a, r_b) = 0$ . Ceci va permettre d'éliminer les termes qui engendrent le terme nul  $C_T(\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b)_{s.i.}$ .

$$\begin{aligned}
Q &= \int d\omega e^{-\beta H'} \Big|_{\phi=0} \\
&= \int d\omega e^{-\beta(U(r_a) + U(r_b) + \sum_{j=1}^{2N} e_{\alpha_j} \phi(\mathbf{r}_j))} \underbrace{e^{-\beta U(r_a, r_b)}}_{=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^k}{k!} U(r_a, r_b)^k} \Big|_{\phi=0} \\
&= \underbrace{\int d\omega e^{-\beta(U(r_a) + U(r_b) + \sum_{j=1}^{2N} e_{\alpha_j} \phi(\mathbf{r}_j))}}_{=Q_{\Lambda_a} Q_{\Lambda_b} : \text{pas d'interaction à l'ordre le plus bas}} \Big|_{\phi=0} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\beta)^k}{k!} \int d\omega e^{-\beta(U(r_a) + U(r_b) + \sum_{j=1}^{2N} e_{\alpha_j} \phi(\mathbf{r}_j))} U(r_a, r_b)^k \Big|_{\phi=0} \\
&= Q_{\Lambda_a} Q_{\Lambda_b} \Big|_{\phi=0} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\beta)^k}{k!} \int d\omega e^{-\beta(U(r_a) + U(r_b) + \sum_{j=1}^{2N} e_{\alpha_j} \phi(\mathbf{r}_j))} U(r_a, r_b)^k \Big|_{\phi=0}
\end{aligned} \tag{A.54}$$

Grâce à la linéarité de l'opération de dérivation fonctionnelle, on obtient  $C_T(\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b)_{s.i.}$  à partir de  $Q_{\Lambda_a} Q_{\Lambda_b}$ . Bien qu'il soit physiquement évident que  $C_T(\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b)_{s.i.} = 0$ , nous pouvons à présent le

vérifier explicitement pour nous assurer de la cohérence de notre formalisme. Soit  $C_{\Lambda_a}(\mathbf{q}_a)$  la densité de charge du système  $\Lambda_a$  sans interaction avec  $\Lambda_b$ , c'est-à-dire lorsque le potentiel d'interaction  $U(r_a, r_b)$  est nul, alors

$$\begin{aligned}
C_T(\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b)_{\text{s.i.}} &= \frac{1}{\beta^2} \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{q}_b)} \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{q}_a)} (\ln(Q_{\Lambda_a}) + \ln(Q_{\Lambda_b}))_{\phi=0} \\
&= -\frac{1}{\beta} \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{q}_b)} \underbrace{\left( -\frac{1}{\beta} \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{q}_a)} \ln(Q_{\Lambda_a}) \right)}_{=C_{\Lambda_a}(\mathbf{q}_a)} \Big|_{\phi=0} - \frac{1}{\beta} \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{q}_a)} \underbrace{\left( -\frac{1}{\beta} \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{q}_b)} \ln(Q_{\Lambda_b}) \right)}_{=C_{\Lambda_b}(\mathbf{q}_b)} \Big|_{\phi=0} \\
&= -\frac{1}{\beta} \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{q}_b)} \frac{1}{Q_{\Lambda_a}} \int d\omega_a e^{-\beta(U(r_a) + \sum_{j=1}^N e_{\alpha_j} \phi(\mathbf{r}_j))} \sum_{j=1}^N e_{\alpha_j} \delta(\mathbf{r}_j - \mathbf{q}_a) \Big|_{\phi=0} \\
&\quad - \frac{1}{\beta} \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{q}_a)} \frac{1}{Q_{\Lambda_b}} \int d\omega_b e^{-\beta(U(r_b) + \sum_{j=1}^N e_{\alpha_{j+N}} \phi(\mathbf{r}_{j+N}))} \sum_{j=1}^N e_{\alpha_{j+N}} \delta(\mathbf{r}_{j+N} - \mathbf{q}_b) \Big|_{\phi=0} \\
&= -C_{\Lambda_a}(\mathbf{q}_a) \frac{1}{Q_{\Lambda_a}} \int d\omega_a e^{-\beta(U(r_a) + \sum_{j=1}^N e_{\alpha_j} \phi(\mathbf{r}_j))} \sum_{j=1}^N e_{\alpha_j} \underbrace{\frac{\delta\phi(\mathbf{r}_j)}{\delta\phi(\mathbf{q}_b)}}_{\substack{=\delta(\mathbf{r}_j - \mathbf{q}_b) \\ =0}} \Big|_{\phi=0} \\
&\quad + \frac{1}{Q_{\Lambda_a}} \int d\omega_a e^{-\beta(U(r_a) + \sum_{j=1}^N e_{\alpha_j} \phi(\mathbf{r}_j))} \sum_{j=1}^N e_{\alpha_j} \delta(\mathbf{r}_j - \mathbf{q}_a) \sum_{i=1}^N e_{\alpha_i} \underbrace{\frac{\delta\phi(\mathbf{r}_i)}{\delta\phi(\mathbf{q}_b)}}_{\substack{=\delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{q}_b) \\ =0}} \Big|_{\phi=0} \\
&\quad - C_{\Lambda_b}(\mathbf{q}_b) \frac{1}{Q_{\Lambda_b}} \int d\omega_b e^{-\beta(U(r_b) + \sum_{j=1}^N e_{\alpha_{j+N}} \phi(\mathbf{r}_{j+N}))} \sum_{j=1}^N e_{\alpha_{j+N}} \underbrace{\frac{\delta\phi(\mathbf{r}_{j+N})}{\delta\phi(\mathbf{q}_a)}}_{\substack{=\delta(\mathbf{r}_{j+N} - \mathbf{q}_a) \\ =0}} \Big|_{\phi=0} \\
&\quad + \frac{1}{Q_{\Lambda_b}} \int d\omega_b e^{-\beta(U(r_b) + \sum_{j=1}^N e_{\alpha_{j+N}} \phi(\mathbf{r}_{j+N}))} \sum_{j=1}^N e_{\alpha_{j+N}} \delta(\mathbf{r}_{j+N} - \mathbf{q}_b) \sum_{i=1}^N e_{\alpha_{i+N}} \underbrace{\frac{\delta\phi(\mathbf{r}_{i+N})}{\delta\phi(\mathbf{q}_a)}}_{\substack{=\delta(\mathbf{r}_{i+N} - \mathbf{q}_a) \\ =0}} \Big|_{\phi=0} \\
&= 0. \tag{A.55}
\end{aligned}$$

On conclut de (A.55) que la force résultante entre  $\Lambda_a$  et  $\Lambda_b$  est nulle si le potentiel d'interaction  $U(r_a, r_b)$  est nul. Grâce à ce résultat formel, en appliquant les égalités (A.52) et (A.53) à  $\ln(Q)$  donné par (A.54), on obtient une série de perturbations en puissance du potentiel d'interaction. Définissons  $I_k$  par

$$I_k = \int d\omega e^{-\beta(U(r_a) + U(r_b) + \sum_{j=1}^{2N} e_{\alpha_j} \phi(\mathbf{r}_j))} U(r_a, r_b)^k. \tag{A.56}$$

En utilisant  $\ln(1+x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} x^j$ , on trouve facilement la relation cherchée donnant  $C_T(\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b)$ .

$$\begin{aligned}
C_T(\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b) &= \frac{1}{\beta^2} \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{q}_b)} \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{q}_a)} \ln \left( Q_{\Lambda_a} Q_{\Lambda_b} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\beta)^k}{k!} I_k \right) \Big|_{\phi=0} \\
&= \frac{1}{\beta^2} \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{q}_b)} \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{q}_a)} \ln \left( Q_{\Lambda_a} Q_{\Lambda_b} \left( 1 + \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\beta)^k}{k!} I_k}{Q_{\Lambda_a} Q_{\Lambda_b}} \right) \right) \Big|_{\phi=0} \\
&= \underbrace{\frac{1}{\beta^2} \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{q}_b)} \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{q}_a)} \ln(Q_{\Lambda_a} Q_{\Lambda_b})}_{= C_T(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b)_{s.i.} \underset{(A.55)}{=} 0} \Big|_{\phi=0} + \frac{1}{\beta^2} \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{q}_b)} \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{q}_a)} \ln \left( 1 + \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\beta)^k}{k!} I_k}{Q_{\Lambda_a} Q_{\Lambda_b}} \right) \Big|_{\phi=0} \\
&= \frac{1}{\beta^2} \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{q}_b)} \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{q}_a)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} \left( \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\beta)^k}{k!} I_k}{Q_{\Lambda_a} Q_{\Lambda_b}} \right)^j \Big|_{\phi=0} \tag{A.57}
\end{aligned}$$

$$\boxed{C_T(\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b) = \frac{1}{\beta^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{q}_b)} \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{q}_a)} \left( \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\beta)^k}{k!} I_k}{Q_{\Lambda_a} Q_{\Lambda_b}} \right)^j \Big|_{\phi=0}} \tag{A.58}$$

En procédant de la même façon avec  $C(\mathbf{q}_a)$ , on obtient

$$\begin{aligned}
C(\mathbf{q}_a) &= -\frac{1}{\beta} \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{q}_a)} \ln \left( Q_{\Lambda_a} Q_{\Lambda_b} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\beta)^k}{k!} I_k \right) \Big|_{\phi=0} \\
&= -\frac{1}{\beta} \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{q}_a)} \ln(Q_{\Lambda_a} Q_{\Lambda_b}) \Big|_{\phi=0} - \frac{1}{\beta} \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{q}_a)} \ln \left( 1 + \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\beta)^k}{k!} I_k}{Q_{\Lambda_a} Q_{\Lambda_b}} \right) \Big|_{\phi=0} \\
&= C_{\Lambda_a}(\mathbf{q}_a) - \frac{1}{\beta} \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{q}_a)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} \left( \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\beta)^k}{k!} I_k}{Q_{\Lambda_a} Q_{\Lambda_b}} \right)^j \Big|_{\phi=0} \tag{A.59}
\end{aligned}$$

$$\boxed{C(\mathbf{q}_a) = C_{\Lambda_a}(\mathbf{q}_a) - \frac{1}{\beta} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{q}_a)} \left( \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\beta)^k}{k!} I_k}{Q_{\Lambda_a} Q_{\Lambda_b}} \right)^j \Big|_{\phi=0}} \tag{A.60}$$

L'étape suivante consiste à introduire

$$U(r_a, r_b) = \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{y}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{y}_b \hat{C}(\mathbf{y}_a) \hat{C}(\mathbf{y}_b) V(\mathbf{y}_a - \mathbf{y}_b) \tag{A.61}$$

dans (A.58) et (A.60). Les calculs qui en découlent sont similaires à ceux réalisés par l'autre méthode, mais plus longs car ils engendrent des formules bien plus grandes.

## A.8 Lemme de nullité de la force $f(d)$

Ce lemme est très utile car il permet d'ajouter des termes de contribution nulle à  $f(d)$ , permettant dans certains cas de simplifier l'expression de  $f(d)$ .

**Lemme A.2** Soit une symétrie de translation dans le plan engendré par  $\hat{\mathbf{e}}_2$  et  $\hat{\mathbf{e}}_3$ , soit  $C(\mathbf{q}_a) = C(q_{a_1})$ ,  $C(\mathbf{q}_b) = C(q_{b_1})$ ,  $\mathbf{F}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b) = \frac{q_{a_1} - q_{b_1}}{|\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b|^3} \hat{\mathbf{e}}_1$ , alors

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{q}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{q}_b \mathbf{F}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b) C_{\Lambda_a}(\mathbf{q}_a) f(q_{b_1}) = 0 \quad \forall f(q_{b_1}) \tag{A.62}$$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{q}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{q}_b \mathbf{F}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b) C_{\Lambda_b}(\mathbf{q}_b) g(q_{a_1}) = 0 \quad \forall g(q_{a_1}). \tag{A.63}$$



**Preuve.** On démontre uniquement la relation (A.62), la preuve de (A.63) étant identique à un simple changement de notation près.

$$\begin{aligned}
& \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{q}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{q}_b \mathbf{F}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b) C_{\Lambda_a}(\mathbf{q}_a) f(q_{b_1}) \\
&= \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^0 dq_{a_1} C_{\Lambda_a}(q_{a_1}) \int_d^\infty dq_{b_1} f(q_{b_1}) \underbrace{\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{L^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_a \int_{L^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_b \mathbf{F}(\mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b)}_{\substack{\text{lemme 2.2} \\ 2\pi \hat{\mathbf{e}}_1}} \\
&= 2\pi \underbrace{\left( \int_{-\infty}^0 dq_{a_1} C_{\Lambda_a}(q_{a_1}) \right)}_{=0 : \text{électroneutralité}} \left( \int_d^\infty dq_{b_1} f(q_{b_1}) \right) \hat{\mathbf{e}}_1 \\
&= 0
\end{aligned} \tag{A.64}$$

■

## A.9 Développement asymptotique $d \rightarrow \infty$ à l'ordre linéaire en $U(r_a, r_b)$

Nous désirons réaliser un développement asymptotique  $d \rightarrow \infty$  de  $g_1(d, z_1)$  en fonction des petits paramètres (3.33) et (3.34), de la forme  $g_1(d, z_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{d^k} g_{1,k}(z_1)$ . Dans cette annexe, certains passages intermédiaires sont présentés, de sorte que lors des calculs aux ordres supérieurs, on se référera à cette annexe pour la démarche de calcul.

$$\begin{aligned}
g_1(d, z_1) &\stackrel{(3.38)}{=} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{y}}_a \frac{q_{a_1} + q_{b_1} - d}{\left( (q_{a_1} + q_{b_1} - d)^2 + |\bar{\mathbf{q}}_a - \bar{\mathbf{q}}_b + \bar{\mathbf{y}}_a|^2 \right)^{3/2}} \frac{1}{\left( (y_{a_1} + y_{b_1} - d)^2 + |\bar{\mathbf{y}}_a|^2 \right)^{1/2}} \hat{\mathbf{e}}_1 \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{y}}_a \frac{\mu - 1}{\left( (q_{a_1} + q_{b_1} - d)^2 + |\bar{\mathbf{q}}_a - \bar{\mathbf{q}}_b + \bar{\mathbf{y}}_a|^2 \right)^{3/2}} \frac{1}{\left( (\nu - 1)^2 + \left| \frac{\bar{\mathbf{y}}_a}{d} \right|^2 \right)^{1/2}} \hat{\mathbf{e}}_1 \\
&= \frac{1}{d^3} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{y}}_a \frac{\mu - 1}{\left( (\mu - 1)^2 + \left( \alpha + \frac{y_{a_2}}{d} \right)^2 + \left( \beta + \frac{y_{a_3}}{d} \right)^2 \right)^{3/2}} \frac{1}{\left( (\nu - 1)^2 + \left( \frac{y_{a_2}}{d} \right)^2 + \left( \frac{y_{a_3}}{d} \right)^2 \right)^{1/2}} \hat{\mathbf{e}}_1 \tag{A.65}
\end{aligned}$$

Soit  $|J|$  le jacobien du changement de variables

$$\begin{aligned}
x &\doteq \frac{y_{a_2}}{d} \\
y &\doteq \frac{y_{a_3}}{d} \\
|J| &= d^2 \mathbf{1},
\end{aligned} \tag{A.66}$$

alors l'expression de  $g_1(d, z_1)$  se réduit à

$$g_1(d, z_1) = \frac{1}{d} \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy \frac{\mu - 1}{\sqrt{(1+x^2+y^2+\mu^2-2\mu+\alpha^2+\beta^2+2\alpha x+2\beta y)^3} \sqrt{1+x^2+y^2+\nu^2-2\nu}}. \tag{A.67}$$

Nous utilisons (A.31) pour établir que<sup>2</sup>

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x^2+y^2+\nu^2-2\nu} &= \sqrt{1+x^2+y^2} \left( 1 - \frac{\nu}{1+x^2+y^2} + \frac{1}{2} \frac{\nu^2}{1+x^2+y^2} - \frac{1}{2} \frac{\nu^2}{(1+x^2+y^2)^2} \right) \\
&\quad + \mathcal{O}\left(\frac{1}{d^3}\right)
\end{aligned} \tag{A.68}$$

2. L'idée pour ce calcul est d'écrire  $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} \sqrt{1 + \frac{b}{a}}$ , puis de développer la seconde racine.

$$\begin{aligned}
& \sqrt{(1+x^2+y^2+\mu^2-2\mu+\alpha^2+\beta^2+2\alpha x+2\beta y)^3} \\
&= \sqrt{(1+x^2+y^2)^3} \left( 1 - 3\frac{\mu}{1+x^2+y^2} + 3\frac{\alpha x + \beta y}{1+x^2+y^2} + \frac{3}{2} \frac{(\alpha x + \beta y)^2}{(1+x^2+y^2)^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{2} \frac{\alpha^2 + \beta^2}{1+x^2+y^2} - 3\mu \frac{\alpha x + \beta y}{(1+x^2+y^2)^2} + \frac{3}{2} \frac{\mu^2}{1+x^2+y^2} + \frac{3}{2} \frac{\mu^2}{(1+x^2+y^2)^2} \right) \\
&\quad + \mathcal{O}\left(\frac{1}{d^3}\right). \tag{A.69}
\end{aligned}$$

En insérant (A.68) et (A.69) dans (A.67), puis en appliquant à nouveau (A.31), on obtient finalement les coefficients du développement de  $g_1(d, z_1)$  en puissances de  $d^{-1}$ .

$$g_{1,0}(z_1) = 0 \tag{A.70}$$

$$\begin{aligned}
g_{1,1}(z_1) &= \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy \frac{-1}{(1+x^2+y^2)^2} \hat{\mathbf{e}}_1 \\
&= -\pi \hat{\mathbf{e}}_1 \tag{A.71}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{1,2}(z_1) &= \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2} \left( \tilde{\mu} - \frac{3\tilde{\mu} + \tilde{\nu}}{1+x^2+y^2} + 3\frac{\tilde{\alpha}x + \tilde{\beta}y}{1+x^2+y^2} \right) \hat{\mathbf{e}}_1 \\
&= -\frac{\pi}{2} (\tilde{\mu} + \tilde{\nu}) \hat{\mathbf{e}}_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{1,3}(z_1) &= \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2} \left( -\frac{15}{2} \frac{(\tilde{\alpha}x + \tilde{\beta}y)^2}{(1+x^2+y^2)^2} + 3(\tilde{\nu} + 2\tilde{\mu}) \frac{\tilde{\alpha}x + \tilde{\beta}y}{(1+x^2+y^2)^2} + \frac{3}{2} \frac{\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2}{1+x^2+y^2} \right. \\
&\quad \left. - 3\tilde{\mu} \frac{\tilde{\alpha}x + \tilde{\beta}y}{1+x^2+y^2} + \frac{1}{2} \frac{\tilde{\nu}^2 + 9\tilde{\mu}^2 + 2\tilde{\mu}\tilde{\nu}}{1+x^2+y^2} - \frac{1}{2} \frac{3\tilde{\nu}^2 + 15\tilde{\mu}^2 + 6\tilde{\mu}\tilde{\nu}}{(1+x^2+y^2)^2} \right) \hat{\mathbf{e}}_1 \\
&= \frac{\pi}{8} (\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2) - \frac{\pi}{4} (\tilde{\mu} + \tilde{\nu})^2 \hat{\mathbf{e}}_1 \tag{A.72}
\end{aligned}$$

## A.10 Interprétation de la relation d'électroneutralité

Nous désirons dégager l'interprétation physique de la relation d'électroneutralité

$$\int_{\Omega} dy_{a_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\mathbf{y}_a C_T^{\text{s.i.}}(q_{a_1}; y_{a_1} : |\bar{\mathbf{y}}_a|) = 0. \tag{A.73}$$

Cette dernière relation est un cas particulier de la règle plus générale

$$\int_{\Lambda_a} d^3\mathbf{y}_a \langle \hat{\rho}_{\alpha_a}(\mathbf{q}_a); \hat{C}(\mathbf{y}_a) \rangle_T = 0. \tag{A.74}$$

En effet, en appliquant l'opérateur  $\sum_{\alpha_a=1}^S e_{\alpha_a}$  sur cette dernière relation, et en considérant les symétries de notre problème, on retrouve la relation (A.73). La moyenne  $\langle \cdot \rangle$  est bien entendu toujours celle du système de référence sans influence. Ainsi, nous allons plutôt interpréter la relation générale (A.74). Écrivons cette dernière comme

$$\begin{aligned}
\int_{\Lambda_a} d^3\mathbf{y}_a \langle \hat{\rho}_{\alpha_a}(\mathbf{q}_a); \hat{C}(\mathbf{y}_a) \rangle_T &= \int_{\Lambda_a} d^3\mathbf{y}_a \sum_{\alpha'_a=1}^S e_{\alpha'_a} \langle \hat{\rho}_{\alpha_a}(\mathbf{q}_a); \hat{\rho}_{\alpha'_a}(\mathbf{y}_a) \rangle_T \\
&= \int_{\Lambda_a} d^3\mathbf{y}_a \sum_{\alpha'_a=1}^S e_{\alpha'_a} \left( \langle \hat{\rho}_{\alpha_a}(\mathbf{q}_a) \hat{\rho}_{\alpha'_a}(\mathbf{y}_a) \rangle - \langle \hat{\rho}_{\alpha_a}(\mathbf{q}_a) \rangle \langle \hat{\rho}_{\alpha'_a}(\mathbf{y}_a) \rangle \right) \\
&= 0. \tag{A.75}
\end{aligned}$$

Cette dernière relation contient la contribution des points coïncidents  $\mathbf{q}_a = \mathbf{y}_a$ . Notons  $\langle \cdot \rangle^{\text{PPC}}$  la valeur moyenne sans points coïncidents, alors

$$\begin{aligned}
& \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{y}_a \sum_{\alpha'_a=1}^S e_{\alpha'_a} \left( \langle \hat{\rho}_{\alpha_a}(\mathbf{q}_a) \hat{\rho}_{\alpha'_a}(\mathbf{y}_a) \rangle^{\text{PPC}} - \langle \hat{\rho}_{\alpha_a}(\mathbf{q}_a) \rangle \langle \hat{\rho}_{\alpha'_a}(\mathbf{y}_a) \rangle + \delta_{\alpha'_a, \alpha_a} \delta(\mathbf{q}_a - \mathbf{y}_a) \langle \hat{\rho}_{\alpha'_a}(\mathbf{y}_a) \rangle \right) = 0 \\
& \Leftrightarrow \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{y}_a \sum_{\alpha'_a=1}^S e_{\alpha'_a} \left( \langle \hat{\rho}_{\alpha_a}(\mathbf{q}_a) \hat{\rho}_{\alpha'_a}(\mathbf{y}_a) \rangle^{\text{PPC}} - \langle \hat{\rho}_{\alpha_a}(\mathbf{q}_a) \rangle \langle \hat{\rho}_{\alpha'_a}(\mathbf{y}_a) \rangle \right) = -e_{\alpha_a} \langle \hat{\rho}_{\alpha_a}(\mathbf{q}_a) \rangle \\
& \Leftrightarrow \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{y}_a \sum_{\alpha'_a=1}^S e_{\alpha'_a} \left( \frac{\langle \hat{\rho}_{\alpha_a}(\mathbf{q}_a) \hat{\rho}_{\alpha'_a}(\mathbf{y}_a) \rangle^{\text{PPC}}}{\langle \hat{\rho}_{\alpha_a}(\mathbf{q}_a) \rangle} - \langle \hat{\rho}_{\alpha'_a}(\mathbf{y}_a) \rangle \right) = -e_{\alpha_a} \\
& \Leftrightarrow \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{y}_a \sum_{\alpha'_a=1}^S e_{\alpha'_a} \frac{\langle \hat{\rho}_{\alpha_a}(\mathbf{q}_a) \hat{\rho}_{\alpha'_a}(\mathbf{y}_a) \rangle^{\text{PPC}}}{\langle \hat{\rho}_{\alpha_a}(\mathbf{q}_a) \rangle} - \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{y}_a \sum_{\alpha'_a=1}^S e_{\alpha'_a} \langle \hat{\rho}_{\alpha'_a}(\mathbf{y}_a) \rangle = -e_{\alpha_a}. \quad (\text{A.76})
\end{aligned}$$

À présent, il est aisé, par interprétation des termes de (A.76), de donner un sens concret à la règle d'électroneutralité (A.74).

- $\frac{\langle \hat{\rho}_{\alpha_a}(\mathbf{q}_a) \hat{\rho}_{\alpha'_a}(\mathbf{y}_a) \rangle^{\text{PPC}}}{\langle \hat{\rho}_{\alpha_a}(\mathbf{q}_a) \rangle}$  est la probabilité conditionnelle de trouver une particule de charge  $e_{\alpha'_a}$  en  $\mathbf{y}_a$ , sachant qu'il y a une particule de charge  $e_{\alpha_a}$  en  $\mathbf{q}_a$ .
- $\sum_{\alpha'_a=1}^S e_{\alpha'_a} \frac{\langle \hat{\rho}_{\alpha_a}(\mathbf{q}_a) \hat{\rho}_{\alpha'_a}(\mathbf{y}_a) \rangle^{\text{PPC}}}{\langle \hat{\rho}_{\alpha_a}(\mathbf{q}_a) \rangle}$  est la valeur moyenne de la charge totale en  $\mathbf{y}_a$  due à la présence d'une particule de charge  $e_{\alpha_a}$  en  $\mathbf{q}_a$ .
- $\int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{y}_a \sum_{\alpha'_a=1}^S e_{\alpha'_a} \frac{\langle \hat{\rho}_{\alpha_a}(\mathbf{q}_a) \hat{\rho}_{\alpha'_a}(\mathbf{y}_a) \rangle^{\text{PPC}}}{\langle \hat{\rho}_{\alpha_a}(\mathbf{q}_a) \rangle}$  est la valeur moyenne de la charge totale du nuage d'écran dû à la présence d'une particule de charge  $e_{\alpha_a}$  en  $\mathbf{q}_a$ .
- $\sum_{\alpha'_a=1}^S e_{\alpha'_a} \langle \hat{\rho}_{\alpha'_a}(\mathbf{y}_a) \rangle$  est la valeur moyenne de la charge totale en  $\mathbf{y}_a$  si on ne sait pas qu'il y a une particule de charge  $e_{\alpha_a}$  en  $\mathbf{q}_a$ .
- $\int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{y}_a \sum_{\alpha'_a=1}^S e_{\alpha'_a} \langle \hat{\rho}_{\alpha'_a}(\mathbf{y}_a) \rangle$  est la valeur moyenne de la distribution de charge totale si on ne sait pas qu'il y a une particule de charge  $e_{\alpha_a}$  en  $\mathbf{q}_a$ .

Ainsi, la relation (A.76) s'interprète comme étant la modification de charge due au nuage d'écran engendré par la présence d'une particule de charge  $e_{\alpha_a}$  en  $\mathbf{q}_a$ . Étant donné l'hypothèse 3 de neutralité macroscopique du système  $\Lambda_a$ , alors la charge  $e_{\alpha_a}$  en  $\mathbf{q}_a$  doit subir un écran total. Par conséquent, la charge totale du nuage d'écran autour d'une particule du système de charge  $e_{\alpha_a}$  en  $\mathbf{q}_a$  doit être égale à  $-e_{\alpha_a}$ . On peut représenter la signification physique de cette règle d'électroneutralité par un

graphique. La zone hachurée représente l'intégrale de la densité de charge  $C(\mathbf{y}_a)$ .

$$= \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{y}_a \sum_{\alpha'_a=1}^S e_{\alpha'_a} \frac{\langle \hat{\rho}_{\alpha_a}(\mathbf{q}_a) \hat{\rho}_{\alpha'_a}(\mathbf{y}_a) \rangle^{ppc}}{\langle \hat{\rho}_{\alpha_a}(\mathbf{q}_a) \rangle}$$

$$= \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{y}_a \sum_{\alpha'_a=1}^S e_{\alpha'_a} \langle \hat{\rho}_{\alpha'_a}(\mathbf{y}_a) \rangle$$

$$= -e_{\alpha_a} \quad (\text{A.77})$$

La généralisation de cette règle de somme se fait en considérant, au lieu d'une seule densité de particules  $\hat{\rho}_{\alpha_a}(\mathbf{q}_a)$ , plusieurs densités  $\hat{\rho}_{\alpha_{a_1}}(\mathbf{q}_{a_1}) \cdots \hat{\rho}_{\alpha_{a_p}}(\mathbf{q}_{a_p})$ , ce qui donne

$$\int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{y}_a \left\langle \prod_{i=1}^p \hat{\rho}_{\alpha_{a_i}}(\mathbf{q}_{a_i}); \hat{C}(\mathbf{y}_a) \right\rangle_T = 0. \quad (\text{A.78})$$

## A.11 Arguments pour la nullité des seconds moments de la fonction de corrélation tronquée

Nous désirons savoir si les moments  $q_{a_2}^2$ ,  $q_{b_2}^2$ ,  $q_{a_3}^2$  et  $q_{b_3}^2$  donnent une contribution nulle à  $f_{1,3}$ . Le problème est la lente décroissance des fonctions de corrélation tronquées dans les directions transverses  $\hat{e}_2$  et  $\hat{e}_3$ . Prenons par exemple le calcul du second moment  $q_{a_2}^2$ . Sa contribution à  $f_{1,3}$ , notée  $f_{1,3}^{q_{a_2}}$ , est alors

$$f_{1,3}^{q_{a_2}} = \int_{\Omega^4} dq_{a_1} dq_{b_1} dy_{a_1} dy_{b_1} \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_a d^2 \bar{\mathbf{q}}_b C_T^{s.i.}(q_{a_1}; y_{a_1}; |\bar{\mathbf{q}}_a|) C_T^{s.i.}(q_{b_1}; y_{b_1}; |\bar{\mathbf{q}}_b|) q_{a_2}^2$$

$$= \left( \int_{\Omega} dq_{a_1} \int_{\Omega} dy_{a_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_a q_{a_2}^2 C_T^{s.i.}(q_{a_1}; y_{a_1}; |\bar{\mathbf{q}}_a|) \right) \left( \int_{\Omega} dq_{b_1} \int_{\Omega} dy_{b_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_b C_T^{s.i.}(q_{b_1}; y_{b_1}; |\bar{\mathbf{q}}_b|) \right) \quad (\text{A.79})$$

$\doteq I(q_{a_1}, y_{a_1})$   $= 0$ : électricité

L'expression précédente est nulle à condition que  $\int_{\Omega} dq_{a_1} \int_{\Omega} dy_{a_1} I(q_{a_1}, y_{a_1})$  soit fini. [Ma2] donne le comportement asymptotique de la fonction de corrélation tronquée du système de référence

$$C_T(q_{a_1}; y_{a_1}; |\bar{\mathbf{q}}_a|) \stackrel{|\bar{\mathbf{q}}_a| \rightarrow \infty}{\underset{\sim}{\sim}} \frac{f(q_{a_1}, y_{a_1})}{|\bar{\mathbf{q}}_a|}. \quad (\text{A.80})$$

Ainsi nous pouvons étudier la finitude de  $I(q_{a_1}, y_{a_1})$ .

$$I(q_{a_1}, y_{a_1}) \stackrel{|\bar{\mathbf{q}}_a| \rightarrow \infty}{\underset{\sim}{\sim}} f(q_{a_1}, y_{a_1}) \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_a \frac{q_{a_2}^2}{|\bar{\mathbf{q}}_a|^3} \quad (\text{A.81})$$

$\doteq J$

Or  $J$  diverge, ce qui ne permet pas d'appliquer le théorème de Fubini pour passer en coordonnées polaires. Ainsi, à cause de la divergence de  $J$ , l'expression (A.79) prend la forme mathématiquement indéterminée  $0 \cdot \infty$  en volume infini, le 0 provenant de l'électroneutralité. Néanmoins, un raisonnement physique montre que la contribution à la force de ces seconds moments est nulle. En effet, la divergence est une conséquence directe du volume infini, tandis que l'électroneutralité reste vraie pour tout volume fini ou non. Ainsi, dans la limite du volume qui devient infini  $|\Lambda| < \infty$ ,  $|\Lambda| \rightarrow \infty$ , on a  $I(q_{a_1}, y_{a_1}) < \infty$ , et donc

$$f_{1,3}^{q_{a_2}, |\Lambda| < \infty} = \left( \underbrace{\int_{\Omega} dq_{a_1} \int_{\Omega} dy_{a_1} I(q_{a_1}, y_{a_1})}_{=cL^{\gamma}} \right) \left( \underbrace{\int_{\Omega} dq_{b_1} \int_{\Omega} dy_{b_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_b C_T^{\text{s.i.}}(q_{b_1}, y_{b_1}; |\bar{\mathbf{q}}_b|)}_{=0} \right), \quad (\text{A.82})$$

avec  $\gamma > 0$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Néanmoins, il est faux d'utiliser l'expression de  $f_{1,3}^{q_{a_2}}$  trouvée en volume infini pour l'appliquer au volume fini, comme réalisé avec (A.82). Le raisonnement précédent ne consiste qu'en un argument qualitatif pour montrer la nullité des seconds moments concernés. En effet, pour obtenir l'expression de  $f_{1,3}^{q_{a_2}}$ , nous avons utilisé l'invariance par translation des densités de charge dans les directions transverses  $\hat{e}_2$  et  $\hat{e}_3$ , en posant  $C_{\Lambda_a}(\mathbf{q}_a) = C_{\Lambda_a}(q_{a_1})$  et  $C_{\Lambda_b}(\mathbf{q}_b) = C_{\Lambda_b}(q_{b_1})$ , ce qui n'est plus vrai pour le système fini selon  $\hat{e}_2$  et  $\hat{e}_3$ , car la présence de parois brise la symétrie de translation dans ces directions. La démarche correcte pour établir rigoureusement la finitude des seconds moments consiste à établir une nouvelle expression de  $f_{1,3}^{q_{a_2}, |\Lambda| < \infty}$  en volume fini, en utilisant la forme d'essai

$$C_{\Lambda_a}(\mathbf{q}_a) = C_{\Lambda_a}(q_{a_1}) + \frac{1}{L^{\delta}} f(q_{a_1}, \bar{\mathbf{q}}_a) \quad (\text{A.83})$$

$$C_{\Lambda_b}(\mathbf{q}_b) = C_{\Lambda_b}(q_{b_1}) + \frac{1}{L^{\delta}} f(q_{b_1}, \bar{\mathbf{q}}_b), \quad (\text{A.84})$$

et à prendre la limite  $L \rightarrow \infty$ . Nous ne ferons pas ce calcul. Étant donné que notre modèle initial ne comporte pas de singularités pour  $d \rightarrow \infty$ , la physique nous enseigne que la force est bien définie et ne peut diverger (à condition que l'hypothèse 7 d'existence d'un développement en puissances de  $d^{-1}$  soit correcte). Néanmoins, nous supposons que la preuve rigoureuse doit s'énoncer en termes de conditions sur  $\gamma$  et  $\delta$ , c'est-à-dire sur la vitesse à laquelle les densités de charge tendent à devenir homogènes dans les directions  $\hat{e}_2$  et  $\hat{e}_3$  lorsque  $L \rightarrow \infty$ , et sur la vitesse à laquelle les seconds moments divergent avec  $L \rightarrow \infty$ .

## A.12 Preuve de la règle de somme

Les éléments constituant la présente annexe A.12 sont tirés de [Ma2]. Par conséquent, cette section ne fait pas partie du travail de recherche au sens strict.

**Proposition A.3 Règle de somme.** Soit  $\nu \in \{2,3\}$  la dimension du problème,  $\Omega = ]-\infty, 0]$ ,  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_{\nu}) = (q_1, \bar{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{\nu}$ ,  $\bar{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{\nu-1}$ . Le système considéré est  $\Lambda = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{\nu} | q_1 \in \Omega, \bar{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{\nu-1}\}$ , supposé invariant par translation dans les directions décrites par  $\bar{\mathbf{q}}$ . Soit  $C_T(\mathbf{q}; \mathbf{y})$  la fonction de corrélation tronquée de charge du système, alors

$$\int_{\Omega} dq_1 \int_{\Omega} dy_1 \int_{\mathbb{R}^{\nu-1}} d^{\nu-1} \bar{\mathbf{y}} y_1 C_T(q_1; y_1; |\bar{\mathbf{y}}|) = -\frac{1}{2\pi(\nu-1)\beta}. \quad (\text{A.85})$$

Pour démontrer cette règle de somme, il est nécessaire de disposer du lemme de la condition du deuxième moment de Stillinger-Lovett, ainsi que du lemme de réponse linéaire.

**Lemme A.3 Stillinger-Lovett.** Soit un système invariant par translation dans  $\mathbb{R}^{\nu}$ ,  $\nu \in \{2,3\}$ ,  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_{\nu})$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{\nu})$ . Soit  $C_T(\mathbf{q}; \mathbf{y}) = C_T(|\mathbf{q} - \mathbf{y}|)$  la fonction de corrélation tronquée de charge du système, alors

$$\int d^{\nu} \mathbf{y} y_i^2 C_T(|\mathbf{y}|) = -\frac{1}{\pi(\nu-1)\beta} \quad \forall i = 1, \dots, \nu. \quad (\text{A.86})$$

**Lemme A.4 Réponse linéaire.** Soit  $\hat{C}(\mathbf{q})$  l'observable de densité de charge,  $\langle \cdot \rangle_{e_0}$  la moyenne du système perturbé par l'ajout d'une charge  $e_0$ , alors

$$\langle \hat{C}(\mathbf{y}) \rangle_{e_0} - \langle \hat{C}(\mathbf{y}) \rangle = -e_0 \beta \int d^\nu \mathbf{q} \frac{C_T(\mathbf{q}; \mathbf{y})}{|\mathbf{q}|} + \mathcal{O}(e_0^2). \quad (\text{A.87})$$

**Preuve. Lemme de réponse linéaire.** Commençons par rappeler quelle est la méthode de réponse linéaire classique, qui établit la valeur moyenne d'une observable  $\hat{A}$  à l'ordre linéaire dans une perturbation  $\lambda W$ . Soit  $H = H_0 + \lambda W$ , avec  $H_0$  l'hamiltonien non perturbé,  $W$  la perturbation, et  $\lambda$  le petit paramètre. Soit  $\rho_\lambda$  le poids de Gibbs du système perturbé, alors l'idée est de réaliser le développement de Taylor de la valeur moyenne de l'observable  $\hat{A}$  dans l'état perturbé  $\langle \hat{A} \rangle_\lambda$  autour de l'état non perturbé  $\lambda = 0$ .

$$\langle \hat{A} \rangle_\lambda = \int d\omega \rho_\lambda \hat{A} = \underbrace{\int d\omega \rho_{\lambda=0} \hat{A}}_{=\langle \hat{A} \rangle} + \lambda \underbrace{\frac{d}{d\lambda} \langle \hat{A} \rangle_\lambda \Big|_{\lambda=0}}_{\doteq g} + \mathcal{O}(\lambda^2) \quad (\text{A.88})$$

$$\rho_\lambda = \frac{e^{-\beta(H_0 + \lambda W)}}{\int d\omega e^{-\beta(H_0 + \lambda W)}}. \quad (\text{A.89})$$

On trouve par un simple calcul l'expression de  $g$ . Soit  $\langle \hat{A}; W \rangle_T = \langle \hat{A}W \rangle - \langle \hat{A} \rangle \langle W \rangle$ , alors

$$\langle \hat{A} \rangle_\lambda = \langle \hat{A} \rangle - \lambda \beta \langle \hat{A}; W \rangle_T + \mathcal{O}(\lambda^2). \quad (\text{A.90})$$

Supposons à présent que la perturbation soit due à l'insertion d'une charge  $e_0$  dans le système. Soit  $\hat{C}(\mathbf{q})$  l'observable de densité de charge insérée, alors  $W = \int d^\nu \mathbf{q} \frac{\hat{C}(\mathbf{q})}{|\mathbf{q}|}$  et  $\lambda = e_0$ , de sorte que  $\lambda W$  représente l'énergie de Coulomb de la charge insérée. Étudions la modification de densité de charge  $\langle \hat{C}(\mathbf{y}) \rangle$  due à l'insertion de la charge  $e_0$ , donc  $\hat{A} = \hat{C}(\mathbf{y})$ . Ainsi, en appliquant le résultat (A.90) on obtient la relation cherchée, c'est-à-dire

$$\langle \hat{C}(\mathbf{y}) \rangle_{e_0} - \langle \hat{C}(\mathbf{y}) \rangle = -e_0 \beta \int d^\nu \mathbf{q} \frac{\langle \hat{C}(\mathbf{q}); \hat{C}(\mathbf{y}) \rangle_T}{|\mathbf{q}|} + \mathcal{O}(e_0^2), \quad (\text{A.91})$$

ce qui achève la preuve. ■

**Preuve. Lemme de Stillinger-Lovett.** Reprenons le résultat (A.87) établi par le lemme de la réponse linéaire, et négligeons le terme  $\mathcal{O}(e_0^2)$ . En intégrant (A.87) sur  $\mathbf{y}$  et en remarquant que la charge  $e_0$  subit un écran total (toujours vrai dans les conducteurs parfaits, voir les hypothèses 1 et 4), c'est-à-dire

$$\int d^\nu \mathbf{y} \left( \langle \hat{C}(\mathbf{y}) \rangle_{e_0} - \langle \hat{C}(\mathbf{y}) \rangle \right) = -e_0, \quad (\text{A.92})$$

alors

$$\int d^\nu \mathbf{y} \int d^\nu \mathbf{q} \frac{C_T(\mathbf{q}; \mathbf{y})}{|\mathbf{q}|} = \frac{1}{\beta}. \quad (\text{A.93})$$

Supposons l'état invariant par translation, alors  $C_T(\mathbf{q}; \mathbf{y}) = C_T(|\mathbf{q} - \mathbf{y}|)$ , et en appliquant le changement de variables  $\mathbf{q} \doteq \mathbf{q} + \mathbf{y}$  on a

$$\int d^\nu \mathbf{y} \int d^\nu \mathbf{q} \frac{C_T(|\mathbf{q}|)}{|\mathbf{y} - \mathbf{q}|} = \frac{1}{\beta}. \quad (\text{A.94})$$

Notons  $(f_1 * f_2)(\mathbf{y}) \doteq \int d^\nu \mathbf{q} f_1(\mathbf{y} - \mathbf{q}) f_2(\mathbf{q})$  le produit de convolution de  $f_1$  et  $f_2$ ,  $\tilde{f}$  la transformée de Fourier de  $f$ , avec  $\widetilde{|\mathbf{q}|^{-1}} = \frac{2\pi(\nu-1)}{|\mathbf{k}|^2}$  la transformée de Fourier du potentiel de Coulomb en dimension

$\nu \in \{2,3\}$ . En utilisant la propriété de la transformée de Fourier du produit de convolution  $\widetilde{f_1 * f_2} = \widetilde{f_1} \widetilde{f_2}$ , avec  $f_1 = |\mathbf{y} - \mathbf{q}|^{-1}$  et  $f_2 = C_T(|\mathbf{q}|)$ , on obtient

$$\begin{aligned} \int d^\nu \mathbf{y} \int d^\nu \mathbf{q} \frac{C_T(|\mathbf{q}|)}{|\mathbf{y} - \mathbf{q}|} &= \lim_{|\mathbf{k}| \rightarrow 0} \int d^\nu \mathbf{y} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}} \underbrace{\int d^\nu \mathbf{q} \frac{C_T(|\mathbf{q}|)}{|\mathbf{y} - \mathbf{q}|}}_{=f_1 * f_2} \\ &= \lim_{|\mathbf{k}| \rightarrow 0} \underbrace{\int d^\nu \mathbf{y} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}}}_{=f_1 * f_2} \int d^\nu \mathbf{q} \frac{C_T(|\mathbf{q}|)}{|\mathbf{y} - \mathbf{q}|} \\ &= \lim_{|\mathbf{k}| \rightarrow 0} \frac{2\pi(\nu - 1)}{|\mathbf{k}|^2} \widetilde{C_T}(|\mathbf{k}|). \end{aligned} \quad (\text{A.95})$$

En insérant (A.95) dans (A.94) on obtient

$$\frac{1}{2\pi(\nu - 1)\beta} = \lim_{|\mathbf{k}| \rightarrow 0} \frac{\widetilde{C_T}(|\mathbf{k}|)}{|\mathbf{k}|^2}. \quad (\text{A.96})$$

En développant  $\widetilde{C_T}(|\mathbf{k}|)$  au second ordre autour de  $|\mathbf{k}| = 0$  on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi(\nu - 1)\beta} &= \lim_{|\mathbf{k}| \rightarrow 0} \frac{1}{|\mathbf{k}|^2} \int d^\nu \mathbf{y} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}} C_T(|\mathbf{y}|) \\ &= \lim_{|\mathbf{k}| \rightarrow 0} \frac{1}{|\mathbf{k}|^2} \underbrace{\int d^\nu \mathbf{y} C_T(|\mathbf{y}|)}_{=0 : \text{électroneutralité}} + i \lim_{|\mathbf{k}| \rightarrow 0} \frac{1}{|\mathbf{k}|^2} \underbrace{\int d^\nu \mathbf{y} \mathbf{k} \cdot \mathbf{y} C_T(|\mathbf{y}|)}_{=0 : \text{parité}} \\ &\quad - \frac{1}{2} \lim_{|\mathbf{k}| \rightarrow 0} \frac{1}{|\mathbf{k}|^2} \int d^\nu \mathbf{y} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{y})^2 C_T(|\mathbf{y}|) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^\nu \lim_{|\mathbf{k}| \rightarrow 0} \frac{k_i k_j}{|\mathbf{k}|^2} \underbrace{\int d^\nu \mathbf{y} y_i y_j C_T(|\mathbf{y}|)}_{=0 : \text{parité}} - \frac{1}{2} \lim_{|\mathbf{k}| \rightarrow 0} \frac{1}{|\mathbf{k}|^2} \sum_{i=1}^\nu k_i^2 \underbrace{\int d^\nu \mathbf{y} y_i^2 C_T(|\mathbf{y}|)}_{= \int d^\nu \mathbf{y} y_j^2 C_T(|\mathbf{y}|) : \text{isotropie}} \\ &= -\frac{1}{2} \int d^\nu \mathbf{y} y_j^2 C_T(|\mathbf{y}|). \end{aligned} \quad (\text{A.97})$$

Ainsi, à partir de la dernière relation on obtient immédiatement le résultat cherché, ce qui achève la preuve.  $\blacksquare$

**Preuve. Règle de somme.** Étant donné qu'il n'existe pas de champ extérieur, alors par définition du système  $\Lambda$ , ce dernier est invariant par translation dans le plan engendré par  $\{\hat{\mathbf{e}}_2, \dots, \hat{\mathbf{e}}_\nu\}$ . Il s'ensuit que la fonction de corrélation tronquée de charge hérite de la même symétrie  $C_T(\mathbf{q}; \mathbf{y}) = C_T(q_1; y_1 : |\bar{\mathbf{q}} - \bar{\mathbf{y}}|)$ . Puisque la densité de charge satisfait  $\lim_{q_1 \rightarrow -\infty} C(q_1) = 0$  (voir le lemme A.1 page 69), alors le système devient invariant par translation selon  $\hat{\mathbf{e}}_1$  dans cette même limite. Notons  $C_T^V(|\mathbf{q} - \mathbf{y}|)$  la fonction de corrélation tronquée de charge dans la partie volumique du système, alors

$$\lim_{\substack{q_1 \rightarrow -\infty \\ y_1 \rightarrow -\infty}} C_T(q_1; y_1 : |\bar{\mathbf{q}} - \bar{\mathbf{y}}|) = C_T^V(|\mathbf{q} - \mathbf{y}|). \quad (\text{A.98})$$

Par la suite, notons  $C_T^V(|y_1 - q_1|, |\bar{\mathbf{y}}|)$  la fonction de corrélation tronquée de charge obtenue de  $C_T^V(|\mathbf{q} - \mathbf{y}|)$  par le changement de variables  $\bar{\mathbf{y}} \doteq \bar{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{q}}$ .

$$\begin{aligned} &\int_\Omega d q_1 \int_\Omega d y_1 \int_{\mathbb{R}^{\nu-1}} d^{\nu-1} \bar{\mathbf{y}} y_1 C_T(q_1; y_1 : |\bar{\mathbf{y}}|) \\ &= \int_\Omega d q_1 \int_\Omega d y_1 \int_{\mathbb{R}^{\nu-1}} d^{\nu-1} \bar{\mathbf{y}} y_1 \left( C_T(q_1; y_1 : |\bar{\mathbf{y}}|) - C_T^V(|y_1 - q_1|, |\bar{\mathbf{y}}|) \right) \\ &\quad + \int_\Omega d q_1 \int_\Omega d y_1 \int_{\mathbb{R}^{\nu-1}} d^{\nu-1} \bar{\mathbf{y}} y_1 C_T^V(|y_1 - q_1|, |\bar{\mathbf{y}}|). \end{aligned} \quad (\text{A.99})$$

Pour établir cette dernière expression, nous avons additionné et soustrait le second terme du membre de droite de (A.99). Il est nécessaire d'introduire l'hypothèse selon laquelle l'état devient suffisamment rapidement invariant par translation, de sorte que

$$\int_{\Omega} dq_1 \int_{\Omega} dy_1 \int_{\mathbb{R}^{\nu-1}} d^{\nu-1} \bar{\mathbf{y}} y_1 \left( C_T(q_1; y_1 : |\bar{\mathbf{y}}|) - C_T^V(|y_1 - q_1|, |\bar{\mathbf{y}}|) \right) < \infty. \quad (\text{A.100})$$

Cette dernière hypothèse de convergence permet d'échanger l'ordre des intégrations sur  $q_1$  et  $y_1$  du premier terme du membre de droite de (A.99). Ainsi, en utilisant l'électronéutralité  $\int_{\Omega} dq_1 \int_{\mathbb{R}^{\nu-1}} d^{\nu-1} \bar{\mathbf{y}} C_T(q_1; y_1 : |\bar{\mathbf{y}}|) = 0$  et l'identité  $\int_{-\infty}^0 dx \int_{-\infty}^0 dy (y-x) f(|y-x|) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} dy y^2 f(|y|)$ , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} dq_1 \int_{\Omega} dy_1 \int_{\mathbb{R}^{\nu-1}} d^{\nu-1} \bar{\mathbf{y}} y_1 C_T(q_1; y_1 : |\bar{\mathbf{y}}|) &= - \int_{\Omega} dy_1 \int_{\Omega} dq_1 \int_{\mathbb{R}^{\nu-1}} d^{\nu-1} \bar{\mathbf{y}} q_1 C_T^V(|y_1 - q_1|, |\bar{\mathbf{y}}|) \\ &\quad + \int_{\Omega} dq_1 \int_{\Omega} dy_1 \int_{\mathbb{R}^{\nu-1}} d^{\nu-1} \bar{\mathbf{y}} y_1 C_T^V(|y_1 - q_1|, |\bar{\mathbf{y}}|) \\ &= \int_{\Omega} dq_1 \int_{\Omega} dy_1 (y_1 - q_1) \int_{\mathbb{R}^{\nu-1}} d^{\nu-1} \bar{\mathbf{y}} C_T^V(|y_1 - q_1|, |\bar{\mathbf{y}}|) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} dy_1 y_1^2 \int_{\mathbb{R}^{\nu-1}} d^{\nu-1} \bar{\mathbf{y}} C_T^V(|\mathbf{y}|) \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{\int d^{\nu} \mathbf{y} y_1^2 C_T^V(|\mathbf{y}|)}_{\substack{\text{lemme A.3} \\ -\frac{1}{\pi(\nu-1)\beta}}} \\ &= -\frac{1}{2\pi(\nu-1)\beta}. \end{aligned} \quad (\text{A.101})$$

Ce dernier résultat établit le règle de somme cherchée et par conséquent achève la preuve.  $\blacksquare$

## A.13 Formalisme des filaments

Cette section a pour but de présenter la dérivation du formalisme des filaments utilisé dans le traitement semi-classique. Son contenu est tiré principalement de [Ma] et [MB], par conséquent ne fait pas partie du travail de recherche proprement dit. Nous jugeons nécessaire de présenter cette dérivation car ce formalisme permet de procéder de façon analogue au cas classique. Pour ce faire, nous commençons par étudier le système formé d'une seule particule pour donner une expression du noyau du facteur de Gibbs en termes d'intégrales fonctionnelles. Dans un second temps, ce résultat est utilisé lors de la généralisation à un système à  $N$  particules, pour obtenir une expression de la fonction de partition. Ceci permet, par analogie, de se ramener à un espace de phase élargi, dit des filaments. Cette nouvelle formulation a l'avantage de préserver la même structure formelle de la valeur moyenne d'observables qu'en physique statistique classique.

### A.13.1 Système à une particule: la représentation de Feynman-Kac

Le but est de formuler la mécanique statistique semi-classique par l'intégrale de Feynman-Kac. Soit  $\mathcal{H}$  l'espace de Hilbert décrivant le système,  $H$  l'hamiltonien,  $Q$  la fonction de partition,  $|\varphi_n\rangle$  une base orthonormale de  $\mathcal{H}$ , où  $n$  est un multi-indice comprenant des composantes discrètes ainsi que continues. Notons  $\sum_n = \sum_{n_{d_1}} \sum_{n_{d_2}} \dots \int dn_{c_1} \int dn_{c_2} \dots$ , avec  $n_{d_i}$  les indices discrets et  $n_{c_i}$  les indices continus,  $i = 1, 2, \dots$ . Soit  $\mathbf{q}, \mathbf{q}' \in \mathbb{R}^3$ , alors en utilisant les relations de fermeture



$\mathbb{1} = \int d^3\mathbf{q} |\mathbf{q}\rangle \langle \mathbf{q}|$  et  $\mathbb{1} = \sum_n |\varphi_n\rangle \langle \varphi_n|$ , on a

$$\begin{aligned}
Q &= \text{Tr} (e^{-\beta H}) \\
&= \sum_n \langle \varphi_n | e^{-\beta H} | \varphi_n \rangle \\
&= \sum_n \langle \varphi_n | \underbrace{\int d^3\mathbf{r} |\mathbf{q}\rangle \langle \mathbf{q}|}_{=\mathbb{1}} e^{-\beta H} \underbrace{\int d^3\mathbf{q}' |\mathbf{q}'\rangle \langle \mathbf{q}'|}_{=\mathbb{1}} | \varphi_n \rangle \\
&= \int d^3\mathbf{q} \int d^3\mathbf{q}' \underbrace{\sum_n \langle \mathbf{q}' | \varphi_n \rangle \langle \varphi_n | \mathbf{q} \rangle}_{=\delta(\mathbf{q}-\mathbf{q}')} \langle \mathbf{q} | e^{-\beta H} | \mathbf{q}' \rangle \\
&= \int d^3\mathbf{q} \langle \mathbf{q} | e^{-\beta H} | \mathbf{q} \rangle. \tag{A.102}
\end{aligned}$$

La fonction de partition s'obtient donc par intégration de la partie diagonale de la fonction de Green  $\langle \mathbf{q} | e^{-\beta H} | \mathbf{q}' \rangle$ , soit le noyau du poids de Gibbs. L'idée est d'utiliser la formule de Feynman-Kac donnant le noyau de l'opérateur d'évolution en mécanique quantique, pour se ramener, grâce à des changements de variables judicieux, à l'expression du noyau du poids de Gibbs. Soit  $U(t, t_0)$  l'opérateur d'évolution correspondant à l'hamiltonien à une particule

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(\mathbf{q}), \tag{A.103}$$

alors la formule de Feynman-Kac s'énonce

$$\langle \mathbf{q}_2 | U(t, t_0) | \mathbf{q}_1 \rangle = \int_{\mathbf{q}_1, t_0}^{\mathbf{q}_2, t} d[\mathbf{q}(\cdot)] e^{\frac{i}{\hbar} S(\mathbf{q}(\cdot))} \tag{A.104}$$

$$S(\mathbf{q}(\cdot)) = \int_{t_0}^t ds \left( \frac{m}{2} \left| \frac{d\mathbf{q}(s)}{ds} \right|^2 - U(\mathbf{q}(s)) \right). \tag{A.105}$$

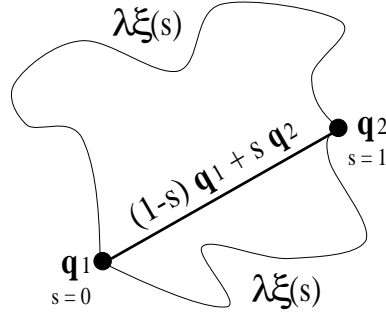
La formule de Feynman-Kac ne fait intervenir que des phases purement imaginaires, ce qui peut poser des problèmes lors de l'intégration de telles fonctions oscillantes. L'idée pour contourner cette difficulté est d'effectuer le changement de variables  $t \doteq -it$ , ce qui réalise une rotation dans le plan complexe du temps,<sup>3</sup> rotation dite de Wick. La rotation de Wick réalisée, on dit alors que l'on a une formulation euclidienne de la mécanique quantique. Le retour au propagateur quantique, une fois les calculs terminés et les problèmes de convergence contournés, se fait par rotation inverse  $t \doteq it$ . Le passage à la formulation euclidienne peut aussi être réalisé par les changements de variables  $m \doteq im$  et  $U \doteq -iU$ . Ainsi, en effectuant la rotation de Wick et les changements de variables  $t_0 = 0$  ainsi que  $t = \beta\hbar$  avec l'opérateur d'évolution  $U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)}$ , la formule de Feynman-Kac devient

$$\langle \mathbf{q}_2 | e^{-\beta H} | \mathbf{q}_1 \rangle = \int_{\mathbf{q}_1, 0}^{\mathbf{q}_2, \beta\hbar} d[\mathbf{q}(\cdot)] e^{-\frac{1}{\hbar} S^e(\mathbf{q}(\cdot))} \tag{A.106}$$

$$S^e(\mathbf{q}(\cdot)) = \int_0^{\beta\hbar} dt \left( \frac{m}{2} \left| \frac{d\mathbf{q}(t)}{dt} \right|^2 + U(\mathbf{q}(t)) \right), \tag{A.107}$$

avec  $S^e(\mathbf{q}(\cdot))$  qui est appelée l'action euclidienne. La partie diagonale de cette dernière relation permet d'exprimer la fonction de partition  $Q$ . Néanmoins, les paramètres physiques  $\beta$  et  $\hbar$  apparaissent dans les bornes d'intégration des expressions trouvées, ce qui rend certaines approximations plus difficiles. Ainsi, il est pratique de paramétrer le chemin  $\mathbf{q}(t)$  par des variables sans dimension grâce au changement de variables du pont brownien (voir la figure A.3)

$$\begin{aligned}
s &= \frac{t}{\beta\hbar}, & s &\in [0, 1] \\
\mathbf{q}(s) &= (1-s)\mathbf{q}_1 + s\mathbf{q}_2 + \lambda \boldsymbol{\xi}(s), & \boldsymbol{\xi}(0) &= \boldsymbol{\xi}(1) = 0, & \lambda &= \hbar \sqrt{\frac{\beta}{m}}. \tag{A.108}
\end{aligned}$$

FIG. A.3 – Pont brownien  $\xi(s)$ 

$\lambda\xi(s)$  est le pont brownien, qui est une caractéristique du système semi-classique ainsi que quantique. En effet, dans la limite  $\hbar \rightarrow 0$  le pont brownien devient identiquement nul  $\forall s \in [0,1]$ , par conséquent on retrouve bien le chemin classique libre  $(1-s)\mathbf{q}_1 + s\mathbf{q}_2$ . Cette nouvelle paramétrisation revient à prendre tous les chemins possibles issus de  $\mathbf{q}_1$  et aboutissant en  $\mathbf{q}_2$  au temps  $s = 1$ . Par souci de clarté, cette figure ne représente que deux formes de pont brownien  $\lambda\xi(s)$ , alors que l'intégration fonctionnelle en engendre une infinité.

Soit la mesure normalisée de Wiener du pont brownien définie par

$$D[\xi(\cdot)] = d[\xi(\cdot)] e^{-\frac{1}{2} \int_0^1 ds \left| \frac{d\xi(s)}{ds} \right|^2} (2\pi)^{3/2}, \quad (\text{A.109})$$

alors en insérant (A.108) et (A.109) dans (A.106) et (A.107), avec  $U(\mathbf{q}) = e^2 V(\mathbf{q})$ ,  $e$  la charge, on obtient finalement

$$\langle \mathbf{q}_2 | e^{-\beta H} | \mathbf{q}_1 \rangle = \left( \frac{1}{2\pi\lambda^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2|^2}{2\lambda^2}} \int D[\xi(\cdot)] e^{-\beta e^2 \int_0^1 ds V((1-s)\mathbf{q}_1 + s\mathbf{q}_2 + \lambda\xi(s))}. \quad (\text{A.110})$$

Cette dernière expression est entièrement déterminée par la covariance de la mesure normalisée de Wiener du pont brownien. En effet, il est possible de réaliser un développement de Taylor de l'intégrand, et grâce au théorème de Wick tous les moments pairs (les moments impairs étant nuls par parité de la mesure) s'expriment en termes de la covariance

$$\int D[\xi(\cdot)] \xi_i(s_1) \xi_j(s_2) = \delta_{i,j} (\min(s_1, s_2) - s_1 s_2). \quad (\text{A.111})$$

Pour exprimer la fonction de partition  $Q$ , nous avons besoin de la partie diagonale de (A.110). Soit  $V(\mathbf{q}, \lambda\xi) = e^2 \int_0^1 ds V(\mathbf{q} + \lambda\xi(s))$ , soit  $\sigma$  le spin de la particule, alors comme l'hamiltonien  $H$  est indépendant du spin, il existe une dégénérescence de spin  $(2\sigma + 1)$ , par conséquent

$$Q = \int d^3\mathbf{q} \langle \mathbf{q} | e^{-\beta H} | \mathbf{q} \rangle = (2\sigma + 1) \int d^3\mathbf{q} \left( \frac{1}{2\pi\lambda^2} \right)^{3/2} \int D[\xi(\cdot)] e^{-\beta V(\mathbf{q}, \lambda\xi)}. \quad (\text{A.112})$$

On remarque que cette dernière expression ressemble formellement déjà fortement à une expression classique. Néanmoins, une différence importante est la présence d'un nouveau potentiel de self-énergie d'un filament  $\mathbf{q} + \lambda\xi$  (voir la figure A.4) dans le poids de Gibbs, ainsi que la somme sur toutes les formes possibles de filaments grâce à l'intégration fonctionnelle.

Ainsi, par analogie formelle uniquement, on peut interpréter une particule ponctuelle quantique comme l'objet classique étendu qu'est un filament fermé d'origine en  $\mathbf{q}$ . La fermeture du filament est la conséquence du fait que le pont brownien satisfait  $\xi(0) = \xi(1) = 0$ , c'est-à-dire que le pont brownien soit fermé. Ce filament joue le même rôle qu'un degré de liberté *interne* classique supplémentaire, qui représente la fluctuation quantique, d'amplitude de l'ordre de la longueur d'onde thermique de de Broglie  $\lambda = \hbar\sqrt{\frac{\beta}{m}}$ . Étant donné que la mesure  $D[\xi(\cdot)]$  est gaussienne, alors son poids statistique décroît très rapidement avec la forme du filament  $\xi$ , et donc seuls les petits filaments, c'est-à-dire les faibles fluctuations quantiques, contribuent significativement.

3. Il s'agit du prolongement analytique de l'opérateur d'évolution aux temps purement imaginaires.

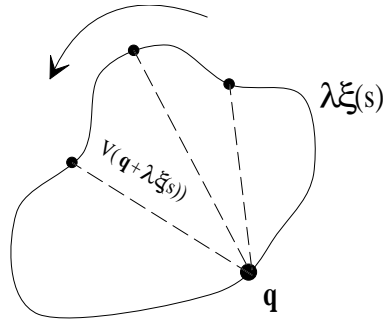


FIG. A.4 – Potentiel de self-énergie d'une boucle

Ce potentiel diffère d'une énergie d'interaction classique, car seulement le point racine  $\mathbf{q}$  interagit avec l'ensemble du filament. Une énergie classique serait telle que chaque point interagisse avec l'ensemble du filament. C'est pourquoi on appellera souvent  $V(\mathbf{q}, \lambda\xi)$  "interaction bijective".

### A.13.2 Système à $N$ particules: système de filaments

Soit  $S$  espèces de particules,  $\mu_\alpha$  le potentiel chimique de l'espèce  $\alpha$ ,  $\zeta_\alpha = e^{\beta\mu_\alpha}$  la fugacité de l'espèce  $\alpha$ ,  $e_{\alpha_i}$  la charge de la particule  $i$  de l'espèce  $\alpha$ . Soit  $Q_N$  la fonction de partition canonique d'un système à  $N$  particules,  $\mathbb{Q}$  la fonction de partition grand-canonique, alors

$$\mathbb{Q} = \sum_{N=0}^{\infty} \zeta^N Q_N. \quad (\text{A.113})$$

On généralise facilement l'expression (A.112) donnant  $Q_{N=1}$  au système à  $N$  particules en apportant les modifications suivantes.

1. On a  $N$  particules de longueurs d'onde thermiques de de Broglie différentes, et donc

$$\left(\frac{1}{2\pi\lambda^2}\right)^{3/2} \doteq \prod_{i=1}^N \left(\frac{1}{2\pi\lambda_i^2}\right)^{3/2}. \quad (\text{A.114})$$

2. L'interaction est à deux corps dans un système de  $N$  particules, en excluant la self-énergie, ce qui mène à la substitution

$$\begin{aligned} V(\mathbf{q}, \lambda\xi) &\doteq \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N V(\mathbf{q}_i, \lambda_i \xi_i; \mathbf{q}_j, \lambda_j \xi_j) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N e_i e_j \int_0^1 ds V(\mathbf{q}_i + \lambda_i \xi_i(s) - \mathbf{q}_j - \lambda_j \xi_j(s)) \\ &\doteq U(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_N). \end{aligned} \quad (\text{A.115})$$

3. Les variables d'intégration de  $N$  filaments sont obtenues par les substitutions

$$D[\xi(\cdot)] \doteq \prod_{i=1}^N D[\xi_i(\cdot)] \quad (\text{A.116})$$

$$d^3\mathbf{q} \doteq \prod_{i=1}^N d^3\mathbf{q}_i. \quad (\text{A.117})$$

4. Les  $N$  particules ont des spins  $\sigma_i$  respectivement, ce qui engendre pour chacune d'entre elles une dégénérescence de  $(2\sigma_i + 1)$ .

$$(2\sigma + 1) \doteq \prod_{i=1}^N (2\sigma_i + 1) \quad (\text{A.118})$$

En remplaçant (A.114) à (A.118) dans (A.112) on obtient

$$Q_N = \prod_{i=1}^N \frac{2\sigma_i + 1}{(2\pi\lambda_i^2)^{3/2}} \int d^3\mathbf{q}_1 \dots d^3\mathbf{q}_N \int D[\xi_1(\cdot)] \dots D[\xi_N(\cdot)] e^{-\beta U(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_N)}. \quad (\text{A.119})$$

Soit  $N_\alpha$  le nombre de particules de l'espèce  $\alpha$ , alors

$$Q_N = \prod_{\alpha=1}^S \frac{1}{N_\alpha!} Q_{N_\alpha} \quad (\text{A.120})$$

$$Q_{N_\alpha} = \prod_{i=1}^{N_\alpha} \frac{2\sigma_{\alpha_i} + 1}{(2\pi\lambda_{\alpha_i}^2)^{3/2}} \int d^3\mathbf{q}_1 \dots d^3\mathbf{q}_{N_\alpha} \int D[\xi_1(\cdot)] \dots D[\xi_{N_\alpha}(\cdot)] e^{-\beta U(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{N_\alpha})}. \quad (\text{A.121})$$

Le facteur  $(N_\alpha!)^{-1}$  est la conséquence de du caractère indiscernable des particules au sein d'une même espèce. Ainsi, étant donné qu'on a la contrainte  $\sum_{\alpha=1}^S N_\alpha = N$ , (A.113) devient

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} &= \sum_{\substack{N_{\alpha_1}, \dots, N_{\alpha_S} \\ \sum_{\alpha=1}^S N_\alpha = N}}^{\infty} \zeta^{\sum_{\alpha=1}^S N_\alpha} \prod_{\alpha=1}^S \frac{1}{N_\alpha!} Q_{N_\alpha} \\ &= \sum_{\{N_\alpha\}}^{\infty} \prod_{\alpha=1}^S \zeta_\alpha^{N_\alpha} \frac{1}{N_\alpha!} Q_{N_\alpha}. \end{aligned} \quad (\text{A.122})$$

Soit  $z_\alpha = (2\sigma_\alpha + 1)e^{-\beta\mu_\alpha} (2\pi\lambda_\alpha^2)^{-3/2}$  l'activité de l'espèce  $\alpha$ , alors en insérant (A.121) dans (A.122) on obtient

$$\mathbb{Q} = \sum_{\{N_\alpha\}}^{\infty} \prod_{\alpha=1}^S \frac{1}{N_\alpha!} e^{\beta\mu_\alpha N_\alpha} \underbrace{\prod_{i=1}^{N_\alpha} \frac{2\sigma_{\alpha_i} + 1}{(2\pi\lambda_{\alpha_i}^2)^{3/2}}}_{=Z_\alpha^{N_\alpha}} \int d^3\mathbf{q}_1 \dots d^3\mathbf{q}_{N_\alpha} \int D[\xi_1(\cdot)] \dots D[\xi_{N_\alpha}(\cdot)] e^{-\beta U(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{N_\alpha})}. \quad (\text{A.123})$$

En utilisant l'identité

$$\sum_{\{N_\alpha\}}^{\infty} \prod_{\alpha=1}^S \frac{1}{N_\alpha!} \dots = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_N}^S \dots \quad (\text{A.124})$$

et en remarquant que  $\zeta_\alpha^{N_\alpha} Q_{N_\alpha}$  est invariant sous les permutations de particules appartenant à la même espèce, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_N}^S \left( \prod_{i=1}^N z_{\alpha_i} \right) \int d^3\mathbf{q}_1 \dots d^3\mathbf{q}_N \int D[\xi_1(\cdot)] \dots D[\xi_N(\cdot)] e^{-\beta U(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_N)} \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \underbrace{\left( \prod_{i=1}^N \int d^3\mathbf{q}_i \int D[\xi_i(\cdot)] z_{\alpha_i} \right)}_{\doteq \hat{O}(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_N)} e^{-\beta U(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_N)}. \end{aligned} \quad (\text{A.125})$$

Dans l'expression précédente,  $\hat{O}(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_N)$  est un opérateur agissant sur  $e^{-\beta U(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_N)}$ . Soit l'espace de phase élargi des filaments  $\mathcal{F} = (\alpha, \mathbf{q}, \xi)$ , avec  $\alpha$  qui indique l'espèce,  $\mathbf{q}$  le point racine de

la particule,  $\xi$  son filament. Soit

$$U(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_N) = \sum_{i \leq j}^N V_{\alpha_i \alpha_j}(\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j) \quad (\text{A.126})$$

$$V_{\alpha_i \alpha_j}(\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j) = \int_0^1 ds V(\mathbf{q}_i + \lambda_{\alpha_i} \xi_i(s) - \mathbf{q}_j - \lambda_{\alpha_j} \xi_j(s)) \quad (\text{A.127})$$

$$z(\mathcal{F}_i) = \frac{(2\sigma_{\alpha_i} + 1)e^{\beta\mu_{\alpha_i}}}{(2\pi\lambda_{\alpha_i}^2)^{3/2}} \quad (\text{A.128})$$

$$\int d\mathcal{F}_i = \sum_{\alpha_i=1}^S \int d^3 \mathbf{q}_i \int D[\xi_i(\cdot)], \quad (\text{A.129})$$

alors

$$\mathbb{Q} = \sum_{N=0}^{\infty} \int \prod_{i=1}^N d\mathcal{F}_i z(\mathcal{F}_i) e^{-\beta U(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_N)}. \quad (\text{A.130})$$

Cette dernière expression est formellement identique à celle du gaz de Coulomb classique, à la seule différence que l'espace de phase semi-classique est pourvu d'un degré de liberté supplémentaire, qui est la forme du filament  $\xi$ . Néanmoins, le système de filaments diffère d'un assemblage classique de filaments distribués selon la mesure de Wiener, car le potentiel d'interaction  $V_{\alpha_i \alpha_j}(\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j)$  entre deux filaments diffère du potentiel classique. En effet,  $V_{\alpha_i \alpha_j}(\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j)$  est une interaction bijective, comme l'illustre la figure 4.1 à la page 49, tandis que l'interaction classique serait

$$V_{\alpha_i \alpha_j}^{\text{cl}}(\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j) = \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 V(\mathbf{q}_i + \lambda_{\alpha_i} \xi_i(s) - \mathbf{q}_j - \lambda_{\alpha_j} \xi_j(s)), \quad (\text{A.131})$$

pour laquelle chaque point du filament  $i$  interagit avec l'ensemble du filament  $j$ . C'est justement cette différence d'interaction qui est à l'origine de l'écran non exponentiel dans les systèmes quantiques de Coulomb, et de la décroissance en  $|\mathbf{q}|^{-6}$  des corrélations tronquées (voir [MB]). En guise de résumé, dans le système semi-classique une particule ponctuelle peut être représentée par un filament chargé dont l'extension spatiale est reliée à l'amplitude des fluctuations quantiques. Les filaments interagissent entre eux par une interaction de type bijectif, et détruisent l'écran exponentiel de Debye.

## A.14 Fonction de corrélation semi-classique $C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b)$ à un ordre quelconque

Soit  $\langle \cdot \rangle_{\text{s.i.}}$  la moyenne sur l'espace des filaments sans interaction entre  $\Lambda_a$  et  $\Lambda_b$ , alors comme la formulation semi-classique sur l'espace de phase élargi est similaire à celle du cas classique, l'expression de la fonction de corrélation  $C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b)$  à un ordre quelconque dans le potentiel d'interaction  $U(\mathcal{F}'_a, \mathcal{F}'_b)$  peut être déduite directement de celle du cas classique (A.29).

**Proposition A.4** Soit  $\hat{\theta}(\mathcal{F}_a, \mathcal{F}_b) = \hat{C}(\mathcal{F}_a) \hat{C}(\mathcal{F}_b)$ , soit  $\hat{B}_{\alpha'_a \alpha'_b}(\mathcal{F}'_a, \mathcal{F}'_b) = \hat{\rho}_{\alpha'_a}(\mathcal{F}'_a) \hat{\rho}_{\alpha'_b}(\mathcal{F}'_b)$ ,  $\mathcal{F}'_{ai} = (\alpha'_{ai}, \mathbf{y}_{ai}, \chi_{ai})$ , alors la fonction de corrélation entre  $\mathbf{q}_a \in \Lambda_a$  et  $\mathbf{q}_b \in \Lambda_b$  à l'ordre  $k$  dans le potentiel d'interaction  $U(\mathcal{F}'_a, \mathcal{F}'_b)$  est donnée par

$$\begin{aligned} C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b)_{\mathcal{O}(\beta^k)} &= \frac{(-\beta)^k}{k!} \int_{\Lambda_a} D[\xi_a(\cdot)] \int_{\Lambda_b} D[\xi_b(\cdot)] \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{y}_{a1} \dots d^3 \mathbf{y}_{ak} \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{y}_{b1} \dots d^3 \mathbf{y}_{bk} \\ &\int_{\Lambda_a} D[\chi_{a1}(\cdot)] \dots D[\chi_{ak}(\cdot)] \int_{\Lambda_b} D[\chi_{b1}(\cdot)] \dots D[\chi_{bk}(\cdot)] \\ &\left( \prod_{i=1}^k \sum_{\alpha'_{ai}=1}^S \sum_{\alpha'_{bi}=1}^S e^{\alpha'_{ai}} e^{\alpha'_{bi}} V_{\alpha'_{ai} \alpha'_{bi}}(\mathcal{F}'_{ai}, \mathcal{F}'_{bi}) \right) \\ &\left\langle \hat{\theta}(\mathcal{F}_a, \mathcal{F}_b) \prod_{j=1}^k \hat{B}_{\alpha'_a \alpha'_b}(\mathcal{F}'_{aj}, \mathcal{F}'_{bj}) \right\rangle_{\text{s.i., } T} \end{aligned}$$

(A.132)

On note que  $I \doteq \prod_{i=1}^k \sum_{\alpha'_{a_i}=1}^{\mathcal{S}} \sum_{\alpha'_{b_i}=1}^{\mathcal{S}} e_{\alpha'_{a_i}} e_{\alpha'_{b_i}} V_{\alpha'_{a_i} \alpha'_{b_i}}(\mathcal{F}'_{a_i}, \mathcal{F}'_{b_i})$  agit comme un opérateur sur la fonction de corrélation tronquée à  $k$  points  $\left\langle \hat{\theta}(\mathcal{F}_a, \mathcal{F}_b) \prod_{j=1}^k \hat{B}_{\alpha'_{a_j} \alpha'_{b_j}}(\mathcal{F}'_{a_j}, \mathcal{F}'_{b_j}) \right\rangle_{\text{s.i., } T}$ . En effet,  $I$  est un opérateur qui réalise une somme sur  $\alpha'_{a_i}$  et  $\alpha'_{b_i}$ ,  $i = 1, \dots, \mathcal{S}$ , en attribuant un certain poids à la fonction de corrélation tronquée correspondante. Dans le cas où le plasma est constitué de particules de même masse<sup>4</sup>  $m_{\alpha_{a_i}} = m_{\alpha_{b_j}} = m \forall ij$ , (A.132) se simplifie, car on a alors  $V_{\alpha'_{a_i} \alpha'_{b_i}}(\mathcal{F}'_{a_i}, \mathcal{F}'_{b_i}) = V(\mathcal{F}'_{a_i}, \mathcal{F}'_{b_i})$ , pour prendre une forme qui ressemble à l'expression classique, avec des opérateurs de densité de charge au lieu des opérateurs de densité de particules apparaissant dans (A.132).

**Corollaire A.1** *Soit un plasma de particules de même masse  $m_{\alpha_{a_i}} = m_{\alpha_{b_j}} = m \forall ij$ , soit  $\hat{A}(\mathcal{F}'_a, \mathcal{F}'_b) = \hat{C}(\mathcal{F}'_a) \hat{C}(\mathcal{F}'_b)$ ,  $\hat{\theta}(\mathcal{F}_a, \mathcal{F}_b) = \hat{C}(\mathcal{F}_a) \hat{C}(\mathcal{F}_b)$ , alors la fonction de corrélation entre  $\mathbf{q}_a \in \Lambda_a$  et  $\mathbf{q}_b \in \Lambda_b$  à l'ordre  $k$  dans le potentiel d'interaction  $U(\mathcal{F}'_a, \mathcal{F}'_b)$  est donnée par*

$$C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b)_{\mathcal{O}(\beta^k)} = \frac{(-\beta)^k}{k!} \int_{\Lambda_a} \mathcal{D}[\boldsymbol{\xi}_a(\cdot)] \int_{\Lambda_b} \mathcal{D}[\boldsymbol{\xi}_b(\cdot)] \int_{\Lambda_a^k} d^3 \mathbf{y}_{a1} \dots d^3 \mathbf{y}_{ak} \int_{\Lambda_b^k} d^3 \mathbf{y}_{b1} \dots d^3 \mathbf{y}_{bk} \\ \int_{\Lambda_a^k} \mathcal{D}[\boldsymbol{\chi}_{a1}(\cdot)] \dots \mathcal{D}[\boldsymbol{\chi}_{ak}(\cdot)] \int_{\Lambda_b^k} \mathcal{D}[\boldsymbol{\chi}_{b1}(\cdot)] \dots \mathcal{D}[\boldsymbol{\chi}_{bk}(\cdot)] \\ \prod_{i=1}^k V(\mathcal{F}'_{a_i}, \mathcal{F}'_{b_i}) \left\langle \hat{\theta}(\mathcal{F}_a, \mathcal{F}_b) \prod_{j=1}^k \hat{A}(\mathcal{F}'_{a_j}, \mathcal{F}'_{b_j}) \right\rangle_{\text{s.i., } T} \quad (\text{A.133})$$

Cette dernière expression est celle qui ressemble le plus à celle du cas classique de par sa structure formelle. On peut comprendre pourquoi, outre les intégrales fonctionnelles, la différence entre l'expression de  $C(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b)_{\mathcal{O}(\beta^k)}$  semi-classique et classique se manifeste formellement au travers des différences de masse entre les espèces de particules. En effet, les fluctuations quantiques (ce qui revient dans notre cas à considérer l'extension spatiale des filaments) dépendent de la masse des particules. Ainsi, dans la limite macroscopique (qui est ici équivalente à la limite classique  $\hbar \rightarrow 0$ ),  $m_{\alpha_{a_i}} \rightarrow \infty$  et  $m_{\alpha_{b_j}} \rightarrow \infty \forall ij$ , on a  $\lambda_{\alpha_{a_i}} = \lambda_{\alpha_{b_j}} = 0$ , et donc il n'y a plus de fluctuations quantiques: l'extension spatiale des filaments se réduit à un point, comme en physique classique. Ainsi, le fait qu'il existe des masses différentes doit mettre en évidence un phénomène purement quantique, ce que montrent bien (A.132) et (A.133).

**Preuve.** Nous commençons par montrer que (A.133) est un cas particulier de (A.132). Supposons que les masses des particules soient toutes égales à  $m$ , alors il est évident par la définition du potentiel d'interaction (4.27) que  $V_{\alpha'_{a_i} \alpha'_{b_i}}(\mathcal{F}'_{a_i}, \mathcal{F}'_{b_i}) = V(\mathcal{F}'_{a_i}, \mathcal{F}'_{b_i})$  est indépendant du type de particules. Ainsi, avec (4.23), il est immédiat que de l'expression générale de la fonction de corrélation (A.132) on obtient (A.133).

Il reste à prouver la relation (A.132). Pour ce faire, nous allons montrer, en partant de la preuve du cas classique, comment on obtient la formule semi-classique (A.133). Soit  $\hat{\theta}(\mathcal{F}_a, \mathcal{F}_b) \doteq \hat{C}(\mathcal{F}_a) \hat{C}(\mathcal{F}_b)$ , alors on remarque que, grâce au formalisme des filaments, en posant  $H = H_0 + W$ , le résultat (A.32) de la section A.6 est aussi valable dans le cas semi-classique. À ce stade, dans le cas classique on insérait la définition de la perturbation, dont l'expression était

$$W = \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{y}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{y}_b \underbrace{\hat{C}(\mathbf{y}_a) \hat{C}(\mathbf{y}_b)}_{\doteq \hat{A}(\mathbf{y}_a, \mathbf{y}_b)} V(\mathbf{y}_a - \mathbf{y}_b). \quad (\text{A.134})$$

4. Le plasma de particules de même masse est un modèle de type OCP ("One Component Plasma").

Évidemment, cette dernière expression diffère de celle du cas semi-classique. Il s'agit d'ailleurs de la seule différence. Ainsi

$$\begin{aligned}
W &= U(\mathcal{F}'_a, \mathcal{F}'_b) \\
&= \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{y}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{y}_b \int_{\Lambda_a} D[\boldsymbol{\chi}_a(\cdot)] \int_{\Lambda_b} D[\boldsymbol{\chi}_b(\cdot)] \sum_{\alpha'_a=1}^S e_{\alpha'_a} \hat{\rho}_{\alpha'_a}(\mathcal{F}'_a) \sum_{\alpha'_b=1}^S e_{\alpha'_b} \hat{\rho}_{\alpha'_b}(\mathcal{F}'_b) V_{\alpha'_a \alpha'_b}(\mathcal{F}'_a, \mathcal{F}'_b) \\
&= \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{y}_a \int_{\Lambda_b} d^3 \mathbf{y}_b \int_{\Lambda_a} D[\boldsymbol{\chi}_a(\cdot)] \int_{\Lambda_b} D[\boldsymbol{\chi}_b(\cdot)] \sum_{\alpha'_a=1}^S \sum_{\alpha'_b=1}^S e_{\alpha'_a} e_{\alpha'_b} \underbrace{\hat{\rho}_{\alpha'_a}(\mathcal{F}'_a) \hat{\rho}_{\alpha'_b}(\mathcal{F}'_b)}_{\doteq \hat{B}_{\alpha'_a \alpha'_b}(\mathcal{F}'_a, \mathcal{F}'_b)} V_{\alpha'_a \alpha'_b}(\mathcal{F}'_a, \mathcal{F}'_b) \quad (\text{A.135})
\end{aligned}$$

Ensuite, on avait obtenu l'expression de la fonction de corrélation aux différents ordres en remplaçant (A.134) dans (A.32). Dans notre cas, la démarche est exactement la même: il s'agit simplement de remplacer (A.135) dans (A.32), sans oublier d'intégrer fonctionnellement sur les formes des filaments  $\boldsymbol{\xi}_a$  et  $\boldsymbol{\xi}_b$ , pour passer de  $C_T(\mathcal{F}_a; \mathcal{F}_b)$  à  $C_T(\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b)$ . On peut soit faire les calculs explicitement, soit repartir de l'expression classique (A.29) et observer la forme de la perturbation semi-classique  $W$ , pour en déduire les termes qui ne se factorisent pas, et ainsi modifier judicieusement (A.29) pour finalement obtenir (A.132). Si cet argument ne suffit pas à convaincre le lecteur, il est alors possible de faire le calcul explicite aux ordres  $\beta^1$  et  $\beta^2$ , les calculs étant longs mais très simples. ■

## A.15 Lemme d'égalité des forces classique et semi-classique dans la limite $\hbar \rightarrow 0$

**Lemme A.5** Soit  $f(d)_{\mathcal{O}(\beta)}^{\text{sc}}$  l'expression semi-classique de la force à l'ordre linéaire dans le potentiel d'interaction  $U(\mathcal{F}'_a, \mathcal{F}'_b)$ ,  $f(d)_{\mathcal{O}(\beta)}^{\text{c}}$  l'expression classique de cette même force, alors

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} f(d)_{\mathcal{O}(\beta)}^{\text{sc}} = f(d)_{\mathcal{O}(\beta)}^{\text{c}}. \quad (\text{A.136})$$

**Preuve.** Pour limiter la quantité d'arguments décrivant les fonctions, nous ne mettrons pas explicitement en évidence les symétries, mais plutôt restons dans le cas général. Par définition

$$\begin{aligned}
\rho_{\alpha_a \alpha'_a; T}^{\text{s.i.}}(\mathcal{F}_a; \mathcal{F}'_a) &= \langle \hat{\rho}_{\alpha_a}(\mathcal{F}_a); \hat{\rho}_{\alpha'_a}(\mathcal{F}'_a) \rangle_{\text{s.i., } T} \\
&= \langle \hat{\rho}_{\alpha_a}(\mathcal{F}_a) \hat{\rho}_{\alpha'_a}(\mathcal{F}'_a) \rangle_{\text{s.i.}} - \langle \hat{\rho}_{\alpha_a}(\mathcal{F}_a) \rangle_{\text{s.i.}} \langle \hat{\rho}_{\alpha'_a}(\mathcal{F}'_a) \rangle_{\text{s.i.}} \\
&= \rho_{\alpha_a \alpha'_a}^{\text{s.i.}}(\mathcal{F}_a, \mathcal{F}'_a) - \rho_{\alpha_a}^{\text{s.i.}}(\mathcal{F}_a) \rho_{\alpha'_a}^{\text{s.i.}}(\mathcal{F}'_a). \quad (\text{A.137})
\end{aligned}$$

Étudions l'effet de la limite  $\hbar \rightarrow 0$  sur  $\rho_{\alpha_a}^{\text{s.i.}}(\mathcal{F}_a)$ . Nous omettons, pour alléger la notation, d'écrire la contrainte d'électronéutralité  $\sum_{\alpha_a=1}^S e_{\alpha_a} = \sum_{\alpha_b=1}^S e_{\alpha_b} = 0$ .

$$\begin{aligned}
\lim_{\hbar \rightarrow 0} \rho_{\alpha_a}^{\text{s.i.}}(\mathcal{F}_a) &= \lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{1}{Q_{\Lambda_a}} \int d\mathcal{F}_a e^{-\beta U(\mathcal{F}_a)} \hat{\rho}_{\alpha_a}(\mathcal{F}_a) \\
&= \lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{\int_{\Lambda_a^N} d^3 \mathbf{r}_{a1} \dots d^3 \mathbf{r}_{aN} \int_{\Lambda_a^N} D[\boldsymbol{\mu}_{a1}(\cdot)] \dots D[\boldsymbol{\mu}_{aN}(\cdot)] \prod_{i=1}^N \frac{2\sigma_{\alpha_{a_i}} + 1}{(2\pi \lambda_{\alpha_{a_i}}^2)^{3/2}} e^{-\beta U(\mathcal{F}_a)} \hat{\rho}_{\alpha_a}(\mathcal{F}_a)}{\int_{\Lambda_a^N} d^3 \mathbf{r}_{a1} \dots d^3 \mathbf{r}_{aN} \int_{\Lambda_a^N} D[\boldsymbol{\mu}_{a1}(\cdot)] \dots D[\boldsymbol{\mu}_{aN}(\cdot)] \prod_{i=1}^N \frac{2\sigma_{\alpha_{a_i}} + 1}{(2\pi \lambda_{\alpha_{a_i}}^2)^{3/2}} e^{-\beta U(\mathcal{F}_a)}}
\end{aligned}$$

Or, dans la limite classique  $\hbar \rightarrow 0$ , les particules sont classiques, donc leur spin est nul  $\sigma_{\alpha_i} = 0 \forall i = 1, \dots, N$ . De plus

$$\begin{aligned} \lim_{\hbar \rightarrow 0} U(\mathcal{F}_a) &= \lim_{\hbar \rightarrow 0} \sum_{1 \leq i < j \leq 2N} e_{\alpha_i} e_{\alpha_j} V_{\alpha_i \alpha_j}(\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j) \mathcal{X}_{\Lambda_a}(\mathbf{r}_i) \mathcal{X}_{\Lambda_a}(\mathbf{r}_j) \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq 2N} e_{\alpha_i} e_{\alpha_j} \underbrace{\lim_{\hbar \rightarrow 0} \int_0^1 ds V(\mathbf{r}_i + \lambda_{\alpha_i} \boldsymbol{\mu}_i(s) - \mathbf{r}_j - \lambda_{\alpha_j} \boldsymbol{\mu}_j(s))}_{=V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)} \mathcal{X}_{\Lambda_a}(\mathbf{r}_i) \mathcal{X}_{\Lambda_a}(\mathbf{r}_j) \\ &= U(r_a). \end{aligned} \quad (\text{A.138})$$

Ainsi, en admettant qu'il est possible de permuter la limite et l'intégrale, en remarquant que  $\lim_{\hbar \rightarrow 0} \lambda_{\alpha_i} = 0$  devient par conséquent indépendant des particules dans cette même limite, les facteurs  $\prod_{i=1}^N \frac{2\sigma_{\alpha_i} + 1}{(2\pi\lambda_{\alpha_i}^2)^{3/2}}$  se simplifient, et donc

$$\begin{aligned} \lim_{\hbar \rightarrow 0} \rho_{\alpha_a}^{\text{s.i.}}(\mathcal{F}_a) &= \frac{\sum_{\alpha_{a_1}=1}^S \int_{\Lambda_a^N} d^3 \mathbf{r}_{a1} \dots d^3 \mathbf{r}_{aN} e^{-\beta U(r_a)} \int_{\Lambda_a^N} D[\boldsymbol{\mu}_{a1}(\cdot)] \dots D[\boldsymbol{\mu}_{aN}(\cdot)] \overbrace{\sum_{i=1}^N \delta_{\alpha_a, \alpha_i} \delta(\mathbf{r}_{ai} - \mathbf{q}_a) \delta(\boldsymbol{\mu}_{ai} - \boldsymbol{\xi}_a)}{=\hat{\rho}_{\alpha_a}(\mathcal{F}_a)}}}{\sum_{\alpha_{a_1}=1}^S \int_{\Lambda_a^N} d^3 \mathbf{r}_{a1} \dots d^3 \mathbf{r}_{aN} e^{-\beta U(r_a)} \int_{\Lambda_a^N} D[\boldsymbol{\mu}_{a1}(\cdot)] \dots D[\boldsymbol{\mu}_{aN}(\cdot)]} \\ &= \frac{\sum_{\alpha_{a_1}=1}^S \int_{\Lambda_a^N} d^3 \mathbf{r}_{a1} \dots d^3 \mathbf{r}_{aN} e^{-\beta U(r_a)} \sum_{i=1}^N \delta_{\alpha_a, \alpha_i} \delta(\mathbf{r}_{ai} - \mathbf{q}_a) \int_{\Lambda_a^N} D[\boldsymbol{\mu}_{a1}(\cdot)] \dots D[\boldsymbol{\mu}_{aN}(\cdot)] \delta(\boldsymbol{\mu}_{ai} - \boldsymbol{\xi}_a)}{\sum_{\alpha_{a_1}=1}^S \int_{\Lambda_a^N} d^3 \mathbf{r}_{a1} \dots d^3 \mathbf{r}_{aN} e^{-\beta U(r_a)} \int_{\Lambda_a^N} D[\boldsymbol{\mu}_{a1}(\cdot)] \dots D[\boldsymbol{\mu}_{aN}(\cdot)]} \end{aligned} \quad (\text{A.139})$$

En observant l'expression (4.53) donnant  $f(d)_{\mathcal{O}(\beta)}$ , on voit qu'apparaissent encore quatre intégrations fonctionnelles sur  $\boldsymbol{\xi}_a$ ,  $\boldsymbol{\xi}_b$ ,  $\boldsymbol{\chi}_a$  et  $\boldsymbol{\chi}_b$ . Ainsi, en utilisant la définition classique de l'observable de densité de particules  $\hat{\rho}_{\alpha_a}(\mathbf{q}_a)$  et l'identité  $\int_{\Lambda_a} D[\boldsymbol{\xi}_a(\cdot)] \delta(\boldsymbol{\mu}_{ai} - \boldsymbol{\xi}_a) = \mathbb{1}$ , on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{\hbar \rightarrow 0} \int_{\Lambda_a} D[\boldsymbol{\xi}_a(\cdot)] \rho_{\alpha_a}^{\text{s.i.}}(\mathcal{F}_a) &= \frac{\sum_{\alpha_{a_1}=1}^S \int_{\Lambda_a^N} d^3 \mathbf{r}_{a1} \dots d^3 \mathbf{r}_{aN} e^{-\beta U(r_a)} \overbrace{\sum_{i=1}^N \delta_{\alpha_a, \alpha_i} \delta(\mathbf{r}_{ai} - \mathbf{q}_a)}{=\hat{\rho}_{\alpha_a}(\mathbf{q}_a)}}{\sum_{\alpha_{a_1}=1}^S \int_{\Lambda_a^N} d^3 \mathbf{r}_{a1} \dots d^3 \mathbf{r}_{aN} e^{-\beta U(r_a)}} \\ &= \rho_{\alpha_a}^{\Lambda_a}(\mathbf{q}_a). \end{aligned} \quad (\text{A.140})$$



Les calculs sont similaires pour  $\rho_{\alpha'_a}^{\text{s.i.}}(\mathcal{F}'_a)$ ,  $\rho_{\alpha'_b}^{\text{s.i.}}(\mathcal{F}'_b)$ ,  $\rho_{\alpha'_a}^{\text{s.i.}}(\mathcal{F}'_a)$ ,  $\rho_{\alpha'_a \alpha'_a}^{\text{s.i.}}(\mathcal{F}_a, \mathcal{F}'_a)$ ,  $\rho_{\alpha'_b \alpha'_b}^{\text{s.i.}}(\mathcal{F}_b, \mathcal{F}'_b)$ , donc

$$\begin{aligned}
\lim_{\hbar \rightarrow 0} f(d)_{\mathcal{O}(\beta)}^{\text{sc}} &= -\beta \int_{\Omega^4} dq_{a_1} dq_{b_1} dy_{a_1} dy_{b_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_a d^2 \bar{\mathbf{q}}_b \sum_{\substack{\alpha_a=1 \\ \alpha'_a=1}}^S \sum_{\substack{\alpha_b=1 \\ \alpha'_b=1}}^S e_{\alpha_a} e_{\alpha'_a} e_{\alpha_b} e_{\alpha'_b} \int_0^1 ds \\
&\lim_{\hbar \rightarrow 0} \left( \int_{\Lambda_a} D[\xi_a(\cdot)] \int_{\Lambda_a} D[\chi_a(\cdot)] \left( \rho_{\alpha_a \alpha'_a}^{\text{s.i.}}(\mathcal{F}_a, \mathcal{F}'_a) - \rho_{\alpha_a}^{\text{s.i.}}(\mathcal{F}_a) \rho_{\alpha'_a}^{\text{s.i.}}(\mathcal{F}'_a) \right) \right. \\
&\quad \left. \int_{\Lambda_b} D[\xi_b(\cdot)] \int_{\Lambda_b} D[\chi_b(\cdot)] \left( \rho_{\alpha_b \alpha'_b}^{\text{s.i.}}(\mathcal{F}_b, \mathcal{F}'_b) - \rho_{\alpha_b}^{\text{s.i.}}(\mathcal{F}_b) \rho_{\alpha'_b}^{\text{s.i.}}(\mathcal{F}'_b) \right) \right) \\
&\int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{y}}_a V(|y_{a_1} + y_{b_1} - d|, |\bar{\mathbf{y}}_a|) \mathbf{F}(q_{a_1} + q_{b_1} - d, |\bar{\mathbf{q}}_a - \bar{\mathbf{q}}_b + \bar{\mathbf{y}}_a|) \\
&= -\beta \int_{\Omega^4} dq_{a_1} dq_{b_1} dy_{a_1} dy_{b_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_a d^2 \bar{\mathbf{q}}_b \sum_{\substack{\alpha_a=1 \\ \alpha'_a=1}}^S \sum_{\substack{\alpha_b=1 \\ \alpha'_b=1}}^S e_{\alpha_a} e_{\alpha'_a} e_{\alpha_b} e_{\alpha'_b} \\
&\quad \left( \rho_{\alpha_a \alpha'_a}^{\text{s.i.}}(\mathbf{q}_a, \mathbf{y}_a) - \rho_{\alpha_a}^{\text{s.i.}}(\mathbf{q}_a) \rho_{\alpha'_a}^{\text{s.i.}}(\mathbf{y}_a) \right) \left( \rho_{\alpha_b \alpha'_b}^{\text{s.i.}}(\mathbf{q}_b, \mathbf{y}_b) - \rho_{\alpha_b}^{\text{s.i.}}(\mathbf{q}_b) \rho_{\alpha'_b}^{\text{s.i.}}(\mathbf{y}_b) \right) \\
&\int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{y}}_a V(|y_{a_1} + y_{b_1} - d|, |\bar{\mathbf{y}}_a|) \mathbf{F}(q_{a_1} + q_{b_1} - d, |\bar{\mathbf{q}}_a - \bar{\mathbf{q}}_b + \bar{\mathbf{y}}_a|) \\
&= -\beta \int_{\Omega^4} dq_{a_1} dq_{b_1} dy_{a_1} dy_{b_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_a d^2 \bar{\mathbf{q}}_b C_T^{\text{s.i.}}(\mathbf{q}_a; \mathbf{y}_a) C_T^{\text{s.i.}}(\mathbf{q}_b; \mathbf{y}_b) \\
&\int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{y}}_a V(|y_{a_1} + y_{b_1} - d|, |\bar{\mathbf{y}}_a|) \mathbf{F}(q_{a_1} + q_{b_1} - d, |\bar{\mathbf{q}}_a - \bar{\mathbf{q}}_b + \bar{\mathbf{y}}_a|) \\
&\stackrel{(3.31)}{=} f(d)_{\mathcal{O}(\beta)}^c. \tag{A.141}
\end{aligned}$$

Ainsi, dans la limite classique  $\hbar \rightarrow 0$ , l'expression semi-classique se réduit à celle obtenue par le traitement classique, ce qui achève la preuve.  $\blacksquare$

## A.16 Règle d'électronéutralité des filaments

**Lemme A.6** Soit  $\rho_{\alpha_a \alpha'_a}^{\text{s.i.}; T}(q_{a_1}, \lambda_{\alpha_a} \xi_a; y_{a_1}, \lambda_{\alpha'_a} \chi_a : |\bar{\mathbf{q}}_a|)$  la fonction de corrélation tronquée de densité de particules du système de référence  $\Lambda_a = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | x_1 \in \Omega, (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2\}$ ,  $\Omega = ]-\infty, 0]$ , alors

$$\int_{\Omega} dq_{a_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_a \int_{\Lambda_a} D[\xi_a(\cdot)] \sum_{\alpha_a=1}^S e_{\alpha_a} \rho_{\alpha_a \alpha'_a}^{\text{s.i.}; T}(q_{a_1}, \lambda_{\alpha_a} \xi_a; y_{a_1}, \lambda_{\alpha'_a} \chi_a : |\bar{\mathbf{q}}_a|) = 0. \tag{A.142}$$

**Preuve.** Nous partons de la règle d'électronéutralité du formalisme des boucles démontrée dans [BM].

$$\int_{\Omega} dq_{a_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \bar{\mathbf{q}}_a \int_{\Lambda_a} D[\xi_a(\cdot)] \sum_{\alpha_a=1}^S \sum_{p_a=1}^{\infty} p_a z(\mathcal{L}'_a) e_{\alpha_a} \rho_{\alpha_a \alpha'_a}^{\text{s.i.}; T}(q_{a_1}, \lambda_{\alpha_a} \xi_a; y_{a_1}, \lambda_{\alpha'_a} \chi_a : |\bar{\mathbf{q}}_a - \bar{\mathbf{q}}'_a|) = 0 \tag{A.143}$$

On désire montrer explicitement que, dans la limite du cas semi-classique (formalisme des filaments), l'expression précédente s'appliquant au cas quantique (formalisme des boucles) se réduit à la règle d'électronéutralité du lemme A.6. Ceci doit trivialement être le cas par construction même de ces formalismes. En effet, le formalisme des filaments est un cas particulier de celui des boucles. Notons cependant que la règle d'électronéutralité quantique (A.143) est démontrée dans un espace infini

invariant par translation, et pas dans un demi-espace infini de symétrie de translation dans le plan engendré par  $\hat{e}_2$  et  $\hat{e}_3$  uniquement. En étudiant la preuve en question, le brisement de la symétrie de translation selon  $\hat{e}_1$ , ainsi que le travail dans un demi-espace infini, modifient la valeur de certaines fonctions, mais pas leurs propriétés essentielles à l'obtention de la règle d'électronéutralité (A.143).  $z(\mathcal{L}'_a)$  est l'activité de la boucle  $\mathcal{L}'_a$ , activité définie par (voir [MB] ou [Me2])

$$z(\mathcal{L}'_a) = \frac{(2\sigma_{\alpha'_a})e^{\beta\mu_{\alpha'_a}p'_a}(\eta_{\alpha'_a})^{p'_a-1}}{(2\pi\lambda_{\alpha'_a}^2)^{3/2}p'_a}e^{-\beta U(\mathcal{L}'_a)}, \quad (\text{A.144})$$

avec  $U(\mathcal{L}'_a)$  l'énergie d'interaction interne d'une boucle. Le cas particulier du système de filaments s'obtient en posant  $p_a = p'_a = 1$  (les filaments sont des boucles constituées d'une seule particule),  $U(\mathcal{L}'_a) = 0$  (le filament étant une boucle formée d'une seule particule, cette dernière ainsi que son filament ne peuvent interagir avec aucune autre particule ou filament),  $(\eta_{\alpha'_a})^{p'_a-1} = 1$  (statistique de Maxwell-Boltzmann), alors  $z(\mathcal{L}'_a) = z(\mathcal{F}'_a)$  peut être simplifié et la règle d'électronéutralité des filaments devient

$$\int_{\Omega} dq_{a_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\bar{\mathbf{q}}_a \int_{\Lambda_a} D[\xi_a(\cdot)] \sum_{\alpha_a=1}^S e_{\alpha_a} \rho_{\alpha_a}^{\text{s.i.}}(q_{a_1}, \lambda_{\alpha_a} \xi_a; y_{a_1}, \lambda_{\alpha'_a} \chi_a : |\bar{\mathbf{q}}_a - \bar{\mathbf{q}}'_a|) = 0. \quad (\text{A.145})$$

Étant donné que le système est invariant par translation dans le plan engendré par  $\hat{e}_2$  et  $\hat{e}_3$ , le changement de variables  $\bar{\mathbf{q}}_a \doteq \bar{\mathbf{q}}_a + \bar{\mathbf{q}}'_a$  permet d'obtenir la relation cherchée, ce qui achève la preuve. ■

La règle d'électronéutralité (A.142) mérite quelques commentaires. Pour simplifier les explications qui vont suivre, supposons que toutes les masses soient identiques, alors en appliquant l'opérateur  $\sum_{\alpha'_a=1}^S e_{\alpha'_a}$  sur (A.142), on obtient le cas particulier

$$\int_{\Omega} dq_{a_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\bar{\mathbf{q}}_a \int_{\Lambda_a} D[\xi_a(\cdot)] C_T^{\text{s.i.}}(q_{a_1}, \lambda \xi_a; y_{a_1}, \lambda \chi_a : |\bar{\mathbf{q}}_a|) = 0. \quad (\text{A.146})$$

Par analogie avec la règle d'électronéutralité  $\int_{\Omega} dq_{a_1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\bar{\mathbf{q}}_a C_T^{\text{s.i.}}(q_{a_1}; y_{a_1} : |\bar{\mathbf{q}}_a|) = 0$ , valable pour des fonctions de corrélation classique et quantique, on est tenté, par extension à des variables d'intégration de filaments, d'affirmer que (A.146) est une évidence. En vérité, cette relation est loin d'être triviale. Nous reprenons maintenant les notations de la figure A.5.

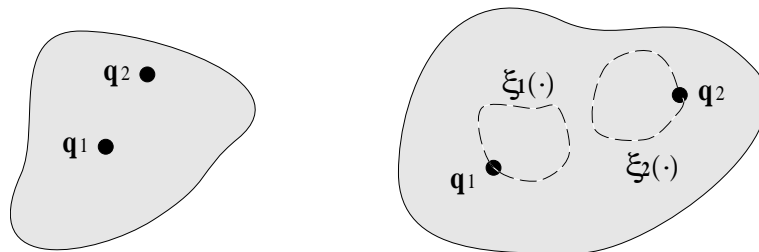


FIG. A.5 – Règle d'électronéutralité des filaments

La figure de gauche représente le cas classique, pour lequel la particule  $\mathbf{q}_1$  est entourée de son nuage d'écran représenté par la particule  $\mathbf{q}_2$  qui est délocalisée dans l'ensemble du nuage foncé. La figure de droite est à interpréter de façon similaire, mais dans le cas semi-classique, où chaque particule est affublée d'un filament chargé qui représente ses fluctuations quantiques.

Dans le cas classique, la règle d'électronéutralité s'énonce  $\int d^3\mathbf{q}_2 \langle \hat{\rho}_{\alpha_1}(\mathbf{q}_1); \hat{C}(\mathbf{q}_2) \rangle_T = 0$  (voir l'annexe A.10), ce qui signifie que la charge totale portée par le nuage de particules induit autour d'une particule donnée  $\mathbf{q}_1$  appartenant au système, est exactement égale et opposée à la charge portée en  $\mathbf{q}_1$ . Dans le cas semi-classique, la règle d'électronéutralité est  $\int d^3\mathbf{q}_2 \int D[\xi_2(\cdot)] \langle \hat{\rho}_{\alpha_1}(\mathcal{F}_1); \hat{C}(\mathcal{F}_2) \rangle_T =$

0, ce qui signifie que la charge totale portée par le nuage de filaments induit autour d'un filament donné  $\mathcal{F}_1 = (\alpha_1, \mathbf{q}_1, \xi_1(\cdot))$  appartenant au système, est exactement égale et opposée à la charge portée par  $\mathcal{F}_1$ . Cette règle n'est a priori pas évidente, car les filaments représentent un degré de liberté interne, et de plus interagissent entre eux par un potentiel de Coulomb bijectif, qui diffère d'une interaction classique.

# Bibliographie

- [BGKM] M. Bordag, B. Geyer, G.L. Klimchitskaya, V.M. Mostepanenko, *Casimir Force at Both Non-Zero Temperature and Finite Conductivity* (2000) (origine: <http://xxx.lanl.gov>, quant-ph/0003093).
- [BH] I. Brevik, J.S. Høyve, *Van der Waals Force between Dielectric Plates Derived from the Statistical Mechanical Path Integral*, *Physical A* **259**: 165-182 (1997).
- [BH2] I. Brevik, J.S. Høyve, *Van der Waals Force Derived from a Quantum Mechanical Path Integral Method*, *Physica A* **153**:420 (1988).
- [BM] V. Ballenegger, Ph.A. Martin, *Phys. Rev. E*, à paraître.
- [BRST] J. Blochi, J. Randrup, W.J. Swiatecki, C.F. Tsang, *Annals of Physics*, **105**, 427 (1977).
- [Ca] H.B.G. Casimir, *Proc. Kon. ned. Akad. Wetenschap. Ser. B (Proceedings of the Royal Academy of Sciences of the Netherlands)*, **51**, 793 (1948).
- [DY] V.N. Dubrava, V.A. Yampol'skii, *Temperature Effect in the Casimir Attraction of a Thin Metal Film* (2000) (origine: <http://xxx.lanl.gov>, cond-mat/0002368).
- [ER] E. Elizalde, A. Romeo, *Essentials of the Casimir Effect and its Computation*, *Am. J. Phys.*, **59**, 8: 711-719 (1991).
- [FJT] P.J. Forrester, B. Jancovici, G. Téllez, *Universality in Some Classical Coulomb Systems of Restricted Dimension*, *Journal of Statistical Physics*, **84**, Nos. 3/4 (1996).
- [Gr] Ch. Gruber, *Thermodynamique & Mécanique Statistique II*, EPFL Repro (1997).
- [JR] M.T. Jaekel, S. Reynaud, *Casimir Force Between Partially Transmitting Mirrors*, *Journal de Physique I* **1**:1395-1409 (1991) (origine: <http://xxx.lanl.gov>, quant-ph/0101067).
- [JŠ] B. Jancovici, L. Šamaj, *Coulomb Systems with Ideal Dielectric Boundaries: Free Fermion Point and Universality*, à paraître.
- [JT] B. Jancovici, G. Téllez, *The Ideal Conductor Limit*, *J. Phys. A: Math. Gen.* **29**:1155-1166 (1996).
- [JT2] B. Jancovici, G. Téllez, *Coulomb Systems seen as Critical Systems: Ideal Conductor Boundaries*, *Journal of Statistical Physics*, **82**, Nos. 3/4 (1996).
- [Ka] J.J. Kapusta, *Finite-Temperature Field Theory*, Cambridge University Press, chap. 1,2, Cambridge (1989).
- [La] S. K. Lamoreaux, *Demonstration of the Casimir Force in the 0.6 to 6  $\mu\text{m}$  Range*, *Phys Rev. Lett.*, **78**, 1 (1996).
- [La2] S. K. Lamoreaux, *Experimental Verifications of the Casimir Attractive Force between Solid Bodies* (1999) (origine: <http://xxx.lanl.gov>, quant-ph/9907076).
- [Li] E.M. Lifshitz, *The Theory of Molecular Attractive Forces between Solids*, *Soviet Physics*, **2**, 1 (January 1956).
- [LL] L. Landau, E.M. Lifshitz, *Electrodynamique des Milieux Continus*, Ed. Mir, Chap. **90**:475 (1969).
- [Ma] Philippe A. Martin, *Une initiation à l'intégrale fonctionnelle en physique quantique et statistique*, Cahiers de Physique, PPUR (1996).
- [Ma2] Philippe A. Martin, *Sum Rules in Charged Fluids*, *Rev. Mod. Phys.*, **60**:1075-1127 (1988).
- [Ma3] Philippe A. Martin, *Lecture on Fefferman's Proof of the Atomic and Molecular Nature of Matter*, *Acta Physica Polonica B*, **24**, 4 (1993).

- [MB] Philippe A. Martin, David C. Brydges, *Coulomb Systems at Low Density: A Review*, Journal of Statistical Physics, **96**, Nos 5/6 (1999).
- [Me] J. Mehra, *Temperature Correction to the Casimir Effect*, Physica **37**, 145-152 (1967).
- [Me2] O. Mermoud, *Application de l'intégrale de chemin au gaz de Fermi chargé*, travail pratique de diplôme sous la direction du Dr. A. Alastuey, Lyon (1995).
- [MR] U. Mohideen, A. Roy, *Precision Measurement of the Casimir Force from 0.1 to 0.9  $\mu\text{m}$* , Phys. Rev. Lett., **81**, 21: 4549-4552 (1998).
- [MT] V.M. Mostepanenko, N.N. Trunov, *The Casimir Effect and its Applications*, Oxford: Clarendon (1997).
- [SDM] J. Schwinger, L.L. DeRaad, Jr. & K.A. Milton, *Casimir Effect in Dielectrics*, Annals of Physics, **115**, 1 (1978).
- [SS] M. Schaden, L. Spruch, *Semiclassical Casimir Energies at Finite Temperature* (2000) (origine: <http://xxx.lanl.gov>, quant-ph/0012082).
- [TW] D. Tabor, R.H.S. Wintertan, *Surface Forces: Direct Measurement of Normal and Retarded Van der Waals Forces*, Nature **219**:1120-1121 (1968).

# Index

- action
  - euclidienne, 87
- activité, 48, 90
- condition de bord
  - Dirichlet, 9
- conducteur parfait, 9
- degré de liberté
  - interne, 50, 53
- dipôle, 24
- distribution
  - Dirac, 17
- diélectrique idéal, 9
- dérivation
  - fonctionnelle, 74
- développement
  - asymptotique, 14, 28, 38, 43, 55
  - multipolaire, 6, 31, 61
- effet
  - Casimir, 8
  - tunnel, 49
- électronneutralité, 29, 36, 39, 57, 95
- ensemble
  - canonique, 13
  - grand-canonique, 6, 89, 91
- espace
  - Hilbert, 46
  - phase, 14
- espace de phase
  - classique, 15
  - filaments, 47, 50, 90
- fluctuation
  - quantique, 47, 49
- fonction
  - corrélation, 16
  - corrélation de charge, 37, 41, 48, 67, 71
  - corrélation de charge semi-classique, 91
  - corrélation de filament, 48
  - corrélation tronquée de charge, 18, 24, 69, 70
  - corrélation à deux points, 16
  - Green, 87
  - indicatrice, 14, 48
  - partition, 88, 91
  - zeta de Riemann, 8, 35
- force
  - Casimir, 7
  - Coulomb, 15, 20, 30, 40, 45
  - Van der Waals, 5
  - Van der Waals non retardée, 7
  - Van der Waals retardée, 7
- formalisme
  - boucles, 47, 95
  - filaments, 46, 86
- fugacité, 89
- gaz
  - électrons libres, 5
- hamiltonien, 14, 46
- interaction
  - bijective, 49
- intégrale
  - Feynman-Kac, 87
  - fonctionnelle, 47
- invariance
  - translation, 20
- limite
  - classique, 49, 92
  - thermodynamique, 13
- longueur d'onde
  - thermique de de Broglie, 48
- mesure
  - Lebesgue, 16
  - pont brownien, 88
  - Wiener, 47
- multipôles, 7
- observable
  - $k$  points, 16
  - densité de filaments, 48
  - densité de particules, 17
  - deux points, 15
- opérateur
  - évolution, 87
- plasma, 6

- pont brownien, 47, 87
- potentiel
  - Coulomb, 6, 23, 48
- produit
  - convolution, 84
- radiation, 7
- rotation
  - Wick, 87
- règle de somme, 30, 83
- self-énergie, 66
- spin, 48, 88, 89
- statistique
  - Maxwell-Boltzmann, 46
- Stillinger-Lovett
  - condition du deuxième moment, 83
- symétrie
  - translation, 13, 18, 78
- système
  - classique, 22
  - infini, 64
  - semi-classique, 47
  - semi-infini, 11
- théorie
  - réponse linéaire, 84
- transformée
  - Fourier, 84

# Table des figures

1.1	Description élémentaire du système . . . . .	5
2.1	Description du système . . . . .	12
2.2	Confinement des particules par un potentiel doux . . . . .	13
2.3	Système fini $L^3$ . . . . .	13
2.4	Choix du repère . . . . .	19
3.1	Corrélation tronquée au premier ordre et dipôles . . . . .	24
3.2	Système de plaques d'épaisseur finie $a$ . . . . .	32
3.3	Interaction entre dipôles pour deux plaques d'épaisseur finie $a$ . . . . .	33
3.4	Séparation des contributions formant les dipôles . . . . .	34
4.1	Interaction bijective entre filaments et contrainte sur leur extension spatiale . . . . .	49
4.2	Effet de l'inversion d'espace sur les filaments . . . . .	54
A.1	Écran dans les systèmes semi-infinis . . . . .	65
A.2	Représentation diagrammatique des corrélations tronquées . . . . .	70
A.3	Pont brownien $\xi(s)$ . . . . .	88
A.4	Potentiel de self-énergie d'une boucle . . . . .	89
A.5	Règle d'électroneutralité des filaments . . . . .	96